Mechanik I 2013

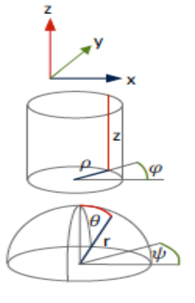
Roman Käslin & Maurin Widmer
Graphiken von Lukas Mosimann

Koordinatensysteme

Koordinaten	kartesisch	zylindrisch	sphärisch
kartesisch	$v=\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}$	$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi=\tan^{-1}\frac{y}{x}$, $z=z$	$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\theta=\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$, $\psi=\tan^{-1}\frac{y}{x}$
zylindrisch	$x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z=z$	$v=\begin{pmatrix}\dot{\rho}\\ \rho\dot{\varphi}\\ \dot{z}\end{pmatrix}$	$r=\sqrt{\rho^2+z^2}$, $\theta=\tan^{-1}\frac{\rho}{z}$, $\psi=\varphi$
sphärisch	$x=r\sin\theta\cos\psi$, $y=r\sin\theta\sin\psi$, $z=r\cos\theta$	$\rho=r\sin\theta$, $\varphi=\psi$, $z=r\cos\theta$	$v=\begin{pmatrix}\dot{r}\\ r\dot{\theta}\\ r\sin\theta\ \dot{\psi}\end{pmatrix}$

α	0 $0°$	$\frac{\pi}{6}$ $30°$	$\frac{\pi}{4}$ $45°$	$\frac{\pi}{3}$ $60°$	$\frac{\pi}{2}$ $90°$	π $180°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0
$\cot\alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-

Kartesisch:
$\vec{r}(t)=x(t)\vec{e_x}+y(t)\vec{e_y}+z(t)\vec{e_z}$
$\vec{v}=\dot{\vec{r}}=\dot{x}\vec{e_x}+\dot{y}\vec{e_y}+\dot{z}\vec{e_z}$
Zylindrisch:
$\vec{r}(t)=\rho(t)\vec{e_\rho}(\varphi(t))+z(t)\vec{e_z}$
$\vec{v}=\dot{\vec{r}}=\dot{\rho}\vec{e_\rho}+\rho\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}+\dot{z}\vec{e_z}$
Sphärisch:
$\vec{r}(t)=r(t)\vec{e_r}(\psi(t),\theta(t))$
$\vec{v}=\dot{\vec{r}}=\dot{r}\vec{e_r}+r\dot{\theta}\vec{e_\theta}+r\sin\theta\dot{\psi}\vec{e_\psi}$



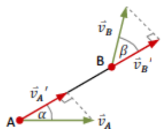
Geschwindigkeiten

Geschwindigkeit: $\underline{v}=\dot{\underline{r}}=\dot{s}\cdot\underline{\tau}$

Schnelligkeit: $\dot{s}=|\underline{v}|$ $\quad\underline{\tau}$: tangentialer Einheitsvektor $\tau=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

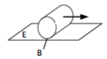
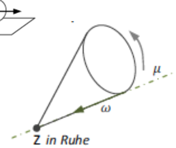
Satz der projizierten Geschwindigkeit (SdpG)

$v_A`, v_B`$: Projektionen von v_A und v_B auf $\underline{AB}$
$v_A\cdot\underline{AB}=v_B\cdot\underline{AB},\ |\underline{v_A}|\cos\alpha=|\underline{v_B}|\cos\beta$



Bewegungen

Kreisbewegung: $\underline{v}=\underline{\omega}\times\underline{r}$, ***falls*** $\boldsymbol{\omega\perp r}$: $\quad\boldsymbol{v=\omega\cdot r}$
$\underline{\omega}$: *Winkelgeschwindigkeit,* $\quad\dot{\varphi}$: *Winkelschnelligkeit*
Translation: $\quad\boldsymbol{\omega=0}$, $\underline{v_A}=\underline{v_B}\ \forall A,B\in K$
Rotation: $\quad$ ***A, B in Ruhe,*** $\mu=\underline{AB}$, $\underline{v_P}=\underline{\omega}\times\underline{AP}$
μ: ***momentane Rotationsachse*** $\underline{\omega}=\dot{\varphi}\underline{e_z}$
momentan: $\underline{v_A}\cdot\underline{\omega}=0$,
gleiten: $\underline{v}\perp E=0$, *rollen:* $\underline{v_B}=0$
Kreiselung: Ein Punkt in Ruhe -> momentane Rotation

