Lösung Schnellübung 13

Aufgabe 1

Gegeben:
Belastungen und Geometrie

Gesucht:
Querkraft- und Biegemomentverlauf

Lösung:
Differenzialbeziehungen und Randbedingungen $\Rightarrow \quad Q_y, M_Z$

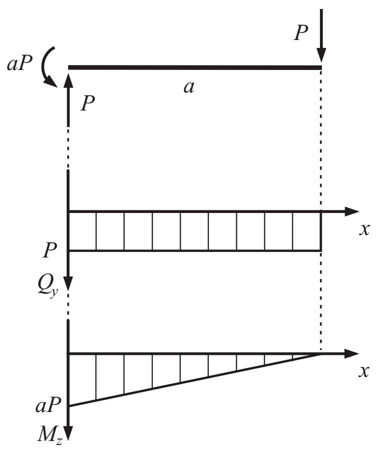
1) Einspannung - Frei, Einzelkraft:

   Differentialbeziehungen:

$$q_y(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_y(x) = C_1 \quad \Rightarrow \quad M_z(x) = -C_1 x + C_2 \qquad (1)$$

   Randbedingungen:

$$Q_y(a) = P \quad \Rightarrow \quad C_1 = P$$
$$M_z(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = aP$$



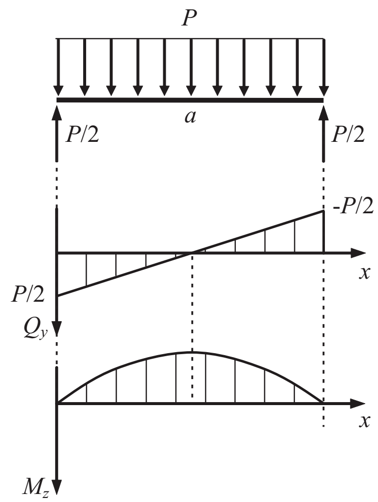
2) Auflager - Gelenk, verteilte Kraft:

   Differentialbeziehungen:

$$q_y(x) = \frac{P}{a} \quad \Rightarrow \quad Q_y(x) = -\frac{P}{a}x + C_1 \quad \Rightarrow \quad M_z(x) = \frac{P}{2a}x^2 - C_1 x + C_2$$

   Randbedingungen:

$$Q_y(0) = \frac{P}{2} \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{P}{2}$$
$$M_z(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$



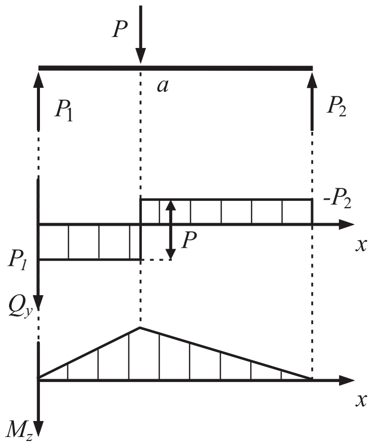
3) Auflager - Gelenk, Einzelkraft:

   Differentialbeziehungen:

$$q_{y1}(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{y1}(x) = C_1 \quad \Rightarrow \quad M_{z1}(x) = -C_1 x + C_2$$
$$q_{y2}(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{y2}(x) = D_1 \quad \Rightarrow \quad M_{z2}(x) = -D_1 x + D_2$$

Randbedingungen:

$$\begin{aligned}
Q_{y1}(0) = P_1 \quad &\Rightarrow \quad C_1 = P_1 \\
M_{z1}(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad C_2 = 0 \\
Q_{y2}(a) = -P_2 \quad &\Rightarrow \quad D_1 = -P_2 \\
M_{z2}(a) = 0 \quad &\Rightarrow \quad D_2 = -P_2 a
\end{aligned}$$



Aufgabe 2

Gegeben:
System gemäss Skizze
Kraft F

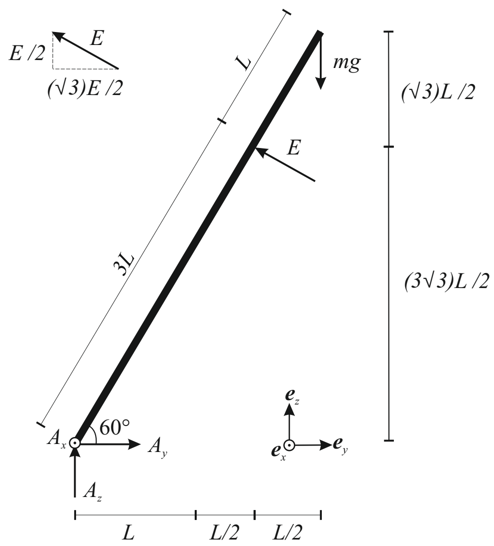
Gesucht:

a) Systemtrennung und Einführung von Reaktionskräften.
b) Lagerreaktionen in B.
c) Beanspruchung in BC und GF.

