Mechanik I: Kinematik & Statik

Theorieskript zu den Schnellübungen

Jack Kendall

kendallj@student.ethz.ch

Basiert auf der Vorlesung von Prof. E. Mazza

ETH Zürich

16.12.17

Inhalt

1 Kreuz- & Vektorprodukt

Kreuzprodukt mit Satz von Sarrus

$$\underline{V}_A \times \underline{V}_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Vektorprodukt

$$\underline{V}_A \cdot \underline{V}_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \tag{2}$$

2 Ableitungsregeln

Summenregel: $$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Kettenregel: $$f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$$

Produktregel: $$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Quotientenregel: $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

3 Geschwindigkeit und Schelligkeit

Die Geschwindigkeit $\underline{\mathbf{v}}$ ist die zeitliche Ableitung des Orstvektors $\underline{\mathbf{r}}$.

$$\underline{v} = \dot{\underline{r}} = \frac{d\underline{r}}{dt} \tag{3}$$

Die Schnelligkeit $\dot{\mathbf{s}}$ ist die zeitliche Ableitung der Bogenlänge $\mathbf{s}$.

$$|\dot{s}| = |\underline{v}| = |\frac{ds}{dt}| \tag{4}$$

3.1 Kartesische Koordinaten

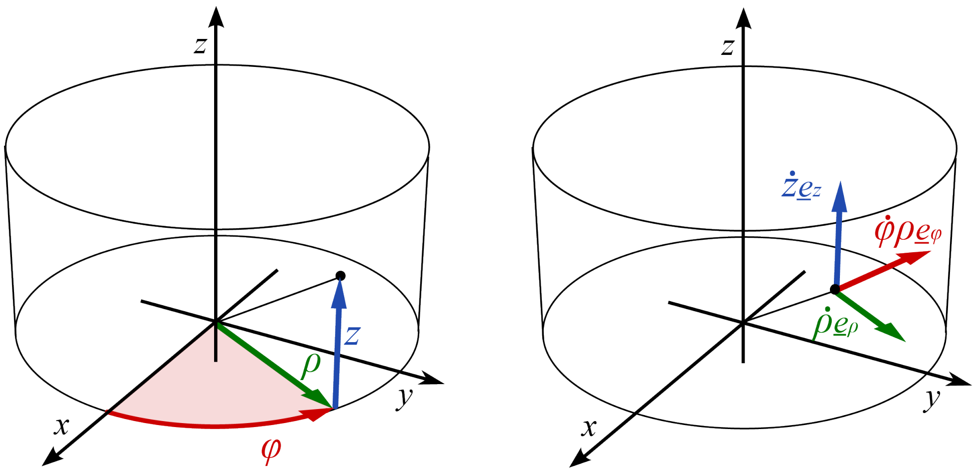
Der Ortsvektor $\underline{\mathbf{r}}\mathbf{(t)}$ im kartesischen Koordinatensystem

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x(t)\underline{e}_x + y(t)\underline{e}_y + z(t)\underline{e}_z$$

besitzt eine zeitliche Ableitung $\dot{\underline{\mathbf{r}}}\mathbf{(t)}$ und somit eine Geschwindigkeit $\underline{\mathbf{v}}\mathbf{(t)}$

$$\dot{\underline{r}}(t) = \underline{v}(t) = \dot{x}(t)\underline{e}_x + \dot{y}(t)\underline{e}_y + \dot{z}(t)\underline{e}_z \tag{5}$$

3.2 Zylindrische Koordinaten



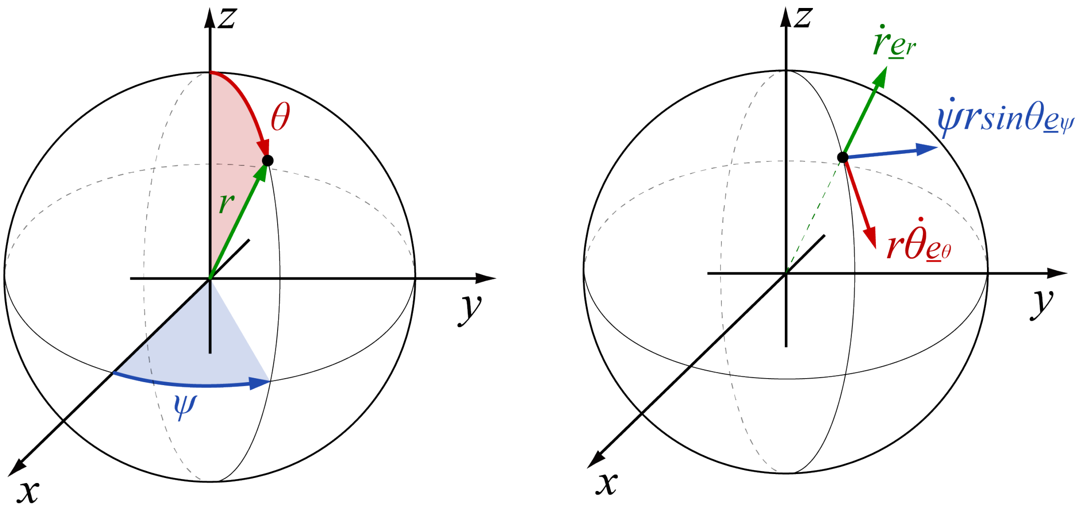
Der Ortsvektor $\underline{\mathbf{r}}\mathbf{(t)}$ im zylindrischen Koordinatensystem

