Aufgabe 1

Gegeben:
Kurzgelagerter Balken mit gegebener Belastung q(x).

Gesucht: Lagerkräfte in A und B sowie die Beanspruchung des Stabes.

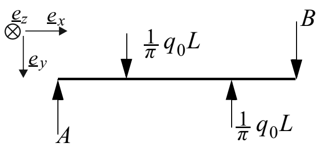
Vorgehen:

1) Mit Kräfte- und Momentengleichgewicht

2) Mit den Differentialbeziehungen

Lösung:
Lagerkräfte:
Die Linienlast kann für die Berechnung der Lagerkräfte in ein äquivalentes Kräftepaar aufgeteilt werden. Die zwei Kräfte greifen in $x = {}^{1}/_{4}L$ und $x = {}^{3}/_{4}L$ an und haben den Betrag F_q.

$$F_q = \int_0^{L/2} q_0 \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) dx = q_0 \frac{L}{2\pi}\left[-\cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)\right]_0^{L/2} = \frac{q_0 L}{\pi}$$

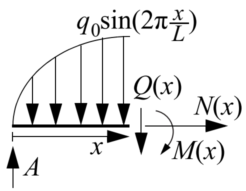


Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum M_z^A: \quad -\frac{q_0 L}{\pi}\frac{L}{4} + \frac{q_0 L}{\pi}\frac{3L}{4} - LB = 0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{q_0 L}{2\pi}$$

$$\sum F_y: \quad A - \frac{q_0 L}{\pi} - B + \frac{q_0 L}{\pi} = 0 \quad \Rightarrow \quad A = B = \frac{q_0 L}{2\pi}$$

1) Mit Kräfte- und Momentengleichgewicht:



Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum F_x: \quad N(x) = 0$$

$$\sum F_y: \quad Q(x) = \frac{q_0 L}{2\pi} - \int_0^x q_0 \sin\left(\frac{2\pi}{L}\xi\right) d\xi = \frac{q_0 L}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$$

$$\sum M_z: \quad M(x) = -\frac{q_0 L}{2\pi}x + \int_0^x (x-\xi) q_0 \sin\left(\frac{2\pi}{L}\xi\right) d\xi$$

$$= -\frac{q_0 L}{2\pi}x - \frac{q_0 L}{2\pi}x \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) + \frac{q_0 L}{2\pi}x - q_0\left[\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{L}\xi\right)}{\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2} - \frac{\xi \sin\left(\frac{2\pi}{L}\xi\right)}{\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2}\right]_0^x$$

$$= -\frac{q_0 L^2}{4\pi^2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$$

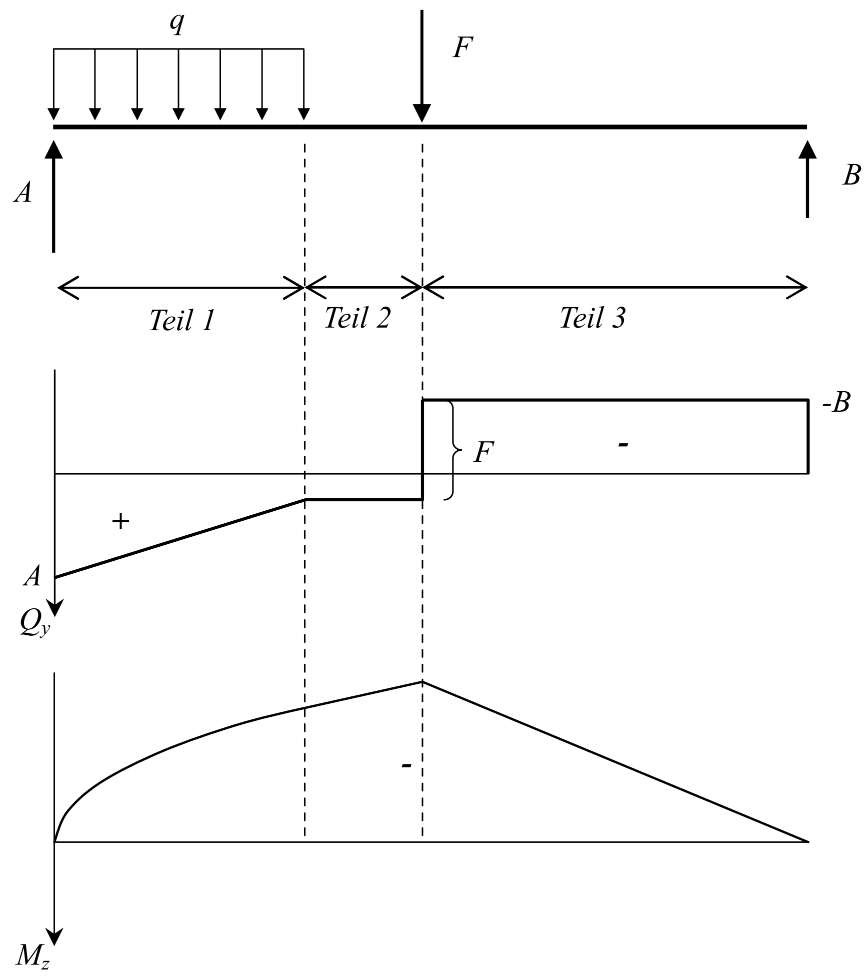
2) Mit Differentialbeziehungen:

$$\frac{dQ}{dx} = -q \quad \Rightarrow \quad Q(x) = \frac{q_0 L}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) + C_1$$

$$\frac{dM}{dx} = -Q \quad \Rightarrow \quad M(x) = -\frac{q_0 L^2}{4\pi^2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) - C_1 x + C_2$$

Randbedingungen: $M(0) = M(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = C_2 = 0$

$$Q(x) = \frac{q_0 L}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{L} x\right)$$
$$M(x) = -\frac{q_0 L^2}{4\pi^2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right)$$



Aufgabe 2

Gegeben:
Balkenträger mit Linienkraft q und Kraft P

Gesucht:
Querkraft- und Momentendiagramm.

Lösung:
Differentialbeziehungen Teil 1:

$$q_y(x) = q \quad \Rightarrow \quad Q_y(x) = -qx + C_1 \quad \Rightarrow \quad M_z(x) = -\frac{qx^2}{2} - C_1 x + C_2$$

Differentialbeziehungen Teil 2:

$$q_y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_y(x) = D_1 \quad \Rightarrow \quad M_z(x) = -D_1 x + D_2$$

Differentialbeziehungen Teil 3:

$$q_y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_y(x) = E_1 \quad \Rightarrow \quad M_z(x) = -E_1 x + E_2$$

Randbedingungen:

$$Q_y(0) = A, \quad Q_y(L) = -B, \quad M_z(0) = Mz(L) = 0$$

Aufgabe 3

Gegeben:
System aus Schnellaufgabe 12 / Aufgabe 1.
Beanspruchung im Stab AB:

$$
\begin{aligned}
N_1(x_1) &= A_x = P \\
Q_1(x_1) &= A_y - \frac{P}{a}x_1 = \frac{3}{2}P - \frac{P}{a}x_1 \\
M_{z1}(x_1) &= aP - \frac{3}{2}Px_1 + \frac{P}{2a}x_1^2
\end{aligned}
$$

Gesucht:
Verifizierung der Differentialgleichungen im Stab AB

Lösung:

$$
\begin{aligned}
\frac{dM_{z1}}{dx_1} &= -\frac{3}{2}P + \frac{P}{a}x_1 = -Q_1 \\
\frac{dQ_1}{dx_1} &= -\frac{P}{a} = -q_1
\end{aligned}
$$