Lösung Schnellübung 7

Aufgabe 1

Gegeben:
Quader mit Kantenlängen b, a, a.
Kräfte: $\underline{F}_1 = P\underline{e}_y$, $\underline{F}_2 = P\underline{e}_z$, $\underline{F}_3 = P\underline{e}_x$.

Gesucht:

a) a bei gegebenem b, damit die Reduktion auf eine Kraft möglich ist.

b) Punkt P der Quaderoberfläche äquivalent zur gegebenen Kräftegruppe.

Lösung:

a) Reduktion auf Einzelkraft möglich, falls $\underline{R} \cdot \underline{M}_O = 0$

$$\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 = \begin{pmatrix} P \\ P \\ P \end{pmatrix}$$

$$\underline{M}_O = \begin{pmatrix} b \\ a \\ a \end{pmatrix} \times \underline{F}_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \times \underline{F}_2 + \begin{pmatrix} b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \times \underline{F}_3 = \begin{pmatrix} -aP \\ 0 \\ -aP + bP \end{pmatrix}$$

$$\underline{R} \cdot \underline{M}_O = \begin{pmatrix} P \\ P \\ P \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -aP \\ 0 \\ -aP + bP \end{pmatrix} = -aP^2 - aP^2 + bP^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{b}{2}$$

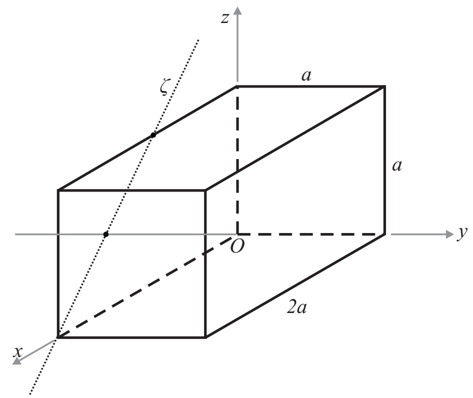
b) Punkt Z auf Zentralachse, wobei $\underline{M}_Z = \underline{0}$

$$\underline{M}_Z = \underline{M}_O + \underline{R} \times \underline{OZ} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -aP \\ 0 \\ aP \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P \\ P \\ P \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} aP \\ 0 \\ -aP \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Pz - Py \\ Px - Pz \\ Py - Px \end{pmatrix}$$

$$x = z \text{ und } a = z - y \quad \Rightarrow \quad y = z - a \qquad \text{Setze } x = 0!$$

$$\text{Zentralachse } \zeta: \quad r(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Aufgabe 2

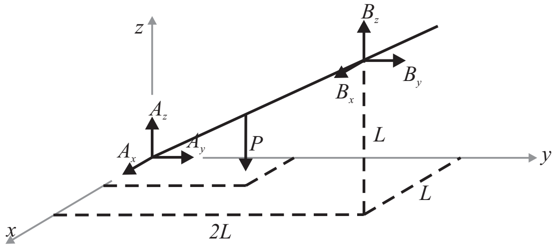
Gegeben:
Kiste mit Kantenlängen $2L$, L, L und Stab mit Länge $3L$.
Kraft P.

Gesucht:

a) Lagerkräfte am Stab

b) Anzahl linear unabhängiger Gleichungen

Lösung:



Kräftegleichgewichte:

$$\sum F_x: \quad A_x + B_x = 0$$
$$\sum F_y: \quad A_y + B_y = 0$$
$$\sum F_z: \quad A_z + B_z - P = 0$$

Momentengleichgewichte:

$$\sum M_x^A: \quad 2LB_z - LB_y - LP = 0$$
$$\sum M_y^A: \quad \frac{L}{2}P + LB_x - LB_z = 0$$
$$\sum M_z^A: \quad LB_y - 2LB_x = 0$$

$B_x = \frac{1}{2}B_y \Rightarrow$ Gleichungen für $\sum M_x^A$ und $\sum M_y^A$ sind linear abhängig!
$\Rightarrow$ Nur 5 Gleichungen $\Rightarrow$ Eine weitere Bedingung nötig!

$\Rightarrow$ Da Lager B reibungsfrei ist, muss die Kraft B senkrecht zum Stab sein!

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} L = 0 \quad \Rightarrow \quad B_x + 2B_y + B_z = 0 \quad \text{mit } B_x = \frac{1}{2}B_y$$

$$\Rightarrow \quad B_z = -\frac{5}{2}B_y$$

Einsetzen in die Kräfte- und Momentengleichgewichte ergibt:

$$B_x = -\frac{P}{12} \quad B_y = -\frac{P}{6} \quad B_z = \frac{5P}{12}$$
$$A_x = \frac{P}{12} \quad A_y = \frac{P}{6} \quad A_z = \frac{7P}{12}$$

Aufgabe 3

Gegeben:
Geometrie und Kraft P.

Gesucht: Kraft F, die für das Gleichgewicht nötig ist.

Lösung:
Moment bezüglich des Lagers:

$$PL - FL = 0 \quad \Rightarrow \quad F = P$$