$$\underline{r}(t) = \rho(t)\underline{e}_\rho + z(t)\underline{e}_z$$

die Richtung von $\underline{\mathbf{e}}_\rho(\varphi(t))$ ist von der Lage abhängig. Der Winkel φ steht implizit in der Richtung von $\underline{\mathbf{e}}_\rho$. Die Komponenten der Geschwindigkeit $\underline{\mathbf{v}}\mathbf{(t)}$ sind

$$\dot{\underline{r}} = \underline{v} = \dot{\rho}\underline{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\underline{e}_\varphi + \dot{z}\underline{e}_z \tag{6}$$

3.3 Sphärische Koordinaten



Der Ortsvektor $\underline{\mathbf{r}}\mathbf{(t)}$ im kartesischen Koordinatensystem

$$\underline{r}(t) = r(t)\underline{e}_r(t)$$

die Richtung von $\underline{\mathbf{e}}_r(\theta(t), \psi(t))$ ist von der Lage abhängig. Die Winkel θ und ψ stehen implizit in der Richtung von $\underline{\mathbf{e}}_r$. Die Komponenten der Geschwindigkeit $\underline{\mathbf{v}}\mathbf{(t)}$ sind

$$\dot{\underline{r}} = \underline{v} = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\theta}\underline{e}_\theta + r\dot{\psi}\sin\theta\underline{e}_\psi \tag{7}$$

3.4 Transformationen

Koordinaten	kartesisch	zylindrisch	sphärisch
kartesisch	$v = \begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}$	$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ $\varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ $z = z$	$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$ $\psi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$
zylindrisch	$x = \rho\cos\varphi$ $y = \rho\sin\varphi$ $z = z$	$v = \begin{pmatrix}\dot{\rho}\\ \rho\dot{\varphi}\\ \dot{z}\end{pmatrix}$	$r = \sqrt{\rho^2+z^2}$ $\theta = \tan^{-1}\frac{\rho}{z}$ $\psi = \varphi$
sphärisch	$x = r\sin\theta\cos\psi$ $y = r\sin\theta\sin\psi$ $z = r\cos\theta$	$\rho = r\sin\theta$ $\varphi = \psi$ $z = r\cos\theta$	$v = \begin{pmatrix}\dot{r}\\ r\dot{\theta}\\ r\sin\theta\ \dot{\psi}\end{pmatrix}$

Herleitungen / Beweise aus der Vorlesung sind *Prüfungsrelevant* - schreib sie also auf die Formelsammlung!

4 Trigonometrie

α	0 / 0°	$\frac{\pi}{6}$ / 30°	$\frac{\pi}{4}$ / 45°	$\frac{\pi}{3}$ / 60°	$\frac{\pi}{2}$ / 90°	π / 180°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0
$\cot\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞

4.1 Identitäten

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

5 Kinematik starrer Körper

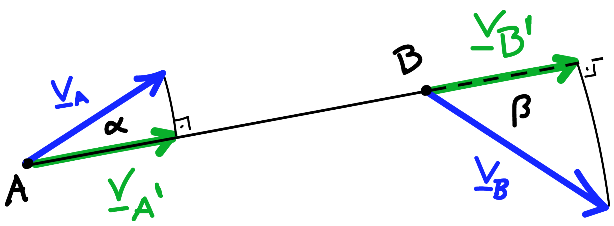
5.1 Satz der projizierten Geschwindigkeiten

Die Geschwindigkeiten $\underline{v}_A, \underline{v}_B$ zweier beliebiger Punkte A und B eines starren Körpers K weisen zu allen Zeiten gleiche Projektionen $\underline{v}'_A = \underline{v}'_B$ in Richtung ihrer Verbindungsgeraden $\underline{AB}$ auf:

$$\underline{v}'_A = \underline{v}'_B$$

$$\underline{v}_A \cdot \underline{AB} = \underline{v}_B \cdot \underline{AB}$$

$$|\underline{v}_A| \cos\alpha = |\underline{v}_B| \cos\beta$$

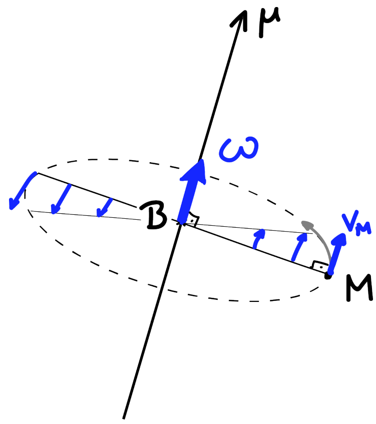


5.2 Translation

Alle Punkte A, B des starren Körpers K haben dieselbe Geschwindigkeit:

$$\underline{v}_A = \underline{v}_B, \quad \underline{\omega} = \underline{0} \tag{8}$$

5.3 Rotation



Definition . Bleiben bei der Bewegung eines starren Körpers K bezüglich dem Ursprung zwei Punkte $A, B \in K$ für alle Zeiten $t \in [t_1, t_2]$ fest, so heisst die Bewegung Rotation.