Allgemeine Bewegung

$$\boldsymbol{v_C=v_A+\underline{\omega}\times\underline{AC}}$$

$\{\underline{\omega};\underline{v_A}\}$*Kinemate in A*, $\{\underline{\omega};\underline{v_\omega}\}$*Invarianten,*
$\underline{v_\omega}=\frac{\underline{v_A}\underline{\omega}}{|\underline{\omega}|}\cdot\frac{\underline{\omega}}{|\underline{\omega}|}=v_A\cdot e_\zeta\cdot e_\zeta$ $\qquad|\underline{v_\omega}|=\underline{v_A}\cdot\frac{\underline{\omega}}{|\underline{\omega}|}$
ζ: ***Zentralachse,*** $\quad\underline{v_Z}=\underline{v_\omega}=\underline{v_A}+\underline{\omega}\times\underline{AZ}$
$\zeta=\underline{r_Z}+\lambda\cdot\underline{\omega}=\begin{pmatrix}Z_x\\ Z_y\\ Z_z\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}$

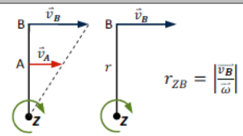
Spezialfälle ($\underline{v_A}\cdot\omega=0$):
Translation: $\underline{\omega}=0$,
Rotation: $\underline{v_A}=0\ (A\in\mu)$, $\underline{v_A}\perp\underline{\omega}\ (A\notin\mu)$

Ebene Bewegung

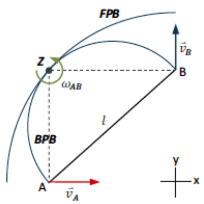
$\underline{\omega}\perp E$ -> Translation oder momentane Rotation ($\underline{v_\omega}=0$)

Satz vom Momentanzentrum

$\underline{v_Z}=0$,
$\underline{v_A}\perp\underline{ZA}$,
$\underline{v_A}=\underline{\omega}\cdot|\underline{ZA}|$



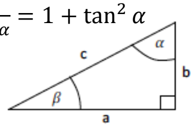
Polbahn



feste Polbahn bezüglich O_{xy},
bewegliche Polbahn bezüglich $\underline{AB}$

Grundformeln

$\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$, $\quad\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$,
$(\tan\alpha)'=\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\tan^2\alpha$



$\sin\alpha=\frac{a}{c}=\cos\beta$
$\cos\alpha=\frac{b}{c}=\sin\beta$
$\tan\alpha=\frac{a}{b}$
$\sqrt{5}\cong 2.2,\ \sqrt{3}\cong 1.7,\ \sqrt{2}\cong 1.4$

Kreisformel: $\quad(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$,
(a,b): Mittelpunkt, R: Radius
$\underline{r_K}=(R\cos\varphi+a)\,\underline{e_x}+(R\sin\varphi+b)\underline{e_y}$

Skalarprodukt: $\begin{pmatrix}a_x\\ a_y\\ a_z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_x\\ b_y\\ b_z\end{pmatrix}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$

Vektorprodukt: $\begin{pmatrix}a_x\\ a_y\\ a_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_x\\ b_y\\ b_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_yb_z-a_zb_y\\ a_zb_x-a_xb_z\\ a_xb_y-a_yb_x\end{pmatrix}$

Kräfte

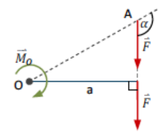
(punktgebundene Vektoren, def. mit Richtung, Betrag, Angriffspunkt)

F = m·a

Verschiebungssatz: Kraft kann entlang ihrer Wirkungslinie beliebig verschoben werden
Reaktionsprinzip: Es existiert keine Kraft ohne Reaktion (entgegengesetzt), *Actio=Reactio*
Kontaktkräfte: Wechselwirkung durch Berührung, gleicher Angriffspunkt
Fernkräfte: Wechselwirkung ohne Berührung, Angriffspunkte im Schwerpunkt
Innere Kräfte: Angriffspunkt innerhalb des Systems, treten im Gleichgewicht nicht auf
Äussere Kräfte: Angriffspunkt ausserhalb des Systems, Summe im Gleichgewicht = 0
Resultierende: (vektorielle) Summe aller Kräfte (Kräftegruppe), Einzelkraft
Druck: $\frac{F}{A}=p=\rho gh\quad F=p\cdot A=\int_0^{Länge}\rho gh\cdot$ Breite dh

