Lösung Schnellübung 3

Aufgabe 1

Gegeben: $A = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} R \\ \frac{R}{\sqrt{2}} \\ \frac{R}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \big(a, -v, v\big)$.
Gesucht: a) ω und a.
Lösung:

Wir wissen dass $\underline{v}_A = \underline{v}_B = \underline{0}$, da beide auf der Rotationsachse liegen. Die Richtung von $\underline{\omega}$ ist durch die Richtung von $\underline{AB}$ gegeben, wobei $\underline{AB} = \left(0, \frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}}\right)$. Mithilfe von $|\underline{AB}| = R$ finden wir

$$\underline{\omega} = \omega \underline{e}_\omega = \omega \cdot \frac{\underline{AB}}{|\underline{AB}|} = \omega \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Somit berechnen wir die Geschwindigkeit des Punktes O

$$\underline{v}_O = \underline{v}_A + \underline{\omega} \times \underline{AO} = \omega \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} a \\ -v \\ v \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$\frac{\omega R}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} a \\ -v \\ v \end{pmatrix}$$

und schlussendlich

$$a = 0$$
$$\omega = \frac{\sqrt{2} v}{R}$$
$$\underline{\omega} = \frac{v}{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Gegeben: Geometrie, sowie $\underline{\omega}$
Gesucht: Schnelligkeit der beiden Sessel.
Lösung:

Kurze Variante:

Wir sehen, dass der Abstand senkrecht zur Rotationsachse zu beiden Sesseln $L\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ist und finden die Schnelligkeit mit

$$\dot{s} = R\omega = L\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\omega$$

Lange Variante:

Es findet eine Rotation um $\underline{e}_z$ statt mit

$$\underline{\omega} = \omega \underline{e}_z.$$

Die Verbindungsgerade von der Rotationsachse zu dem rechten bzw. linken Sessel beträgt

$$\underline{OS} = \pm L\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Die Geschwindigkeiten beider Sessel berechnen wir mit

$$\underline{v}_S = \underline{v}_O + \underline{\omega} \times \underline{OS}$$

und somit

$$\underline{v}_S = \pm L\omega\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

.
Damit beträgt die Schnelligkeit beider Sessel $\dot{s} = R\omega = L\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\omega$.

Aufgabe 3

Gegeben: $\rho = R, \varphi = a\sin(\kappa t), z = b[\sin(\kappa t)]^2$
Gesucht:

a) Konstanten a und b.

b) Geschwindigkeit $\underline{v}$ und Anfangsschnelligkeit $v(0)$.

c) Zeit T zwischen zwei Stillständen.

Lösung:

a) Es gilt $\underline{v} = \dot{\rho}\underline{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi + \dot{z}\underline{e}_z$ Mit

$$\begin{aligned}v_\rho &= \dot{\rho} = 0\\ v_\varphi &= \rho\dot{\varphi} = Ra\kappa\cos(\kappa t)\\ v_z &= \dot{z} = 2b\kappa\sin(\kappa t)\cos(\kappa t)\end{aligned}$$

Somit finden wir die Schnelligkeit, bzw. das Quadrat der Schnelligkeit, und nutzen dabei aus, dass beide Funktionen die gleichen Nullstellen besitzen.

$$\begin{aligned}\dot{s} &= |\underline{v}| = \sqrt{v_\rho^2 + v_\varphi^2 + v_z^2}\\ \dot{s}^2 &= v_\rho^2 + v_\varphi^2 + v_z^2\\ \dot{s}^2 &= R^2a^2\kappa^2\cos(\kappa t_*)^2 + 4b^2\kappa^2\cos(\kappa t_*)^2\sin(\kappa t_*)^2\\ \dot{s}^2 &= \cos(\kappa t_*)^2\left(R^2a^2\kappa^2 + 4b^2\kappa^2\sin(\kappa t_*)^2\right)\end{aligned}$$

Ein Produkt ist immer dann 0, wenn einer der Faktoren 0 ist, Dies bringt uns auf die beiden Bedingungen
1.

$$\cos(\kappa t_*)^2 = 0 \Rightarrow \kappa t_* = \frac{n}{2} + n\pi$$

2.

$$R^2a^2\kappa^2 + 4b^2\kappa^2\sin(\kappa t_*)^2$$

Da $R^2a^2\kappa^2 > 0$ und $4b^2\kappa^2\sin(\kappa t_*)^2 \geq 0$ kann die Summe beider niemals 0 ergeben, solange $t \in \mathbb{R}$. Damit finden wir keine weiteren realen Lösungen.

Wir erhalten Werte für a und b indem wir die gefundenen Zeiten in die Bewegungsgleichung einsetzen und finden somit

$$\text{für: } n = 0, 2, 4, ... \Rightarrow a = \pi$$
$$\text{für: } n = 1, 3, 5, ... \Rightarrow a = -\pi$$

sowie

$$b = h$$

Da in der Aufgabenstellung nur nach positiven Konstanten gesucht wird, behalten wir nur die erste Lösung für a und finden $a = \pi$ und $b = h$.

Variante: Die Schnelligkeit kann nur 0 werden, wenn alle drei Komponenten der Geschwindigkeit 0 sind. Benutzen wir dies, sehen wir, dass daraus die Bedingung $\cos(\kappa t_*) = 0$ folgt, womit wir wieder auf die bereits gefundenen Lösungen kommen.

b)

$$\begin{aligned} v_\rho(t) &= 0 \\ v_\varphi(t) &= R\pi\kappa \cos(\kappa t) \\ v_z(t) &= 2h\kappa \sin(\kappa t) \cos(\kappa t) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \underline{v}_0 &= R\pi\kappa \underline{e}_\varphi \\ v_0 &= R\pi\kappa \end{aligned}$$

c) Wir nutzen das bereit in a) gefundene Resultat und sehen dass bei einem Stillstand gilt: $|\underline{v}| = 0 \Rightarrow \cos(\kappa t) = 0 \Rightarrow \kappa t = \frac{\pi}{2} + n\pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow t_n = \frac{\pi}{2\kappa} + n\frac{n}{\kappa}.$$

Die Zeit zwischen zwei Stillständen ist folglich

$$T = t_{n+1} - t_n = \frac{\pi}{\kappa}$$