Auf der Rotationsachse $\mu = \underline{AB}$ beträgt $v = 0$. Die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes M des starren Körpers lautet:

$$\underline{v}_M = \underline{\omega} \times \underline{AM} = \underline{\omega} \times \underline{BM} \tag{9}$$

wobei $\underline{\omega}$ die Rotationsgeschwindigkeit ist:

$$\underline{\omega} = \omega \underline{e}_\mu = \omega \frac{\underline{AB}}{|\underline{AB}|} \tag{10}$$

und A und B beliebige Punkte auf der Rotationsachse μ sind.

5.4 Kreiselung

Ein Punkt B des starren Körpers bleibt für alle Zeiten fest. Die Bewegung entspricht einer **momentanen Rotation** um eine momentane Rotationsachse μ, wobei $\underline{e}_\mu$ seine Richtung mit der Zeit verändern kann.

6 Allgemeine Bewegung des starren Körpers

Die Kinemate beschreibt den Bewegungszustand des starren Körpers

$$\{\underline{v}_A, \underline{\omega}\} \tag{11}$$

Die zwei Invarianten des Bewegungszustandes sind im ganzen Körper konstant

$$\{\underline{v}_\omega, \underline{\omega}\} \tag{12}$$

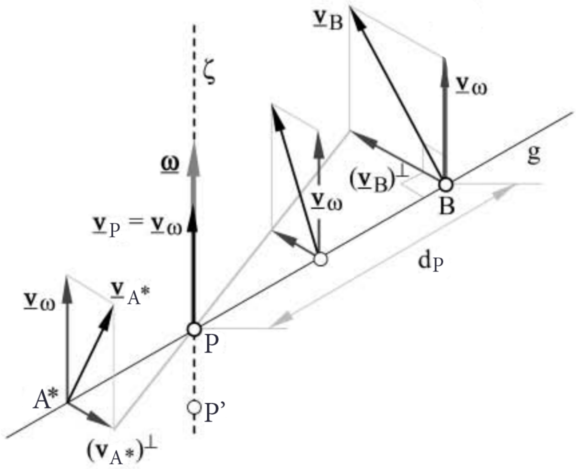
wobei $\underline{\omega}$ die Rotationsgeschwindigkeit und $\underline{v}_\omega$ die Geschwindigkeit der Zentralachse ζ angibt

$$\underline{v}_\omega = \underbrace{(\underline{e}_\zeta \cdot \underline{v}_A)}_{\text{Projektion auf } \zeta} \underline{e}_\zeta \qquad \underline{e}_\zeta = \frac{\underline{\omega}}{|\underline{\omega}|} \tag{13}$$

6.1 Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes (ABBA)

$$\underline{v}_A = \underline{v}_B + \underline{\omega} \times \underline{BA} = \begin{pmatrix} v_{bx} \\ v_{by} \\ v_{bz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix} \tag{14}$$

6.2 Zentralachse



Auf der Zentralachse ζ befinden sich alle Punkte $P(x, y, z)$ mit Geschwindigkeit $\underline{v}_\omega$. Der starre Körper rotiert mit Geschwindigkeit $\underline{\omega}$ um diese Achse.

$$\underline{v}_P = \underline{v}_\omega = \underline{v}_B + \underline{\omega} \times \underline{BP} = \begin{pmatrix} v_{bx} \\ v_{by} \\ v_{bz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x - b_x \\ y - b_y \\ z - b_z \end{pmatrix} \tag{15}$$

Parameter Form der Zentralachse ζ, wobei λ eine Variable ist:

$$\underline{\zeta} = r(\lambda) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \tag{16}$$

Kochrezept - Zentralachse

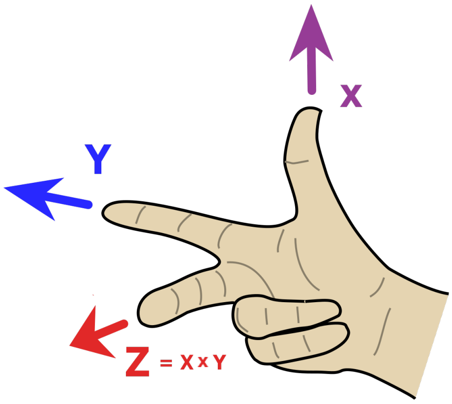
1. Beliebiger Punkt $P(x, y, z) \in \zeta$
2. $\underline{v}_\omega$ mit Gleichung (13) bestimmen
3. Nach $P(x, y, z)$ mit allg. Bewegungsgleichung (15) lösen

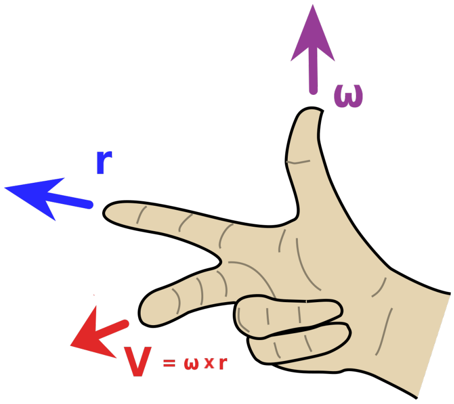
   $\rightarrow$ eine Variabel beliebig einen Wert $\in \mathbb{R}$ setzen
4. $\underline{\zeta} = P(x, y, z) + \lambda\underline{\omega}$