Momente

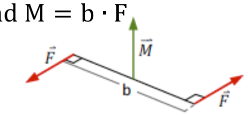
$\underline{M_O}=\underline{F_A}\times\underline{AO}\qquad\boldsymbol{\underline{M_P}=\underline{M_O}+\underline{R}\times\underline{OP}}$
$\{\underline{R};\underline{M_B}\}$*Dyname* in B
$\{\underline{R};\underline{M}^{(R)}\}$*Invarianten*
$\underline{M}^{(R)}=\underline{M_B}\cdot\frac{\underline{R}}{|\underline{R}|}\cdot\frac{\underline{R}}{|\underline{R}|}=\underline{M_B}\cdot e_\zeta\cdot e_\zeta$



ζ: ***Zentralachse***
$\underline{M_Z}=\underline{M}^{(R)}=\underline{M_A}+\underline{R}\times\underline{AZ}\qquad\zeta=\underline{r_Z}+\lambda\cdot\underline{R}$
Spezialfälle:
$\underline{M}^{(R)}=0$ => Reduktion auf Einzelkraft R möglich
$\underline{M_B}\perp\underline{R}$ -> ebenes Problem,
$\underline{R}=0$ -> Kräftepaar -> Moment, $\quad\underline{M_B}=0$ -> Einzelkraft

Kräftepaar

parallele Kräfte F, -F ; so dass R = 0 und M = b · F
(b: Abstand von F, -F)
Angriffspunkt: in der Mitte von b

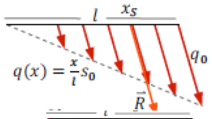


Verteile Kräfte

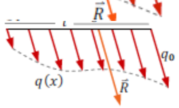
x_S = Kräftemittelpunkt

gleichförmige Kräfteverteilung: $x_S = \frac{L}{2}$ $R = L \cdot q_0$

Dreiecksverteilung: $x_S = \frac{2L}{3}$ $R = \frac{Lq_0}{2}$



linienverteilte Kräfte: $x_S = \frac{\int_0^L x\, q(x)\, dx}{\int_0^L q(x)\, dx\ (=R)}$



Flächenverteilte Kräfte:

$\vec{r}_S = \frac{\iint \vec{r} \cdot s(x,y)\, dxdy}{\iint s(x,y)\, dxdy}$

$R = \iint s(x,y)\, dxdy$

Volumenverteilte Kräfte:

$\vec{r}_S = \frac{\iiint \vec{r} \cdot f(x,y,z)\, dxdydz}{\iiint f(x,y,z)\, dxdydz}$

$R = \iint f(x,y,z)\, dxdydz$

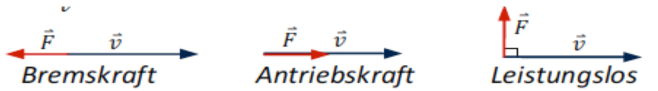
Leistung

Kraft: $P = \underline{F_M} \cdot \underline{v_M} = |\underline{F_M}||\underline{v_M}| \cdot \cos \propto$

Moment: $P = \underline{M_O} \cdot \omega$

Kräftegruppe: $P = \underline{R} \cdot \underline{v_B} + \underline{M_B} \cdot \omega$

Statische Äquivalenz: $\underline{R} = \underline{R}^*, \underline{M_B} = \underline{M_B^*}, \forall B$



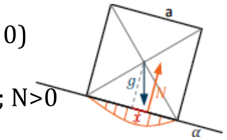
Ruhe und Gelichgewicht

Hauptsatz der Statik: Ein System befindet sich in Ruhelage (GGW) wenn alle äusseren Kräfte & Momente für das System verschwinden. $\boldsymbol{\underline{R} = 0}$, $\boldsymbol{\underline{M_O} = 0}$ **(GGB)**

Standfestigkeit:$(N\ (Normalkraft) > 0)$

N greift an Standfläche an -> standfest

Kein Kippen: 0 < x < a/2; Kein Abheben; N>0



Statische Bestimmtheit

m: Anzahl Gleichungen (aus GGB) (2D=3, 3D=6)