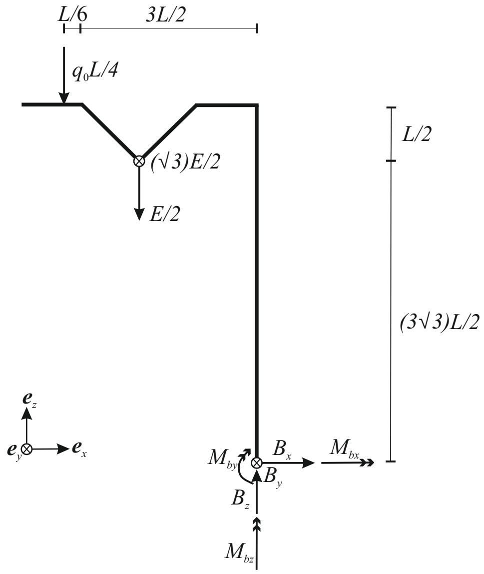
Lösung:

a) Da die Angelrute im Punkt E reibungsfrei auflegt ist, hat man nur eine unbekannte Kraft E senkrecht zur Angelrute (in der yz Ebene). Aus Darstellungsgründen wurde die Kraft E in eine y- und z-Komponente aufgeteilt.

Angelrute:



Geländer:



Aufgabenteil b)

Angelrute:

$$\sum F_x: \quad A_x = 0$$

$$\sum F_y: \quad A_y - \frac{\sqrt{3}}{2}E = 0 \quad \Longrightarrow \quad A_y = \frac{\sqrt{3}}{2}E$$

$$\sum F_z: \quad A_z + \frac{E}{2} - mg = 0 \quad \Longrightarrow \quad A_z = mg - \frac{E}{2}$$

$$\sum M_x^A: \quad E \cdot 3L - mg \cdot 2L = 0$$

$$\sum M_y^A: \quad 0 = 0$$

$$\sum M_z^A: \quad 0 = 0$$

Daraus folgt:

$$E = \frac{2}{3}mg \quad A_x = 0 \quad A_y = \frac{\sqrt{3}}{3}mg \quad A_z = \frac{2}{3}mg$$

Geländer:

$$\sum F_x: \quad B_x = 0$$

$$\sum F_y: \quad B_y + \frac{\sqrt{3}}{2}E = 0 \quad \Longrightarrow \quad B_y = -\frac{\sqrt{3}}{3}mg$$

$$\sum F_z: \quad B_z - \frac{q_0 L}{4} - \frac{E}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad B_z = \frac{q_0 L}{4} + \frac{mg}{3}$$

$$\sum M_x^B: \quad M_{bx} - \frac{\sqrt{3}}{2}E \cdot \frac{3\sqrt{3}L}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad M_{bx} = \frac{3}{2}mgL$$

$$\sum M_y^B: \quad M_{by} - \frac{q_0 L}{4} \cdot \frac{10L}{6} - \frac{E}{2} \cdot L = 0 \quad \Longrightarrow \quad M_{by} = \frac{5}{12}q_0 L^2 + \frac{mgL}{3}$$

$$\sum M_z^B: \quad M_{bz} - \frac{\sqrt{3}}{2}E \cdot L = 0 \quad \Longrightarrow \quad M_{bz} = \frac{\sqrt{3}}{3}mgL$$

