Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Mechanik I: Kinematik und Statik - HS18
Lösung Schnellübung 6

IMES

Aufgabe 1

Gegeben: $\underline{v}_A = v\underline{e}_x$, Fachwerk mit Stäben der Länge l und $2l$
Gesucht:

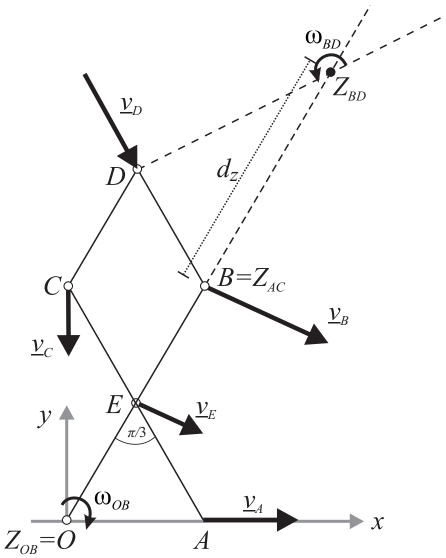
a) $\underline{\omega}_{OB}$

b) Momentanzentrum des Stabes AC: Z_{AC} , $\underline{v}_C$

c) Momentanzentrum des Stabes BD: Z_{BD}

d) $\underline{v}_D$

Lösung:



a)

$$v_E = l \cdot \omega_{OB}$$

Satz der projizierten Geschwindigkeiten: $v_E \cos(30°) = v \cos(60°)$

$$\Rightarrow \quad v_E = \frac{1}{2} v \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \omega_{OB} = \frac{\sqrt{3}}{3l} v \quad \Rightarrow \quad \underline{\omega}_{OB} = -\omega_{OB}\, \underline{e}_z$$

b) Z_{AC}: Senkrecht auf $\underline{v}_A$ und senkrecht auf $\underline{v}_E$ $\quad \Rightarrow \quad Z_{AC} = B$

$$\omega_{AC} = \frac{v}{2\sqrt{3}\frac{l}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3l} v = \omega_{OB} \quad \Rightarrow \quad \underline{v}_C = -l\omega_{AC}\underline{e}_y = -\frac{\sqrt{3}}{3} v\, \underline{e}_y$$

c) Parallele Stäbe (eines Parallelograms) haben gleiche Winkelschnelligkeit ω.

$$\omega_{BD} = \omega_{AC} \quad \Rightarrow \quad v_B = d_z\, \omega_{BD} = 2l\, \omega_{OB}$$

$$d_z = \frac{2l\, \omega_{OB}}{\omega_{BD}} = \frac{2lv\, 3l\sqrt{3}}{3lv\sqrt{3}} = 2l$$

$$\Rightarrow \underline{O\, Z_{BD}} = (2l + d_z) \begin{pmatrix} \cos(60°) \\ \sin(60°) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2l \\ 2\sqrt{3}l \\ 0 \end{pmatrix}$$

d)

$$\underline{v}_D = \underline{\omega}_{BD} \times \underline{Z_{BD}\, D}$$

$$\underline{v}_D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3l} v \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{3l}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}l}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}v}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Gegeben: Starrer Quader, Kantenlänge a bzw. b

$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ \omega \end{pmatrix} \qquad v_C = \begin{pmatrix} -a\omega \\ 2a\omega \\ -2a\omega \end{pmatrix}$$

$$\underline{F}_1 = F\underline{e}_y \qquad \underline{F}_2 = F\underline{e}_z \qquad \underline{F}_3 = F\underline{e}_x$$

Gesucht: b und a so, dass Gesamtleistung $P = 0$

1. Variante: $P = \sum \underline{F}_i \cdot \underline{v}_i = \underline{F}_1 \cdot \underline{v}_A + \underline{F}_2 \cdot \underline{v}_B + \underline{F}_3 \cdot \underline{v}_H = 0$

$$\underline{v}_A = \underline{v}_C + \underline{\omega} \times \underline{CA}$$
$$\underline{v}_A = \begin{pmatrix} -a\omega \\ 2a\omega \\ -2a\omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\omega + a\omega \\ 2a\omega - a\omega \\ -2a\omega + a\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a\omega \\ -a\omega \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_B = \underline{v}_C + \underline{\omega} \times \underline{CB}$$
$$\underline{v}_B = \begin{pmatrix} -a\omega \\ 2a\omega \\ -2a\omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\omega + a\omega \\ 2a\omega + 0 \\ -2a\omega + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2a\omega \\ -2a\omega \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}_H = \underline{v}_C + \underline{\omega} \times \underline{CH}$$
$$\underline{v}_H = \begin{pmatrix} -a\omega \\ 2a\omega \\ -2a\omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\omega + b\omega \\ 2a\omega - a\omega \\ -2a\omega + a\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b-a)\omega \\ a\omega \\ -a\omega \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a\omega \\ -a\omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2a\omega \\ -2a\omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (b-a)\omega \\ a\omega \\ -a\omega \end{pmatrix}$$
$$P = Fa\omega - 2Fa\omega - Fa\omega + Fb\omega = 0$$
$$\Rightarrow \quad b = 2a$$

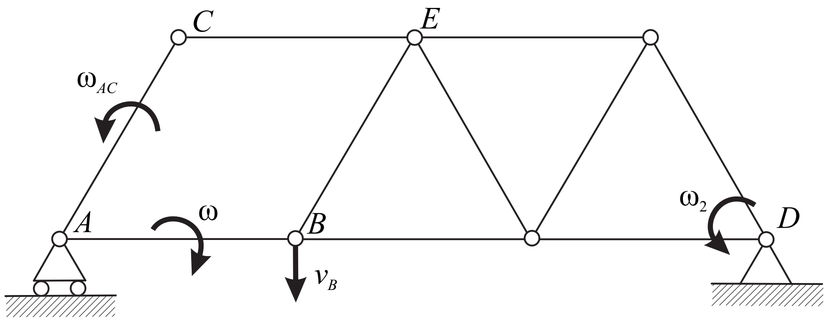
2. Variante: $P = \underline{F}_{Res} \cdot \underline{v}_C + \underline{M}_C \cdot \underline{\omega}$ mit $\underline{F}_{Res} = \begin{pmatrix} F \\ F \\ F \end{pmatrix}$ und $M_C = \begin{pmatrix} -aF \\ bF \\ -aF \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} F \\ F \\ F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a\omega \\ 2a\omega \\ -2a\omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -aF \\ bF \\ -aF \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ \omega \end{pmatrix}$$
$$P = -Fa\omega + 2Fa\omega - 2Fa\omega + Fb\omega - Fa\omega = 0$$
$$\Rightarrow \quad b = 2a$$

Aufgabe 3

Gegeben: Stab AB rotiert mit Winkelschnelligkeit ω.
Gesucht: Betrag und Richtung der Winkelgeschwindigkeit des Stabes AC.

Lösung:



$$v_B = l\,\omega = 2l\,\omega_2 \quad \Rightarrow \quad w_2 = \frac{\omega}{2}$$

Stab AC rotiert gegen den Uhrzeigersinn mit Winkelschnelligkeit ω_2, da parallele Stäbe die gleiche Winkelgeschwindigkeit haben.

$$\underline{AC} \parallel \underline{BE} \quad \Rightarrow \quad \omega_{AC} = \omega_{BE} = \omega_2$$