Aufgabe 1

Gegeben:
System gemäss Skizze
Würfel mit Kantenlänge $2a$, Gewicht G
Zylinder mit Radius a
Haftreibungskoeffizient $\mu_0 = \sqrt{3}/9$ zwischen Ebene Würfel
Gleitreibungszahl $\mu_1 < 1$ zwischen Würfel und Zylinder

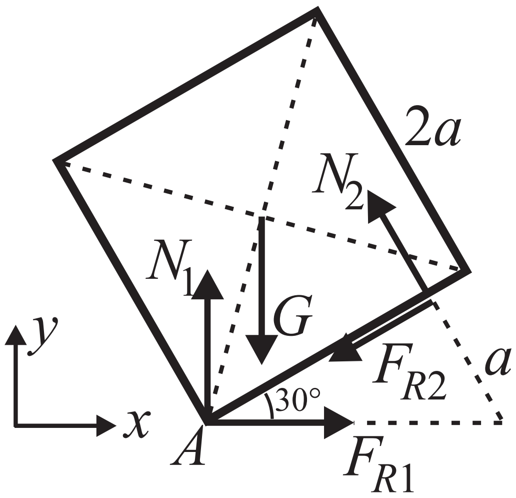
Gesucht:

a) Reaktionskräfte am Würfel bei Ruhe.

b) Höchster Wert für μ_1 , damit System in Ruhe bleibt.

Lösung:

a) Schneide den Würfel frei und führe die Reaktionskräfte ein:



Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum F_x : \quad F_{R1} - \frac{\sqrt{3}}{2}F_{R2} - \frac{1}{2}N_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{R1} = \frac{\sqrt{3}}{2}F_{R2} + \frac{1}{2}N_2$$

$$\sum F_y : \quad N_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}N_2 - \frac{1}{2}F_{R2} - G = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}N_2 + \frac{1}{2}F_{R2} + G$$

$$\sum M_z^A : \quad -(\frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{2}a)G + \sqrt{3}aN_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{6}G$$

Gleitreibung: $F_{R2} = \mu_1 N_2 = \mu_1 \frac{3-\sqrt{3}}{6} G$

$$F_{R1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mu_1 + \frac{1}{2}\right)N_2 = \frac{(\sqrt{3}\mu_1 + 1)(3-\sqrt{3})}{12}G$$

$$N_1 = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mu_1\right)N_2 + G = \left(\frac{(\mu_1 - \sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{12} + 1\right)G$$

b) Bedingung für Ruhe: $|F_{R1}| < \mu_0 |N_1|$

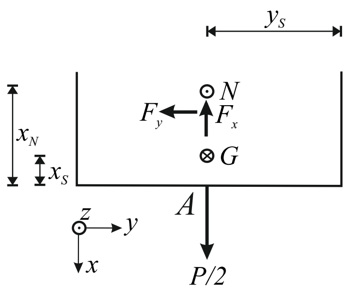
$$\begin{aligned}
\frac{(\sqrt{3}\mu_1+1)(3-\sqrt{3})}{12}G &< \mu_0\left(\frac{(\mu_1-\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{12}+1\right)G\\
(\sqrt{3}\mu_1+1)(3-\sqrt{3}) &< \mu_0\Big((\mu_1-\sqrt{3})(3-\sqrt{3})+12\Big)\\
6(\sqrt{3}\mu_1+1) &< \mu_0\Big(6(\mu_1-\sqrt{3})+12(3+\sqrt{3})\Big)\\
6(\sqrt{3}\mu_1+1) &< \frac{\sqrt{3}}{9}\Big(6\mu_1-6\sqrt{3}+36+12\sqrt{3}\Big)\\
9\sqrt{3}\mu_1+9 &< \sqrt{3}\mu_1+3+6\sqrt{3}\\
(9\sqrt{3}-\sqrt{3})\mu_1 &< 3+6\sqrt{3}-9\\
\mu_1 &< \frac{-6+6\sqrt{3}}{8\sqrt{3}}\\
\mu_1 &< \frac{3-\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}$$

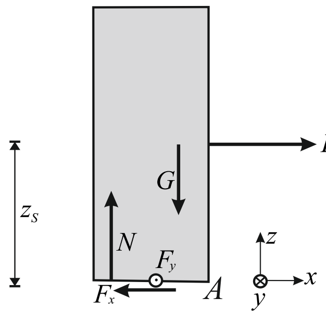
Aufgabe 2

Gegeben:
System gemäss Skizze
$\mu_0 = 0.15$ und Kraft $\frac{P}{2}\underline{e}_x$

Gesucht:
Intervall von P für welches das System rutscht aber nicht kippt.