6.3 Spezialfälle

- $\underline{\omega} \neq 0, \quad \underline{v}_\omega \neq 0 \quad \rightarrow$ Schraubung / allg. Bewegungszustand
- $\underline{\omega} \neq 0, \quad \underline{v}_\omega = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{v}_A \cdot \underline{\omega} = 0 \quad \rightarrow$ reine Rotation!
- $\underline{\omega} = 0, \quad \underline{v}_\omega \neq 0 \quad \rightarrow$ Translation!
- $\underline{\omega} = 0, \quad \underline{v}_\omega = 0 \quad \rightarrow$ Ruhe!

7 Rechte Hand Regel



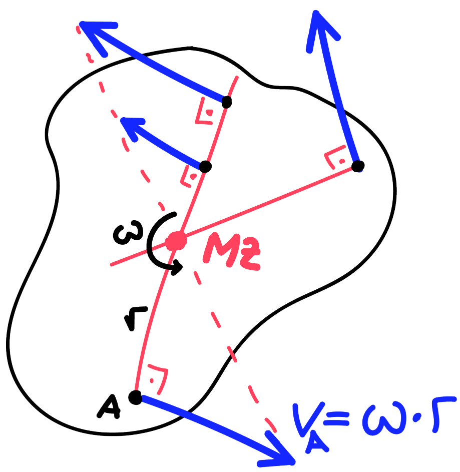


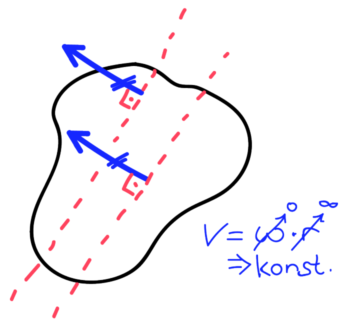
8 Ebene Bewegung

8.1 Momentanzentrum

Die Bewegung in der Ebene ist eine momentane Rotation um einen Punkt Z ($v_Z = 0$), welcher Momentanzentrum Z heisst. Die Schnelligkeit v_A eines beliebigen Punktes A lautet:

$$v_A = \omega r = \omega \cdot |\underline{ZA}| \tag{17}$$

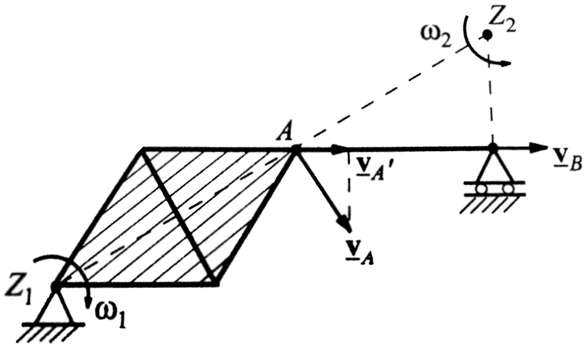




8.2 Polbahnen

Die Polbahnen werden in diesem Kurs nicht angeschaut.

8.3 Ebene Fachwerke



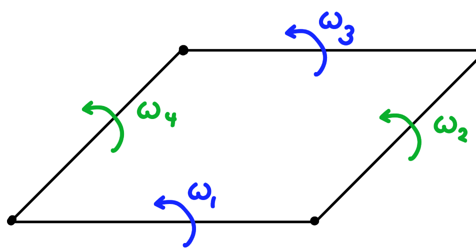
Kochrezept - Fachwerke

1. Identifikation aller starren Körper $\rightarrow$ Stäbe, Dreiecke, Platten
2. Identifikation der Lagerungen:
   (a) Drehbar $\rightarrow$ Lager ist Momentanzentrum (Bsp. Z_1)
   (b) Dreh- & Verschiebbar $\rightarrow$ Richtung von $\underline{v}$ bekannt (Bsp. $\underline{v}_B$)
3. ω_i und Z_i für alle beteiligten Körper bestimmen:
   (a) Satz vom Momentanzentrum: $v = \omega r$
   (b) S.d.p.G: $\underline{v}_A \cdot \underline{AB} = \underline{v}_B \cdot \underline{AB}$
   (c) Parallelogrammregel (8.4)

8.4 Parallelogrammregel

Parallele Stäbe im Parallelogramm haben die gleiche Rotationsgeschwindigkeit

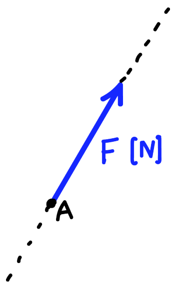
$$\omega_1 = \omega_3, \quad \omega_2 = \omega_4$$



9 Kräfte

Die Kraft $\underline{\mathbf{F}}$ ist charakterisiert durch:

- ihre Wirkungslinie
- ihre Richtung
- ihren Angriffspunkt A
- ihren Betrag (in Newton)

