Lösung Schnellübung 10

Aufgabe 1

Gegeben:
Ideales Fachwerk gemäss Skizze, bestehend aus Stäben der Länge a.
Kräfte mit Betrag P in D und E.

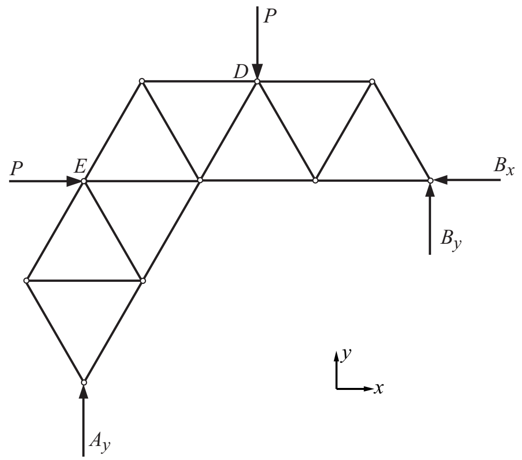
Gesucht:

a) Reaktionskräfte in den Punkten A und B.

b) Stabkräfte S_1 und S_2.

Lösung:

a) Schneide das Fachwerk frei und führe die Lagerreaktionen in A und B ein:



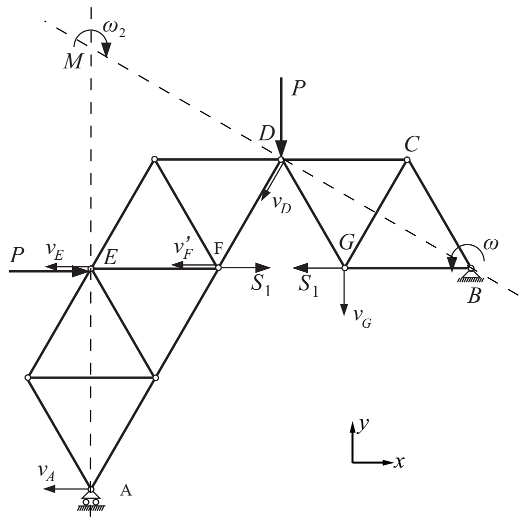
Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum M_z^B: \quad \frac{3}{2}aP - 3aA_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = \frac{1}{2}P$$

$$\sum F_x: \quad -B_x + P = 0 \quad \Rightarrow \quad B_x = P$$

$$\sum F_y: \quad A_y + B_y - P = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = P - A_y = \frac{1}{2}P$$

b) **Stab 1**
Stab entfernen und Stabkraft S_1 einführen:



Virtuelle Geschwindigkeit oder Winkelgeschwindigkeit einführen (ω in B). Das System hat insgesamt zwei Körper. Körper $BCDG$ rotiert um B mit der Winkelgeschwindigkeit ω .
Die Geschwindigkeit in D ist: $v_D = \sqrt{3}a\omega$ (senkrecht zu BD).
In A hat die Geschwindigkeit nur eine horizontale Komponente. In D haben wir die Geschwindigkeit schon bestimmt, also ist das Momentanzentrum M des zweiten Körpers im Schnittpunkt von AE und BD.
Die Rotationsschnelligkeit ω_2 in M ist:

$$\omega_2 = \frac{v_D}{|DM|} = \omega$$

Damit haben die Geschwindigkeiten in E und F folgende Beträge:

$$v_E = \sqrt{3}a\omega \qquad v_F' = v_E = \sqrt{3}a\omega$$

Die Gesamtleistung ist:

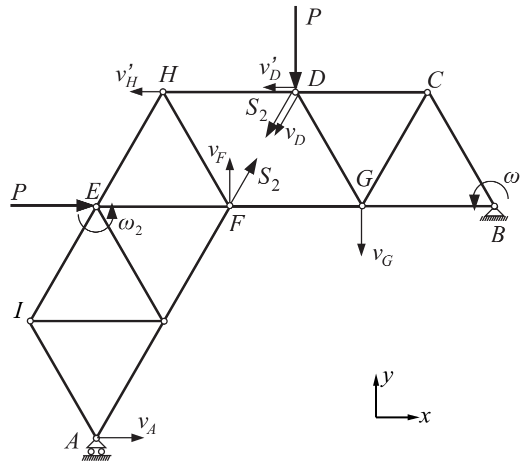
$$\sum P_i: \quad -Pv_E + Pv_D\cos(30°) - S_1 v'_F - +S_1 v_G\cos(90°) = 0$$

$$\Rightarrow \quad -P\sqrt{3}a\omega + P\sqrt{3}a\omega\frac{\sqrt{3}}{2} - S_1\sqrt{3}a\omega = 0$$

Diese Gleichung nach S_1 auflösen ergibt dann die Stabkraft:

$$S_1 = -P + P\frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)P$$

Stab 2
Stab entfernen und Stabkraft S_2 einführen:



Virtuelle Geschwindigkeit oder Winkelgeschwindigkeit einführen (ω in B). Das System hat insgesamt vier Körper. Körper $BCDG$ rotiert um B mit der Winkelgeschwindigkeit ω .
Die Geschwindigkeit in D ist: $v_D = \sqrt{3}a\omega$ (senkrecht zu BD).
In A hat die Geschwindigkeit nur eine horizontale Komponente. In F ist die Geschwindigkeit senkrecht zu FG, da aufgrund des SdpG die Projektion von v_F auf FG gleich der Projektion von v_G auf FG sein muss. Das Momentanzentrum des Körpers $AFHI$ ist im Schnittpunkt von FG und AE (in E).
Die horizontale Komponente v'_D der Geschwindigkeit in D ist:

$$v'_D = \frac{\sqrt{3}}{2}a\omega$$

Die horizontale Komponente der Geschwindigkeit in H ist (mit dem Satz der projizierten Geschwindigkeiten):

$$v'_H = v'_D = \frac{\sqrt{3}}{2}a\omega$$

Die Rotationsschnelligkeit in E ist: $\omega_2 = \frac{v'_H}{\sqrt{3}/2a} = \omega$
also hat die Geschwindigkeit in F den Betrag: $v_F = a\omega$
Die Gesamtleistung ist:

$$\sum P_i: \quad Pv_E + Pv_D\cos(30°) + v_F S_2\cos(30°) + v_D S_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad P\sqrt{3}a\omega\frac{\sqrt{3}}{2} + S_2\left(a\omega\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}a\omega\right) = 0$$

Diese Gleichung nach S_1 auflösen ergibt dann die Stabkraft:

$$S_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}P$$

Aufgabe 2

Gegeben:
Ideales ebenes Fachwerk, belastet durch 2 Kräfte mit Betrag F.

Gesucht:
Stabkraft S_3 (gemäss Konvention als Zugkraft eingeführt)

Lösung:
Knotengleichgewicht in y-Richtung am Knoten zwischen Stab 1, 3 und 4:

$$\sum F_y: \quad F + S_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_3 = -F$$

Aufgabe 3

Gegeben:
System gemäss Skizze, Länge L, linienverteilte Last q mit Gesamtbetrag P

Gesucht:

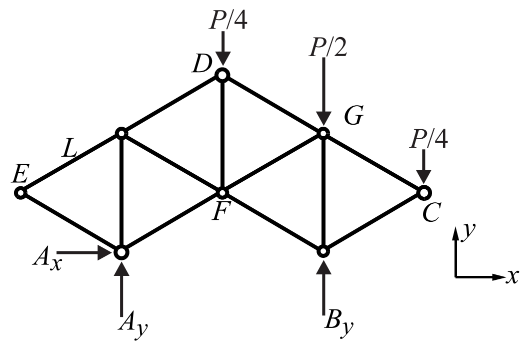
a) Lagerreaktionen in A und B

b) Stabkraft DF mit Hilfe des PdvL.

Lösung

a) Aus der Linienlast resultierende Kräfte:
Auf den Stäben DG und GC Linienlast $q_{DG} = q_{GC} = q = {}^{P}/_{(2L)}$. Da diese Linienlast konstant ist, kann sie für jeden Stab gleichmässig auf beide Knoten in Form von Punktlasten verteilt werden.

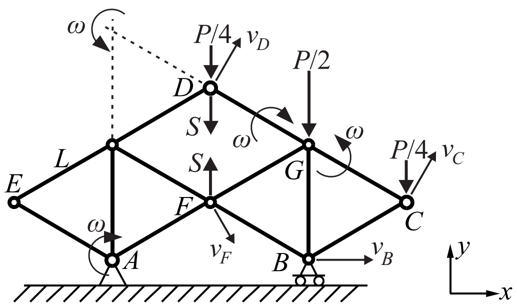
$$F_D = \frac{1}{2}Lq_{DG} = \frac{P}{4}$$
$$F_G = \frac{1}{2}Lq_{DG} + \frac{1}{2}Lq_{GC} = \frac{P}{2}$$
$$F_C = \frac{1}{2}Lq_{GC} = \frac{P}{4}$$



Gleichgewichtsbedingungen am Gesamtsystem:

$$\sum M_z^B: \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}L\frac{P}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}L\frac{P}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}2LA_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = 0$$
$$\sum F_x: \quad A_x = 0$$
$$\sum F_y: \quad A_y + B_y - P = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y = P$$

b) Stab DF entfernen und eine virtuelle Rotationsschnelligkeit in A einführen.



$$v_F = \omega L$$

Da $\underline{v}_B$ nur eine horizontale Komponente haben kann, befindet sich das Momenantzentrum des Körpers $FBCG$ auf dem Schnittpunkt der Linien AF und BG, also in G (deshalb gilt $v_G = 0$). Dessen Rotationschnelligkeit kann folgendermassen berechnet werden:

$$\omega_{FBCG} = \frac{v_F}{|FG|} = \omega$$

Damit kann die Schnelligkeit in C berechnet werden.

$$v_C = \omega L$$

Für die Berechnung von v_D ist die Rotationschnelligkeit des Stabes DG nötig, welche durch die Parallelogramm-Regel bestimmt werden kann: $\omega_{DG} = \omega$.

$$v_D = \omega L$$

Durch die virtuelle Leistung kann dann die Stabkraft S berechnet werden.

$$\begin{aligned}
\sum P_i: \quad & -\frac{\sqrt{3}}{2} v_D \left(\frac{P}{4} + S\right) + v_G \frac{P}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} v_C \frac{P}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} v_F S = 0 \\
& -\frac{\sqrt{3}}{2} \omega L \left(\frac{P}{4} + S\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \omega L \frac{P}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \omega L S = 0 \\
& \Rightarrow \quad S = \frac{1}{2}\left(-2\frac{P}{4}\right) = -\frac{P}{4}
\end{aligned}$$