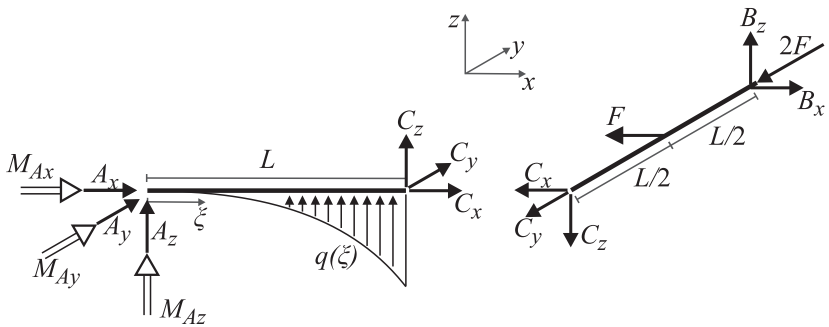
# Aufgabe 1

**Gegeben:**
Zwei masselose Stäbe, die gelenkig miteinander verbunden sind.
Kräfte $F_1$ und $F_2$ und Linienkraft $q$.

**Gesucht:** Reaktionskräfte in den Punkten $A$ und $B$.

**Lösung:**
Die Reaktionskräfte in den Punkten $A$ und $B$ ergeben insgesamt 8 unbekannte Variablen. Durch das Gleichgewicht am Gesamtsystem können aber maximal 6 Gleichungen bestimmt werden. Die Stäbe müssen deswegen in $C$ getrennt werden, damit zusätzliche Gleichungen formuliert werden können.




Kräftegleichgewichte für Stab 1:

$$\sum F_x: \quad A_x + C_x = 0 \tag{1a}$$

$$\sum F_y: \quad A_y + C_y = 0 \tag{1b}$$

$$\sum F_z: \quad A_z + \int_0^L F\frac{\xi^2}{L^3}d\xi + C_z = A_z + \frac{F}{3} + C_z = 0 \tag{1c}$$

Momentengleichgewichte für Stab 1 in $A$:

$$\sum M_x^A: \quad M_{Ax} = 0 \tag{2a}$$

$$\sum M_y^A: \quad M_{Ay} - \int_0^L F\frac{\xi^2}{L^3}\xi\, d\xi - LC_z = M_{Ay} - \frac{FL}{4} - LC_z = 0 \tag{2b}$$

$$\sum M_z^A: \quad M_{Az} + LC_y = 0 \tag{2c}$$

Kräftegleichgewichte für Stab 2:

$$\sum F_x: \quad -C_x - F + B_x = 0 \tag{3a}$$

$$\sum F_y: \quad -C_y - 2F = 0 \tag{3b}$$

$$\sum F_z: \quad -C_z + B_z = 0 \tag{3c}$$

Momentengleichgewichte für Stab 2 in $B$:

$$\sum M_x^B: \quad LC_z = 0 \tag{4a}$$

$$\sum M_y^B: \quad 0 = 0 \tag{4b}$$

$$\sum M_z^B: \quad -\frac{L}{2}F - LC_x = 0 \tag{4c}$$

Aus Gleichung 3b: $C_y = -2F$
Aus Gleichung 1b: $A_y = -C_y \quad \Rightarrow A_y = 2F$
Aus Gleichung 4a: $C_z = 0$
Aus Gleichung 3c: $B_z = C_z = 0$
Aus Gleichung 4c: $C_x = -\frac{F}{2}$
Aus Gleichung 3a: $B_x = C_x + F = \frac{F}{2}$
Aus Gleichung 1a: $A_x = -C_x \quad \Rightarrow A_x = \frac{F}{2}$
Aus Gleichung 1c: $A_z = -C_z - \frac{F}{3} = -\frac{F}{3}$
Aus Gleichung 2c: $M_{Az} = -C_y L = 2FL$
Aus Gleichung 2a: $M_{Ax} = 0$
Aus Gleichung 2b: $M_{Ay} = C_z L + \frac{FL}{4} = \frac{FL}{4}$

$$\underline{F}_A = \begin{pmatrix} \frac{F}{2} \\ 2F \\ -\frac{F}{3} \end{pmatrix} \qquad \underline{M}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{FL}{4} \\ 2FL \end{pmatrix} \qquad \underline{F}_B = \begin{pmatrix} \frac{F}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{F}_C = \begin{pmatrix} -\frac{F}{2} \\ -2F \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Aufgabe 2

**Gegeben:**
Kran, bestehend aus einem Hauptkörper und einem masselosen Ausleger. Gewichtskräfte für den Kran-Hauptkörper und die Kiste.