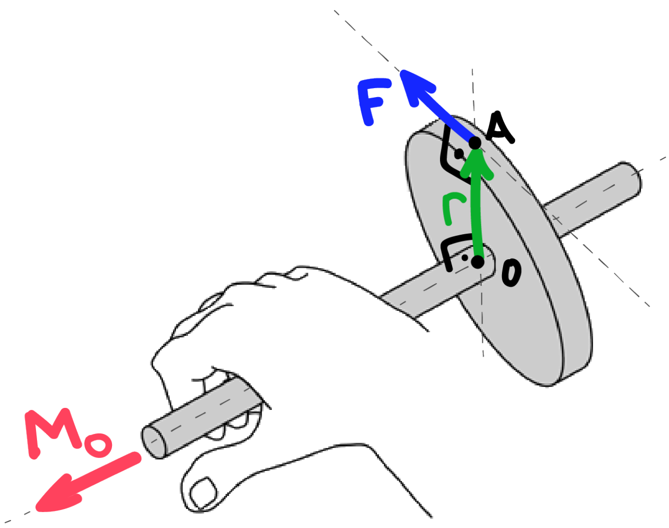


9.1 Resultierende

Die Resultierende einer Kräftegruppe $\{\underline{\mathbf{F}}_i\}$ ist die vektorielle Summe aller Kräfte:

$$\underline{\mathbf{R}} = \sum_i \underline{\mathbf{F}}_i \tag{18}$$

10 Moment



Das Moment einer Kraft $\underline{\mathbf{F}}$ mit Angriffspunkt A bezüglich eines Punktes O lautet:

$$\underline{\mathbf{M}}_O = \underline{\mathbf{OA}} \times \underline{\mathbf{F}} \tag{19}$$

Bemerkung: $\underline{\mathbf{F}}$ darf entlang ihrer Wirkungslinie beliebig verschoben werden, das Moment $\underline{\mathbf{M}}_O$ ändert sich nicht. Bei der Wahl eines beliebigen anderen Bezugspunkts P:

$$\underline{\mathbf{M}}_P = \underline{\mathbf{M}}_O + \underline{\mathbf{PO}} \times \underline{\mathbf{R}} \tag{20}$$

wobei $\underline{\mathbf{R}}$ die Resultierende der Kräftegruppe ist. (errinert an allg. Bewegung)

11 Leistung

Die Leistung **P** einer Einzelkraft $\underline{\mathbf{F}}$ mit dem materiellen Angriffspunkt M ist gleich dem Skalarprodukt:

$$\mathbf{P} = \underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{v}}_M \tag{21}$$

wobei $\underline{\mathbf{v}}_M$ die Geschwindigkeit des Punktes M ist. Die Leistung eines Momentes $\underline{\mathbf{M}}_O$ ergibt sich aus dem Skalarprodukt des Momentes mit der Rotationsgeschwindigkeit $\underline{\omega}$:

$$\mathbf{P} = \underline{\mathbf{M}}_O \cdot \underline{\omega} \tag{22}$$

Die Leistung einer Kräftegruppe:

$$P = \sum_i \underline{\mathbf{F}}_i \cdot \underline{\mathbf{v}}_i = \underline{\mathbf{v}}_B \cdot \underline{\mathbf{R}} + \underline{\omega} \cdot \underline{\mathbf{M}}_B \tag{23}$$

wobei $\underline{\mathbf{R}}$ Resultierende der Kräftegruppe und $\underline{\mathbf{M}}_B$ das Moment der Kräftegruppe bezüglich B

12 Äquivalenz und Reduktion von Kräftegruppen

12.1 Statische Äquivalenz

Zwei Kräftegruppen $\{G\}$ und $\{G*\}$ wenn ihre Resultierende $\underline{\mathbf{R}}$ und ihr Moment $\underline{\mathbf{M}}_B$ bezüglich eines beliebigen Punktes B gleich sind.

12.2 Reduktion einer Kräftegruppe

Eine Kräftegruppe $\{G\}$ kann immer auf ihre Dyname $\{\underline{\mathbf{R}}, \underline{\mathbf{M}}_B\}$ reduziert werden. Die zwei **Invarianten** $\{\underline{\mathbf{R}}, \underline{\mathbf{M}}^{(R)}\}$ der Kräftegruppe $\{G\}$ sind:

1. Invariante:
$$\underline{\mathbf{R}} = \sum_i \underline{\mathbf{F}}_i \tag{24}$$

2. Invariante:
$$\underline{\mathbf{R}} \cdot \underline{\mathbf{M}}_A = \underline{\mathbf{R}} \cdot \underline{\mathbf{M}}_B \tag{25}$$

oder:

$$\underline{\mathbf{M}}^{(R)} = (\underline{\mathbf{e}}_R \cdot \underline{\mathbf{M}}_B) \cdot \underline{\mathbf{e}}_R, \qquad wobei : \underline{\mathbf{e}}_R = \frac{\underline{\mathbf{R}}}{|\underline{\mathbf{R}}|} \tag{26}$$

Für die **Reduktion der Kräftegruppe auf eine Einzelkraft $\underline{\mathbf{R}}$:** Nur dann möglich, wenn die zweite Invariante $\underline{\mathbf{M}}^{(R)}$ verschwindet!

