Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Mechanik I: Kinematik und Statik - HS18
Lösung Schnellübung 8

Aufgabe 1

Gegeben:
Quader mit Kantenlänge a und Gewicht G.
Kraft P.

Gesucht:

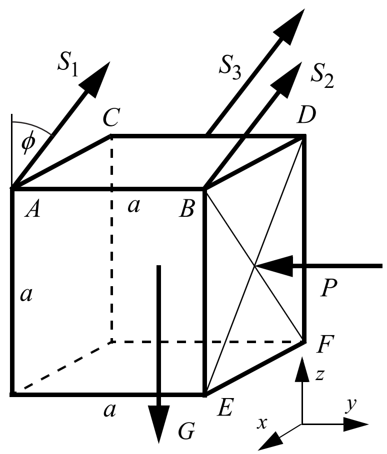
a) Fadenkräfte und Winkel ϕ.

b) Maximales P, so dass die Fäden straff bleiben.

Lösung:

a) Die Seilkräfte können folgendermassen beschrieben werden:

$$\underline{S}_1 = \begin{pmatrix} S_{1x} \\ S_{1y} \\ S_{1z} \end{pmatrix} \qquad \underline{S}_2 = \begin{pmatrix} S_{2x} \\ S_{2y} \\ S_{2z} \end{pmatrix} \qquad \underline{S}_3 = \begin{pmatrix} S_{3x} \\ S_{3y} \\ S_{3z} \end{pmatrix}$$



Das Kräftegleichgewicht in x-Richtung ergibt:

$$\sum F_x: \quad S_{1x} + S_{2x} + S_{3x} = 0 \tag{1}$$

Da die Seile parallel zueinander sind, müssen die Vorzeichen von S_{1x}, S_{2x} und S_{3x} gleich sein.

Die einzige Lösung ist daher $S_{1x} = S_{2x} = S_{3x} = 0$.
$\Rightarrow$ $\underline{S}_1$, $\underline{S}_2$, $\underline{S}_3$ liegen in der yz-Ebene!

Es gilt :

$$\underline{S}_1 = S_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{pmatrix} \qquad \underline{S}_2 = S_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{pmatrix} \qquad \underline{S}_3 = S_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

Kräftegleichgewichte:

$$\sum F_y: \quad \sin(\phi) \cdot (S_1 + S_2 + S_3) - P = 0 \tag{2a}$$

$$\sum F_z: \quad \cos(\phi) \cdot (S_1 + S_2 + S_3) - G = 0 \tag{2b}$$

Momentengleichgewichte in A:

$$\sum M_x^A: \quad a \cdot \cos(\phi) \cdot S_2 + \frac{a}{2} \cos(\phi) \cdot S_3 - \frac{a}{2} G - \frac{a}{2} P = 0 \tag{3a}$$

$$\sum M_y^A: \quad a \cdot \cos(\phi) \cdot S_3 - \frac{a}{2} G = 0 \tag{3b}$$

$$\sum M_z^A: \quad -a \cdot \sin(\phi) \cdot S_3 + \frac{a}{2} P = 0 \tag{3c}$$

Aus (2a)/(2b) folgt: $\tan(\phi) = \frac{P}{G}$

$$\Rightarrow \quad \phi = \operatorname{atan}(\frac{P}{G})$$

Aus (3b) folgt: $S_3 = \frac{G}{2\cos(\phi)}$
Aus (3a) folgt: $S_2 = -\frac{S_3}{2} + \frac{G}{2\cos(\phi)} + \frac{P}{2\cos(\phi)} = \frac{G}{4\cos(\phi)} + \frac{P}{2\cos(\phi)}$
Aus (2b) folgt: $S_1 = \frac{G}{\cos(\phi)} - S_2 - S_3 = \frac{G}{4\cos(\phi)} - \frac{P}{2\cos(\phi)}$

Oder:

$$\underline{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{P}{4} - \frac{P^2}{2G} \\ \frac{G}{4} - \frac{P}{2} \end{pmatrix} \qquad \underline{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{P}{4} + \frac{P^2}{2G} \\ \frac{G}{4} + \frac{P}{2} \end{pmatrix} \qquad \underline{S}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{P}{2} \\ \frac{G}{2} \end{pmatrix}$$

b) Damit die Fäden straff bleiben muss gelten: S_1, S_2, $S_3 \geq 0$ Der kritische Faden ist hierbei S_1:

$$S_1 = \frac{G}{4\cos(\phi)} - \frac{P}{2\cos(\phi)} \geq 0$$
$$\Rightarrow \quad \frac{G}{4\cos(\phi)} \geq \frac{P}{2\cos(\phi)}$$