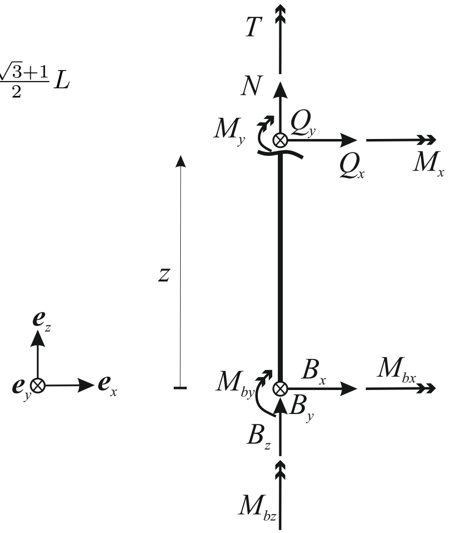
Daraus folgt:

$$B_x = 0 \quad B_y = -\frac{\sqrt{3}}{3}mg \quad B_z = \frac{q_0 L}{4} + \frac{mg}{3}$$

$$M_{bx} = \frac{3}{2}mgL \quad M_{by} = \frac{5}{12}q_0 L^2 + \frac{mgL}{3} \quad M_{bz} = \frac{\sqrt{3}}{3}mgL$$

Aufgabenteil c)

Stabteil BC:
Für $0 \leq z \leq \frac{3\sqrt{3}+1}{2}L$



$$\sum F_x : \quad Q_x + B_x = 0 \quad \Longrightarrow \quad Q_x = 0$$

$$\sum F_y : \quad Q_y + B_y = 0 \quad \Longrightarrow \quad Q_y = \frac{\sqrt{3}}{3}mg$$

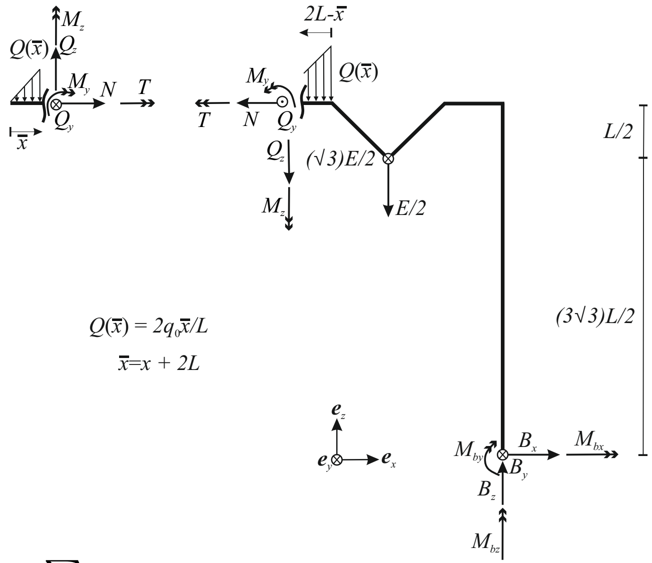
$$\sum F_z : \quad N + B_z = 0 \quad \Longrightarrow \quad N = -\frac{q_0 L}{4} - \frac{mg}{3}$$

$$\sum M_x^N : \quad M_x + M_{bx} + B_y \cdot z = 0 \quad \Longrightarrow \quad M_x = -\frac{3}{2}mgL + \frac{\sqrt{3}}{3}mgz$$

$$\sum M_y^N : \quad M_y + M_{by} - B_x \cdot z = 0 \quad \Longrightarrow \quad M_y = -\frac{5}{12}q_0 L^2 - \frac{mgL}{3}$$

$$\sum M_z^N : \quad T + M_{bz} = 0 \quad \Longrightarrow \quad T = -\frac{\sqrt{3}}{3}mgL$$

Stabteil FG:
Für $-2L \leq x \leq -\frac{3L}{2}$ oder für $0 \leq \bar{x} \leq \frac{L}{2}$ mit $\bar{x} = x + 2L$



$$\sum F_x : \quad N = 0$$

$$\sum F_y : \quad Q_y = 0$$

$$\sum F_z : \quad Q_z - \int_0^{\bar{x}} \frac{2q_0 x}{L} dx = 0 \quad \Longrightarrow \quad Q_z = \frac{q_0 \bar{x}^2}{L}$$

$$\sum M_x^N : \quad T = 0$$

$$\sum M_y^N : \quad M_y - \int_0^{\bar{x}} \frac{2q_0 x}{L} \cdot (\bar{x} - x)\, dx = 0$$

$$M_y = \left[\frac{2q_0 x^2 \bar{x}}{2L} - \frac{2q_0 x^3}{3L} \right]_0^{\bar{x}} = (1 - \frac{2}{3})\frac{q_0 \bar{x}^3}{L} = \frac{q_0 \bar{x}^3}{3L}$$

$$\sum M_z^N : \quad M_z = 0$$