$$\underline{\mathbf{M}}^{(R)} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\mathbf{R}} \cdot \underline{\mathbf{M}}_B = 0, \text{ für alle Bezugspunkte B}$$

Bestimmung der Zentralachse ζ

Sei B ein beliebiger Punkt des Körpers und $Z \in \zeta$ mit $\underline{\mathbf{M}}_Z = \underline{\mathbf{M}}^{(R)}$ ist zu bestimmen:

$$\underline{\mathbf{M}}_Z = \underline{\mathbf{M}}^{(R)} = \underline{\mathbf{M}}_B + \underline{\mathbf{R}} \times \underline{\mathbf{BZ}} \tag{27}$$

$\underline{\mathbf{M}}^{(R)}$ kann aus der Gleichung (26) bestimmt werden. Die Auflösung des Gleichungssystems nach x, y, z liefert die gewünschte Geradengleichung der Zentralachse ζ:

$$\zeta = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda \underline{\mathbf{R}} \tag{28}$$

Analoges Vorgehen wie bei der Bestimmung der Zentralachse für den allgemeinen Bewegungszustand.

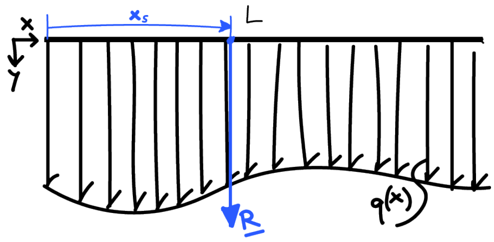
13 Hauptsatz der Statik

In einer Ruhelage eines Systems müssen alle äusseren Krafte und Momente im Gleichgewicht (GGW) sein:

$$\sum_i \underline{\mathbf{F}}_i = 0 \qquad\qquad \sum_i \underline{\mathbf{M}}_i = 0 \tag{29}$$

14 Kräftemittelpunkt bei linienverteilten Kräften

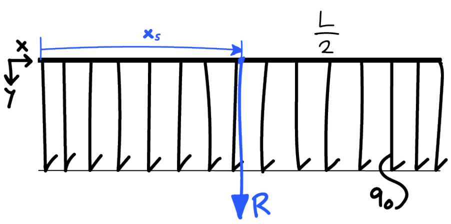
Allgemein



Der Kräftemittelpunkt x_s ist der Angriffspunkt ihrer Resultierenden $\underline{\mathbf{R}}$ von einer parallelen Kräftegruppe mit Kraftdichte $\underline{\mathbf{q}} = q(x)\underline{\mathbf{e}}_\eta$:

$$x_s = \frac{\int_0^L xq(x)dx}{\int_0^L q(x)dx} = \frac{\int_0^L xq(x)dx}{R} \tag{30}$$

Gleichförmige Kräfteverteilung

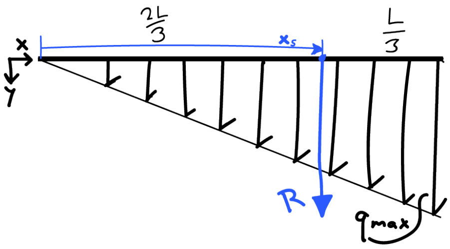


$q(x) = q_0 = konstant$

$\rightarrow$ Kräftemittelpunkt: $x_s = \frac{L}{2}$

$\rightarrow$ Resultierende: $R = L \cdot q_0$

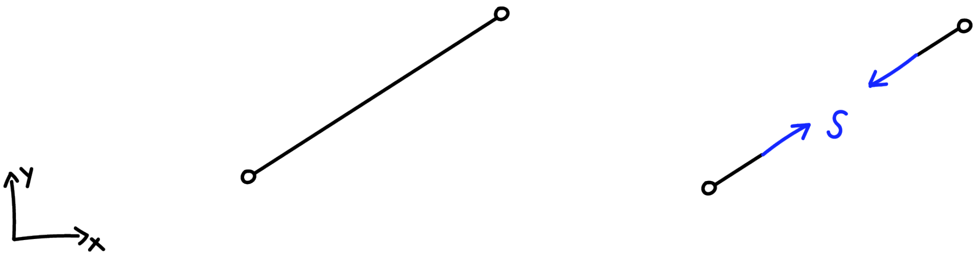
Dreieckverteilung



$q(x) = \frac{x}{L} q_{max}$
$\rightarrow$ Kräftemittelpunkt: $x_s = \frac{2L}{3}$
$\rightarrow$ Resultierende: $R = \frac{L}{2} q_{max}$

15 Pendelstützen

Eine Pendelstütze ist ein gerader Stab, der an beiden Enden gelenkig gelagert ist und nur Druck- & Zugkräfte aufnehmen kann. Diese Eigenschaft ist fast immer nützlich, wenn mehr Unbekannte als Gleichungen gegeben sind.