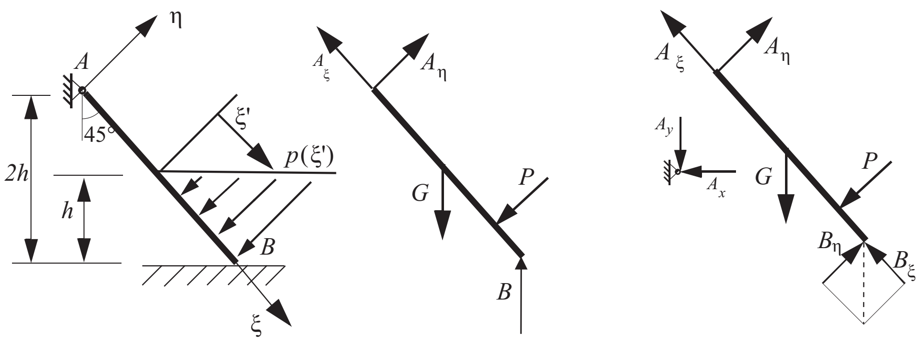
Da $\cos(\phi) \geq 0 \; \forall \, \phi \in [0, 90]$, gilt: $P \leq \frac{G}{2}$

Aufgabe 2

Gegeben:
Anordnung gemäss Skizze, Höhe h, Dichte ρ , Breite b, Gewicht G

Gesucht:
Lagerreaktionen in A und B

Lösung:



Reaktionskraft $\underline{B}$ im Punkt B wirkt senkrecht zur Oberfläche des Bodens (Auflage).
Druckverteilung:

$$p(\xi') = \rho g \, h(\xi') = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho g \xi'$$

Druckverteilung über die Breite auf eine Einzelkraft P reduzieren:

$$P = \int_0^{\sqrt{2}h} b p(\xi') d\xi' = \frac{\sqrt{2}}{2} b\rho g h^2$$

Der Kräftemittelpunkt ist $\frac{1}{3}\sqrt{2}h$ entfernt vom B.
Kräftegleichgewichte:

$$\sum F_\xi : \quad -A_\xi - B_\xi + \frac{\sqrt{2}}{2}G = 0$$
$$\sum F_\eta : \quad A_\eta - \frac{\sqrt{2}}{2}G + B_\eta - \frac{\sqrt{2}}{2}b\rho g h^2 = 0$$

Momentengleichgewicht in A:

$$\sum M_z^A : \quad -hG + 2\sqrt{2}B_\eta h - \sqrt{2}h(1 + \frac{2}{3})\frac{\sqrt{2}}{2}b\rho g h^2 = 0$$

Kraft $\underline{B}$ wirkt senkrecht zur Oberfläche des Bodens, Klappe steht 45° zur Oberfläche, daraus folgt: $B_\xi = B_\eta$

Aus Momentengleichgewicht und Kräftegleichgewichten folgt:

$$B_\xi = B_\eta = \frac{\sqrt{2}}{4}G + 5\frac{\sqrt{2}}{12}b\rho g h^2$$
$$A_\eta = \frac{\sqrt{2}}{4}G + \frac{\sqrt{2}}{12}b\rho g h^2$$
$$A_\xi = \frac{\sqrt{2}}{4}G - 5\frac{\sqrt{2}}{12}b\rho g h^2$$

Die Lagerkräfte in A können dann in das xyz-Koordinatensystem transformiert werden:

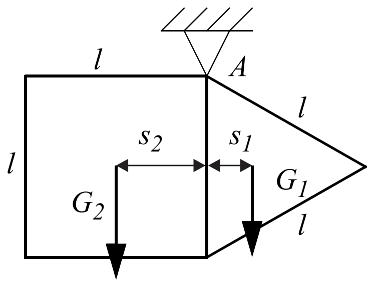
$$A_x = \frac{1}{2} b\rho g h^2 \qquad A_y = \frac{1}{2}G - \frac{1}{3} b\rho g h^2$$

$$B_x = 0 \qquad B_y = \frac{1}{2}G + \frac{5}{6} b\rho g h^2$$

Aufgabe 3

Gegeben:
Geometrie (l) und Lagerung, Gewicht G_1.

Gesucht: Gewicht G_2, das für das Gleichgewicht nötig ist.
Position des Schwerpunktes des Gesamtsystems für das oben berechnete G_2.
Lösung:



Horizontale Abstände zwischen Lager und Schwerpunkten von Dreieck bzw. Quadrat:

$$S_1 = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}L$$
$$S_2 = \frac{L}{2}$$

Momentengleichgewicht in A:

$$\sum M^A : \quad S_2 G_2 - S_1 G_1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad \frac{L}{2} G_2 = \frac{\sqrt{3}}{6} L G_1$$
$$\Rightarrow \quad G_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} G_1$$

Gleichgewicht bedeutet in diesem Fall, dass das im Schwerpunkt S angreifende Gesamtgewicht $G_1 + G_2$ kein Moment bezüglich dem Lagerpunkt A erzeugt. Dies ist nur erfüllt, wenn der Schwerpunkt kein horizontaler Abstand von dem Lagerpunkt hat: S muss sich auf der Vertikalen von A befinden.