n: Anzahl der unbekannten Bindungen

m<n : (n-m)-fach statisch unbestimmt

m=n : statisch bestimmt

m>n : statisch überbestimmt – Mechanismus

Freischneiden und Systemtrennung

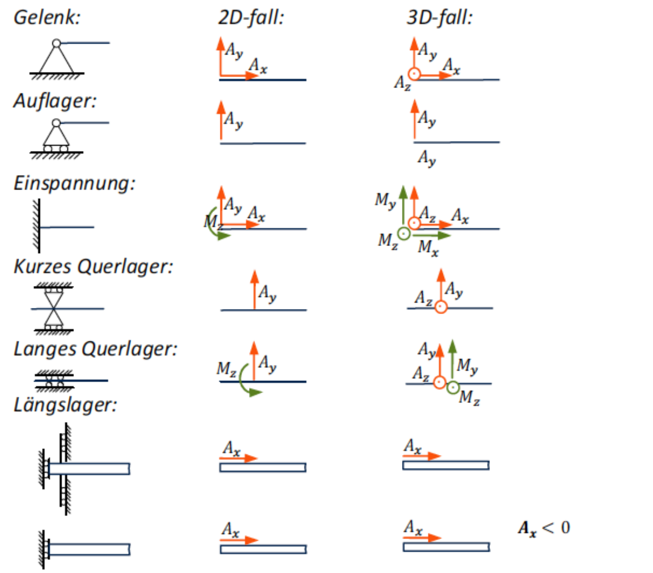
Lagerkräfte: immer dort wo eine Bewegung verhindert wird.

Feder: $F = k \cdot \Delta x$ **Drehfeder:** $F = k \cdot \Delta\varphi$

Systemtrennung: Einführung der Kräfte $F_{P,Sys1}$, $-F_{P,Sys2}$,

P: Punkt der Systemtrennung; Nur an Punkten, an welchen kein Moment übertragen wird.

Lager



Allgemeines Lösungsvorgehen

1. System freischneiden
2. Äussere Kräfte und Lagerkräfte einführen
3. geeignetes Koordinatensystem einführen
4. statische Bestimmtheit prüfen
5. GGW am Gesamtsystem fordern: $\underline{R} = 0$, $\underline{M} = 0$
6. Systemgrenzen für Systemtrennung sinnvoll wählen
7. Freischnittskizze (Bindungskräfte (heben sich auf), äussere Kräfte (falls an Grenze nur an einem Starrkörper, verteilte Kräfte -> Resultierende an Knoten), Lagerkräfte, Gewichtskräfte (bei Masse der Starrkörper))
8. Kräfte- und Momentengleichgewicht (x,y,z) F = 0, M = 0 (GGW an jedem Körper)
9. Kräfte durch Auflösen der Gleichungen ermitteln
10. Ergebnisse überprüfen (Vorzeichen bei einseitigen Lagern, Einheiten, GGW)

Fachwerke (Ideal)

- Knoten reibungsfrei
- Stäbe gewichtslos
- Knoten an Stabenden
- Lasten nur an Knoten

Pendelstütze:

Freigeschnittener Stab aus idealem Fachwerk, wenn nur längsbelastet (Zug (S>0) oder Druck(S<0))

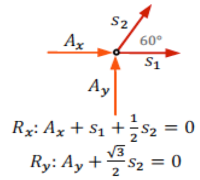
statisch bestimmt: $r + s = 2K$ (3D: $r + s = 3K$)

r = Anzahl Lagerkräfte, äussere Kräfte

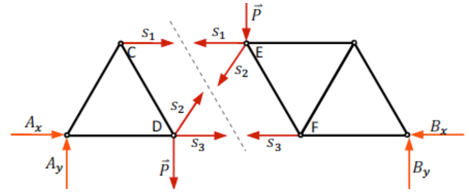
s = Anzahl Stäbe, K = Anzahl Knoten

Knotengleichgewicht (KGG):

1. Lagerkräfte bestimmen (GGB)
2. Stabkräfte als Zugkräfte (von Knoten weg) einführen
3. Gleichgewichtsbedingungen (x,y,z) an jedem Knoten aufstellen, auflösen



Dreikräfteschnitt:

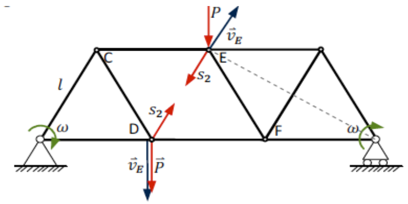


1. Lagerkräfte bestimmen
2. Drei unbekannte Stäbe schneiden und Stabkräfte einführen
3. Momentengleichgewicht an Knoten mit 2 Stabkräften zur Bestimmung der dritten, Gleichgewichtsbedingungen (x,y,z) zur Bestimmung der beiden anderen Stabkräfte

Prinzip der virtuellen Leistungen (PdvL):

(Lagerkräfte egal)