Lösung:
Trenne System und führe die Reibkräfte F_x und F_y und die Normalkraft N ein.





Schwerpunkt des Gesamtsystems:

$$\begin{aligned}
x_S &= \frac{2\cdot\frac{a}{2}\cdot a + 0\cdot 2a}{a+2a+a} = \frac{1}{4}a\\
y_S &= a\\
z_S &= 4a
\end{aligned}$$

Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum F_x: \quad \frac{P}{2} - F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_x = \frac{P}{2}$$
$$\sum F_y: \quad F_y = 0$$
$$\sum F_z: \quad N - G = 0 \quad \Rightarrow \quad N = G$$

$$\sum M_y^A: \quad x_N N - x_S G + \frac{P}{2}4a = 0$$
$$\Rightarrow \quad x_N = \frac{1}{G}\left(\frac{1}{4}aG - \frac{P}{2}4a\right) = \left(\frac{1}{4} - 2\frac{P}{G}\right)a$$

Bedingung gegen Kippen: $0 \leq x_N \leq a$
Fall 1: $x_N \geq 0$

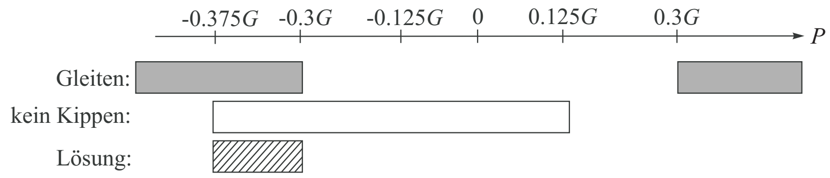
$$\left(\frac{1}{4} - 2\frac{P}{G}\right)a \geq 0$$
$$P \leq \frac{1}{8}G$$

Fall 2: $x_N \leq a$

$$\left(\frac{1}{4} - 2\frac{P}{G}\right)a \leq a$$
$$P \geq -\frac{3}{8}G = -0.375G$$

Bedingung gegen Gleiten: $|F_x| < \mu_0 N$

$$\left|\frac{P}{2}\right| < 0.15N$$
$$|P| < 0.3G$$



Der Körper setzt sich in Bewegung bei $-0.375G < P < -0.3G$

Aufgabe 3

Gegeben:
System gemäss Skizze, Stab mit länge $2l$ und Gewicht $G = m \cdot g$

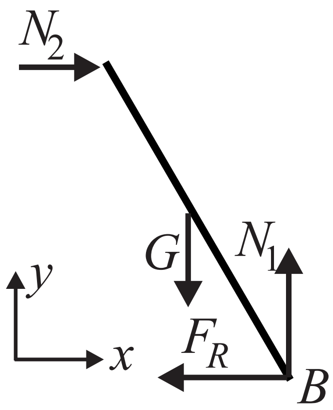
Gesucht:

a) Reibungskraft F_R

b) Systemruhe überprüfen.

Lösung

a) Gleichgewichtsbedingungen:



$$\sum M_z^B: \quad \frac{1}{2}lG - \frac{\sqrt{3}}{2}2lN_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_2 = \frac{G}{2\sqrt{3}}$$
$$\sum F_x: \quad N_2 - F_R = 0 \quad \Rightarrow \quad F_R = N_2 = \frac{G}{2\sqrt{3}}$$
$$\sum F_y: \quad N_1 - G = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = G$$

b) Bedingung für Systemruhe: $|F_R| < \mu_0 |N_1|$ (kein Gleiten)

$$\frac{G}{2\sqrt{3}} < \mu_0 G$$
$$\frac{G}{2\sqrt{3}} < \frac{G}{\sqrt{3}}$$

Bedingung ist immer gültig $\Rightarrow$ das System ist in Ruhe!