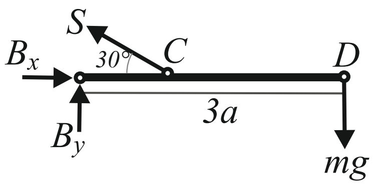
**Gesucht:**

a) Seilkraft $S$ des Seils $AC$

b) Maximale Masse $m$ der Kiste in Funktion von $M$, damit der Kran nicht kippt.

**Lösung:**

a) Schneide den Stab $BD$ frei:



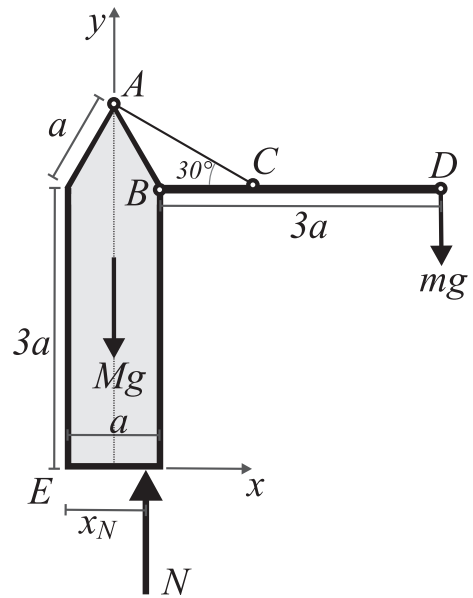

Berechnung des Abstands $|BC|$:

$$|BC| = \frac{a\cos(30°)}{\tan(30°)} - \frac{1}{2}a = (\frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}/3} - \frac{1}{2})a = (\frac{3}{2} - \frac{1}{2})a = a$$

Momentengleichgewicht in $B$:

$$\begin{aligned} \sum M_z^B : &\quad \sin(30°)S \cdot |BC| - 3a \cdot mg = 0 \\ \Rightarrow &\quad \frac{1}{2}S \cdot a = 3a \cdot mg \\ \Rightarrow &\quad S = 6mg \end{aligned}$$

b) Schneide den Kran vom Untergrund los und führe eine Normalkraft mit Betrag $N$ und Angriffspunkt $x_N$ ein.




Kräftegleichgewicht in $y$-Richtung am Gesamtsystem:

$$\sum F_y : \quad N - Mg - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = (m+M)g$$

Momentengleichgewicht am Gesamtsystem in $E$:

$$\sum M_z^E: \quad x_N N - \frac{a}{2}Mg - 4amg = 0$$
$$\Rightarrow \quad x_N = \frac{(\frac{1}{2}M + 4m)ag}{N} = \frac{(\frac{1}{2}M + 4m)ag}{(m+M)g}$$
$$\Rightarrow \quad x_N = \frac{(M+8m)}{2(m+M)}a$$

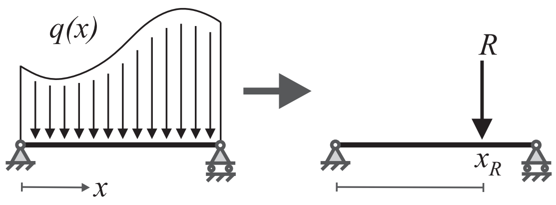
Standfestigkeitsbedingung: $0 \leq x_N \leq a$
Da $m, M, a, g > 0$ reduziert sich die Bedingung auf $x_N \leq a$:

$$\frac{(M+8m)}{2(m+M)}a \leq a$$
$$\Rightarrow \quad (M+8m) \leq 2(m+M)$$
$$\Rightarrow \quad m \leq \frac{1}{6}M$$

## Aufgabe 3

**Gegeben:**
Masseloser Stab mit Länge $L$, belastet durch die Linienlast $q(x)$.

**Gesucht:**
Zur Linienlast $q$ statisch äquivalente Kraft und dessen Angriffspunkt.




**Vorgehen:**
Äquivalente Kraft:

$$R = \int_0^L q(x)\,dx$$

Angriffspunkt:

$$x_R = \frac{1}{R}\int_0^L q(x)x\,dx$$

**Lösung:**

a) Fall 1: $q_1(x) = \frac{F}{L}$

$$R = F$$
$$x_R = \frac{L}{2}$$

b) Fall 2: $q_2(x) = F\left(\frac{1}{L} - \frac{x}{L^2}\right)$

$$R = \frac{F}{2}$$
$$x_R = \frac{L}{3}$$

c) Fall 3: $q_3(x) = F\left(\frac{1}{L} - \frac{3x^2}{L^3} + \frac{3x^3}{L^4}\right)$

$$R = \frac{3F}{4}$$
$$x_R = \frac{7L}{15}$$