1. Zu bestimmender Stab entfernen und Stabkraft einführen
2. Stabkräfte vom Knoten weg einführen
3. Zulässige virtuelle Bewegung einführen
4. Starrkörper identifizieren
5. Bestimmung der Geschwindigkeit in Knoten in denen Kräfte wirken. (Bei der Graphik: C,D,E,F)
6. PdvL -> $P_{tot} = \sum F_i \cdot v_i = 0$ -> Stabkraft ermitteln



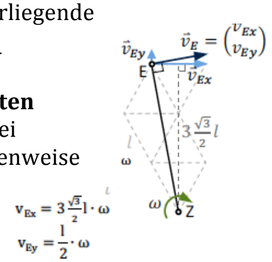
Tipps & Tricks für ideale Fachwerke

- Alle Stäbe sind starr - SdMz ($\perp v$) - $\boldsymbol{v = \omega \cdot r}$

- **Parallelogrammregel:** gegenüberliegende (parallele) Stäbe haben gleiches $\underline{\omega}$
- SdpG
- **Berechnung von Teilkomponenten einer Geschwindigkeit:** v kann bei schwierigem Abstand komponentenweise berechnet werden.

$v_x = \Delta y(Abstand) \cdot \omega$

$v_y = \Delta x(Abstand) \cdot \omega$



Reibung

(Kräfte wirken senkrecht zur Normalkraft)
Ruhe: $\vec{R} = 0$; $\vec{M} = 0$ wie auch wenn für $\vec{v} = const.$

Ebene

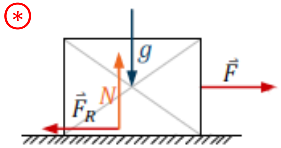
Haftreibung: $|\vec{F}_R| < \mu_0 \cdot |N|$

μ_0: Haftreibungskoeffizient v = 0 ⊛

Gleitreibung: $|\vec{F}_R| = \mu_1 \cdot |N|$

μ_1: Gleitreibungskoeffizient = $\frac{|\vec{F}_R|}{|N|}$

$\vec{F}_R = -\mu_1 \cdot |N| \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$



Gelenke und Querlager

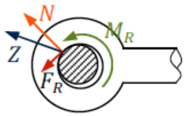
Haftreibung: $|\vec{M}_R| < \mu_0 \cdot r_L \cdot |\vec{Z}|$

r_L: Lochradius

$Z \approx N$: Zapfenkraft $|\vec{Z}| = \sqrt{C^2{}_x + C^2{}_y}$

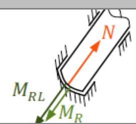
Gleitreibung: $|\vec{M}_R| = \mu_1 \cdot r_L \cdot |\vec{Z}|$

$\vec{M}_R = \mu_1 \cdot r_L \cdot |\vec{Z}| \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$



Längslager

Gleitreibung: $|\vec{M}_{RL}| = \frac{3}{2}\mu_1 \cdot r_L \cdot |\vec{N}|$



Rollreibung

Haftreibung (Ruhe): $|\vec{M}_R| < \mu_2 \cdot |N|$ für v = 0⊗; $|e| < \mu_2$

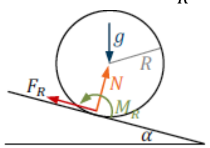
$|\vec{F}_R| < \mu_0 \cdot \vec{N}$ (haften) -> $\tan\varphi < 2\mu_0$

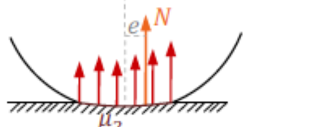
$|\vec{F}_R| = \mu_1 \cdot \vec{N}$(gleiten) ->$\tan\varphi = 2\mu_1$, da $\mu_0 > \mu_1$

$\rightarrow \varphi_{Max\ haften} \rightarrow \varphi_{\max gleichmässig\ gleiten}$ →Beschleunigung

Gleitreibung (Rollen): $\vec{M}_R = \mu_2 \cdot \vec{N}$ $|e| = \mu_2$

haften: $\tan\varphi < \frac{\mu_2}{R}$, $\tan\varphi < \mu_0$ rollen: $|e| \geq \mu_2$





Seilreibung

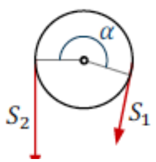
Haften: $S_2 < S_1 \cdot e^{\mu_1\varphi}$

φ: $Umschling.winkel$

Gleiten: $S_2 = S_1 \cdot e^{\mu_1\varphi}$ $S_2 > S_1$

Seil -> immer Zugkraft

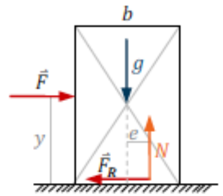
S_1,S_2: Seilkräfte links und rechts der Rolle



Standfestigkeit mit Reibung

M_z: $F_R y = N \cdot e$

- $e < \frac{b}{2}$ sonst kippen
- $F_R < \mu_0 \cdot N$ sonst gleiten



Rollen oder Gleiten?