S > 0 : Zugkraft, Abb. 15 **S** < 0 : Druckkraft

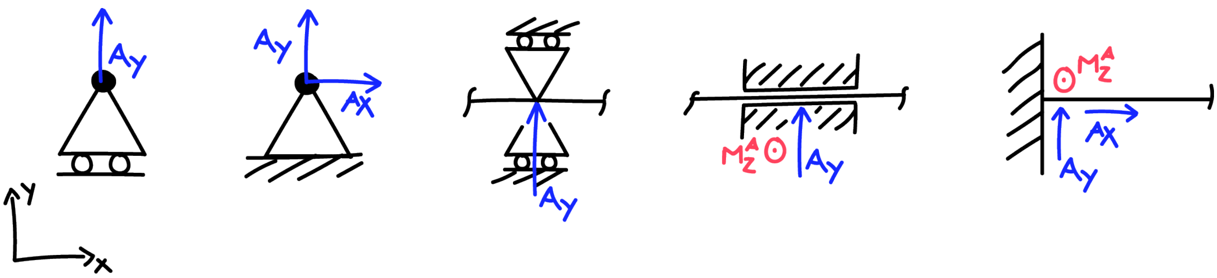
Wobei **S** eine Kraft in Stabrichtung ist.

16 Lager

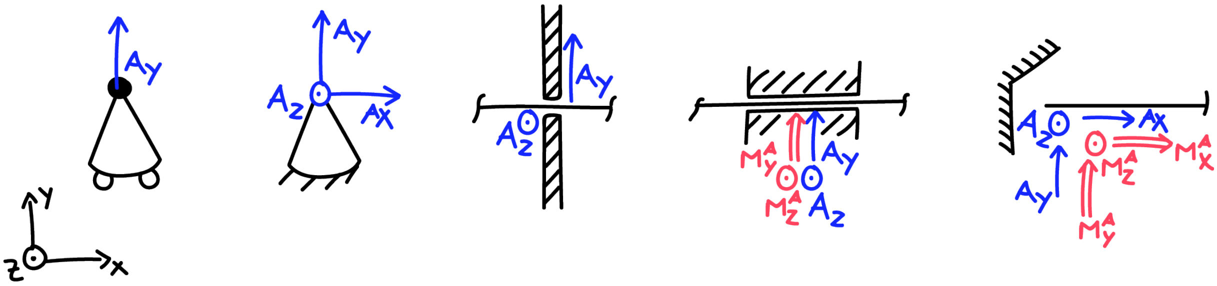
Der Typ des Lagers entscheidet, wie viele Lagerreaktionen einzuführen sind.

16.1 2D

ACHTUNG: Diese Darstellung entspricht keinem Freischnitt und soll nur zeigen, welche Lagerreaktionen zu erwarten sind.



16.2 3D

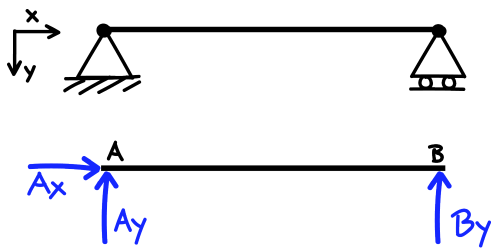


Auflager, Festlager, kurzes & langes Querlager, Einspannung

17 Statische Bestimmtheit

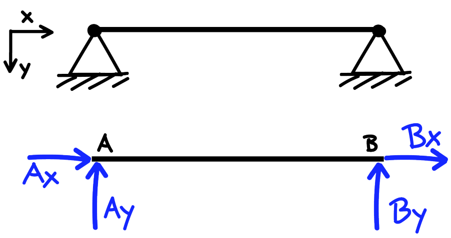
m : # GGW-Bedingungen (3D → 6, 2D → 3) **n** : # Lagerreaktionen

