Mechanik I: Kinematik und Statik - HS18

Lösung Schnellübung 1

Aufgabe 1

Gegeben: Bewegungsgleichung des Punktes $M : x(t) = -t^2 + 12t; y(t) = t^2 + 12t, z(t) = t$.
Gesucht:

a) Parameter t_m,für welchen $x = x_{max}$.

b) Parameter t_e und Ort (x_e, y_e, z_e) wo Ebene E durchstossen wird.

c) Formel und Skizze der Kurve projiziert in die y-z-Ebene.

Lösung:

a) Maxima finden mit

$$\dot{x}(t_m) = -2t_m + 12 \overset{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow t_m = 6$$
$$\Rightarrow x(t_m) = 36$$

b) Bewegungsgleichung für t_e in die Ebenengleichung einsetzen

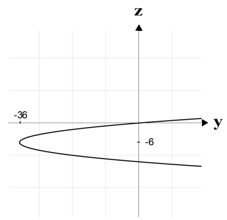
$$(-t_e^2 + 12t_e) + (t_e^2 + 12t_e) + t_e = 0$$
$$\Rightarrow 25t_e = 50$$
$$\Rightarrow t_e = 2$$

Aus den Bewegungsgleichungen folgt $x_e = 20$, $y_e = 28$ und $z_e = 2$.

c) Gleichungen in der y-z-Ebene: $y(t) = t^2 + 12t$ und $z(t) = t$.

$$y(z) = z^2 + 12z$$
$$\Rightarrow y(z) = z^2 + 12z + 36 - 36$$
$$\Rightarrow y(z) = (z + 6)^2 - 36$$

Die Gleichung entspricht einer Parabel mit Scheitelpunkt bei $(y = -36, z = -6)$. Da die Bewegung bei $t = 0$ beginnt findet nur die Bewegung im ersten Quadranten statt.



1

Aufgabe 2

Gegeben:

- Punkt M_1 in sphär. Koordinaten $r = R$, $\theta = \frac{\pi}{4}(1 - \cos(\mu t))$, $\Psi = \mu t$.
- Punkt M_2 in kartes. Koordinaten $x = R\cos(\mu t)$, $y = R\sin(\mu t)$, $z = R\mu t - R\pi$

Gesucht:

a) Parameter t_t und Ort (x, y, z) des ersten Treffens von M_1. und M_2.

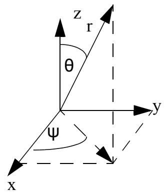
b) Parameter t_e und Ort (r_e, θ_e, Ψ_e) des ersten Treffens von M_1 mit der Ebene.

c) Ortskurve des Punktes M_2.

Lösung:

a)

$$r_2 = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{R^2+(R\mu t - R\pi)^2}$$
$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) = \arctan\left(\frac{R}{R\mu t - R\pi}\right)$$
$$\Psi_2 = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{R\sin(\mu t)}{R\cos(\mu t)}\right) = \arctan(\tan(\mu t)) = \mu t$$



Koordinaten gleichsetzen zur Bestimmung des ersten Treffens

$$r_2 = r_1 \Rightarrow R\mu t - R\pi = 0 \tag{1}$$
$$\theta_1 = \theta_2 \Rightarrow \arctan\left(\frac{R}{R\mu t - R\pi}\right) = \frac{\pi}{4}(1-\cos(\mu t)) \tag{2}$$
$$\Psi_1 = \Psi_2 \Rightarrow \mu t = \mu t \tag{3}$$

Gleichung (3) ist immer erfüllt. Verwenden wir (1) erhalten wir als mögliches Ergebnis $t_t = \frac{\pi}{\mu}$. Setzen wir diesen nun in (3) ein und benutzen die Beziehung $\arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}(1-\cos(\mu t_t))$$
$$\Rightarrow \cos(\mu t_t) = -1$$
$$\Rightarrow t_t = \frac{\pi}{\mu} + \frac{2\pi N}{\mu}$$

Somit findet ein Treffen bei $t = \frac{\pi}{\mu}$ an der Stelle $x_t = -R$, $y_t = 0$ und $z_t = 0$ statt.

b) In kartesischen Koordinaten

$$z = R\cos(\theta) = R\cos(\frac{\pi}{4}(1-\cos(\mu t)))$$

Treffen von M_1 mit der Ebene $z = \frac{R}{2}$.

$$R\cos(\frac{\pi}{4}(1-\cos(\mu t_e))) = \frac{R}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{\pi}{4}(1-\cos(\mu t_e)) = \frac{\pi}{3}$$
$$\Rightarrow \cos(\mu t_e) = -\frac{1}{3}$$

Treffen bei $t_e = \frac{1}{\mu}\arccos(-\frac{1}{3})$ an der Stelle $r_e = R$, $\theta_e = \frac{\pi}{3}$ und $\Psi_e = \arccos(-\frac{1}{3})$.

c) Die x und y Komponenten beschreiben einen Kreis mit Radius $R \Rightarrow$ Schraube.