⊛ Zuerst verletzt ->Gleiten

⊗ Zuerst verletzt ->Rollen

Allgemeines Vorgehen bei Reibung

1. System freischneiden
2. Äussere Kräfte und Lagerkräfte einführen
3. geeignetes Koordinatensystem einführen
4. Bei Haftreibung GGB formulieren
5. Haftreibungskraft als Unbekannte einführen oder Formel bei Gleitreibung verwenden (entgegen der Bewegungsrichtung einführen)
6. $\vec{F}_R$ in Haftreibungsbedingungen einsetzen, Ungleichung auflösen und zulässige Werte von $\vec{F}_R$ für Ruhe angeben!

Beanspruchung

(Beschreibung der inneren Kräfte im Querschnitt eines Stabträgers)

- gerader Stabträger (vertikale Kräfte -> Balken)
- gekrümmter Stabträger, analog für Achse ebener Schnitt senkrecht zur Achse durch den Stab im Abstand x zu den Lagern
- Schnittkräfte sind entgegengesetzt & äquivalent zu den Lagerkräften des anderen Teilsystems

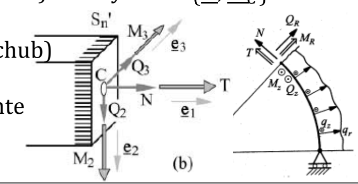
Reduktion in C(Flächenmittelpunkt) -> Dyname: $\{\underline{R}; \underline{M_C}\}$

R: N: Normalkraft (Zug, Druck)

$Q_2 = Q_y$ & $Q_3 = Q_z$: Querkräfte (Schub)

M_C: T: Torsionsmoment

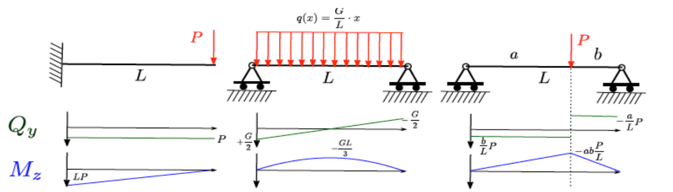
$M_2 = M_y$ & $M_3 = M_z$: Biegemomente



Vorgehensweise

1. Bestimmung der Lagerkräfte (GGW, Unbekannte (später mit Randbedingungen (reibungsfreies Gelenk hat kein Moment, lastfreies Ende hat Beanspruchungskomponenten gleich Null) definieren))
2. Schnitt senkrecht zur Achse in Abstand x oder Winkel φ (bei *Einzelkräften* und -momenten muss in jedem Intervall ein *Schnitt* eingeführt werden)
3. Koordinatensystem einführen (e_x, e_y, e_z oder e_φ, e_z, e_r) e_x oder e_φ zeigen entlang der äusseren Normalen der jeweiligen Schnittfläche
4. Berechnung der Beanspruchungskomponenten (GGW (Momentenbedingung am Schnittpunkt) oder Reduktion, Randbedingungen auswerten)
5. evt. Veranschaulichung durch Diagramme

Häufige Beanspruchungsdiagramme



Freie Enden und Reibungsfreie Gelenke -> Kein Moment

Differentialbeziehungen

Gerader Stabträger:

$Q_y{}' = -q_y$ $Q_z{}' = -q_z$

$M_z{}' = -Q_y$ $M_y{}' = Q_z$

Gekrümmter Stabträger:

$\phi: N' + Q_r + R \cdot q_\varphi = 0,$ $T' + M_r = 0$

$z: Q_z' + R \cdot q_z = 0,$ $M_z' + RQ_r = 0$

$r: Q_r' - N + R \cdot q_r = 0,$ $M_r' - T + RQ_z = 0$

Berechnung der Querkräfte und Biegemomente:

$Q_y = -\int q_y dx + C_1$ $M_z = -\int Q_y dx + C_2$

Extremum des Biegemomentes ist dort, wo die Querkräfte verschwinden