Aufgabe 1

Gegeben: Ellipse $\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ und Geschwindigkeit der Parallelen $\underline{v} = -v_0 \sin(\frac{v_0}{2a}t)\underline{e}_x$.

Gesucht:

a) Geschwindigkeit des Punktes P auf der Ellipse

b) Extrema der Schnelligkeit

Lösung:

a) Koordinate $x(t)$ der Parallelen kann aus $\underline{v}(t) = \dot{x}\underline{e}_x$ berechnet werden.

$$x(t) = 2a\cos\left(\frac{v_0}{2a}t\right) + C_1$$

mit $x(0) = 2a$ folgt $C_1 = 0$ und damit

$$x(t) = 2a\cos\left(\frac{v_0}{2a}t\right)$$

Den Punkt auf der Ellipse finden wir, indem wir die Koordinate in die Ellipsengleichung einsetzen und nach $y(t)$ auflösen.

$$y(t)^2 = a^2 - \frac{x(t)^2}{4} = a^2\left(1 - \cos\left(\frac{v_0}{2a}t\right)^2\right) = a^2 \sin\left(\frac{v_0}{2a}t\right)^2$$

und somit

$$y(t)^2 = \pm a \sin\left(\frac{v_0}{2a}t\right)$$

Die beiden Lösungen entsprechen dabei dem oberen sowie dem unteren Pfad. Im folgenden betrachten wir nur noch den oberen Pfad. Die Geschwindigkeit des Punktes berechnet sich damit als

$$v_y = \dot{y}(t) = \frac{v_0}{2}\cos\left(\frac{v_0}{2a}t\right)$$

$$\underline{v} = -v_0\sin(\frac{v_0}{2a}t)\underline{e}_x + \frac{v_0}{2}\cos\left(\frac{v_0}{2a}t\right)\underline{e}_y$$

b) Die Schnelligkeit $\dot{s}$ ist definiert als

$$\dot{s} = |\underline{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = v_0\sqrt{\sin\left(\frac{v_0}{2a}t\right)^2 + \frac{1}{4}\cos\left(\frac{v_0}{2a}t\right)^2}$$

Um die Maxima zu finden berechnen wir die Ableitung nach t

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{s}}{\partial t} &= \frac{v_0}{2}\frac{2\sin\left(\frac{v_0}{2a}t\right)\cos\left(\frac{v_0}{2a}t\right)\frac{v_0}{2a} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{v_0}{2a}t\right)\left(-\sin\left(\frac{v_0}{2a}t\right)\right)\frac{v_0}{2a}}{\sqrt{\sin\left(\frac{v_0}{2a}t\right)^2 + \frac{1}{4}\cos\left(\frac{v_0}{2a}t\right)^2}} \\
&\Rightarrow \sin\left(\frac{v_0}{2a}t\right)\cos\left(\frac{v_0}{2a}t\right)\frac{v_0}{a} - \cos\left(\frac{v_0}{2a}t\right)\sin\left(\frac{v_0}{2a}t\right)\frac{v_0}{4a} \\
&\Rightarrow \frac{3v_0}{4a}\cos\left(\frac{v_0}{2a}t\right)\sin\left(\frac{v_0}{2a}t\right) \stackrel{!}{=} 0
\end{aligned}$$

Um alle mögliche Lösungen zu finden, machen wir eine Fallunterscheidung.

1. Fall

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{v_0}{2a}t\right) &\stackrel{!}{=} 0 \\
&\Rightarrow \frac{v_0}{2a}t = n\pi \\
&\Rightarrow t_1 = \frac{2na\pi}{v_0} \\
&\Rightarrow v_{1,max} = \frac{v_0}{2}
\end{aligned}$$

2. Fall

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{v_0}{2a}t\right) &\stackrel{!}{=} 0\\ &\Rightarrow \frac{v_0}{2a}t = n\pi + \frac{\pi}{2}\\ &\Rightarrow t_2 = \frac{2a}{v_0}\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\\ &\Rightarrow v_{2,max} = v_0\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Gegeben: $\rho = R$, $z = z(t) = R\varphi(t)\tan(\alpha)$, $\underline{v} = v_\varphi \underline{e}_\varphi + v_z \underline{e}_z$.

Gesucht: Bewegungsgleichung des Punktes M.

Lösung: Es muss gelten $v_\varphi = C_1 e^{kt}, v_z = C_2 e^{kt}$ und $\tan\alpha = \frac{v_\varphi}{v_z} = \frac{C_1}{C_2.}$
Anfangsgeschwindigkeit $\underline{v} = v_0(\underline{e}_\varphi + \underline{e}_z)$.

$$\begin{aligned}v_\varphi(0) = C_1 = v_0 &\text{ und } v_z(0) = C_2 = v_0,\\ \Rightarrow \tan\alpha &= \frac{v_0}{v_0} = 1,\\ z(0) &= R\varphi(0)\cdot 1 = 0.\end{aligned}$$

Die Beziehung zwischen $z(t)$ und $v_z(t)$ ist gegeben durch

$$z(t) = \int_0^t v_z(t)dt + z_0 = \frac{v_0}{k}e^{kt} + z_0.$$

Aus der Anfangsbedingung $z(0) = 0$ erhalten wir $z_0 = -\frac{v_0}{k}$ und somit

$$z(t) = \frac{v_0}{k}(e^{kt} - 1).$$

Die Variable k bestimmen wir über die Bedinugng $z(t_1) = 2R$ und $v_\varphi(t) = v_0 e^{kt_1} = \frac{v_0}{2} \Rightarrow e^{kt_1} = \frac{1}{2}$.

Dadurch haben wir

$$z(t_1) = \frac{v_0}{k}(\frac{1}{2} - 1) = 2R \Rightarrow k = -\frac{v_0}{4R}.$$

Somit lauten die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\rho(t) &= R\\ \varphi(t) &= -4\left(e^{\frac{-v_0}{4R}t} - 1\right)\\ z(t) &= -4R\left(e^{\frac{-v_0}{4R}t} - 1\right)\end{aligned}$$