Statisch Bestimmt



$m = 3, n = 3$ $n = m$ → Problem ist **statisch bestimmt**

$(n - m)$-fach Statisch Unbestimmt

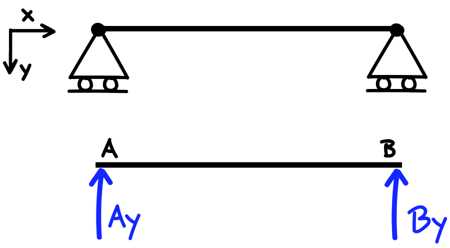


$m = 3, n = 4$

$n > m$

→ Problem 1-fach statisch **unbestimmt**

Statisch Überbestimmt

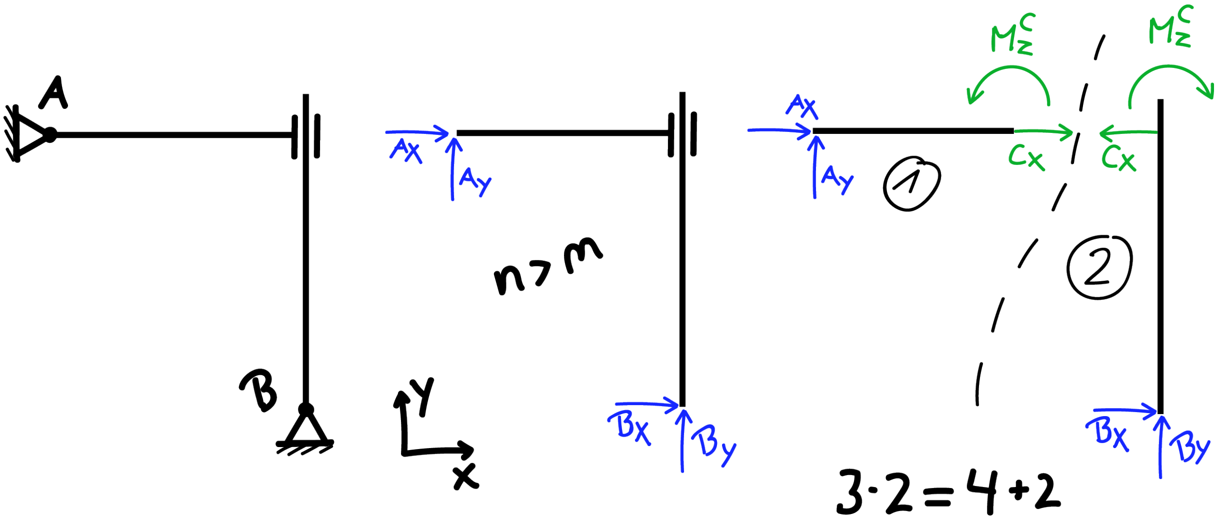


$m = 3, n = 2$

$n < m$

→ Problem statisch **überbestimmt**

18 Kochrezept zur Lösung von Aufgaben der Statik



Kochrezept - Statik

1. System abgrenzen & geeignetes Koordinatensystem einführen
2. Freischneiden: Lagerreaktionen einführen!
3. Statische Bestimmtheit: $m \lesseqgtr n$, wobei m = #GGW-Bedingungen & n = #LR
4. Falls $n > m \rightarrow$ Systemtrennung

$$\left.\begin{array}{l}\text{\# Verbindungsreaktionen = v}\\ \text{\# starre Körper = k}\end{array}\right\} m \cdot k = n + v \text{ (lin. abhängig?)}$$

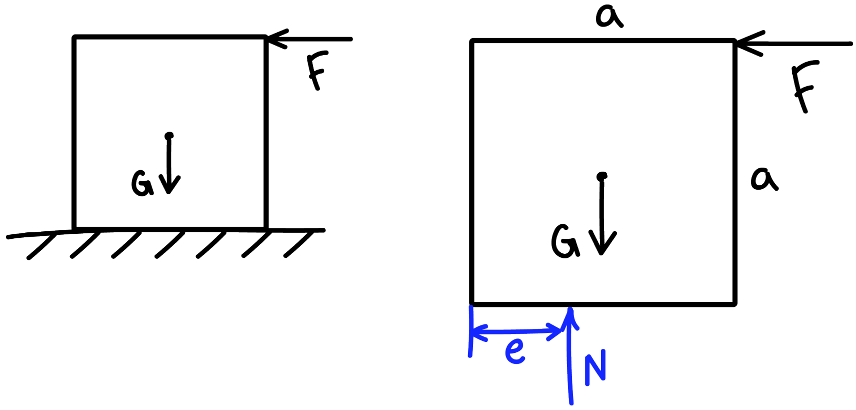
5. Linienverteilte Kräfte reduzieren
6. GGW aller Kräfte & Momente

$$\sum \underline{F} \stackrel{!}{=} 0 \qquad \sum \underline{M} \stackrel{!}{=} 0$$

7. Diskussion der Ergebnisse $\rightarrow$ Abheben, Gleiten, Kippen

19 Standfestigkeit

Ein Körper bleibt standfest, solange die Gleichgewichtsbedingungen eine resultierende Normalkraft N liefern, die innerhalb der Standfläche angreift und gegen den Körper gerichtet ist.

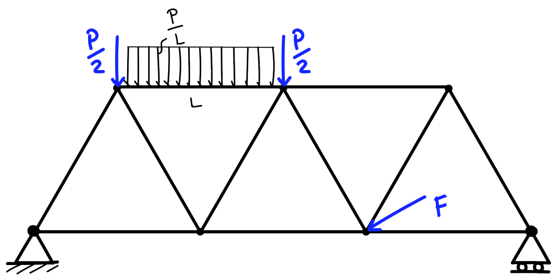


Bei diesem Würfel sind die Bedingungen für Standfestigkeit:

$$0 < e < a \qquad \text{und} \qquad N > 0$$

20 Ideale Fachwerke

- Alle Knoten sind reibungsfreie Gelenke.
- Die Stäbe sind gewichtslos.
- Alle Knoten befinden sich am Ende von Stäben.
- Alle Lasten greifen nur an den Knoten an.
- **Pendelstützen**



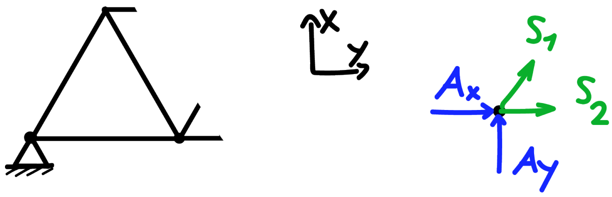
21 Bestimmung der Stabskräfte bei idealen Fachwerken

21.1 Knotengleichgewicht

Kochrezept - Knotengleichgewicht

1. Lagerkräfte bestimmen
2. Knoten freischneiden; Stabskräfte als Zugkräfte einführen!
3. GGW → lösen nach S_1 & S_2
4. $S > 0$: Zugkraft

   $S < 0$: Druckkraft

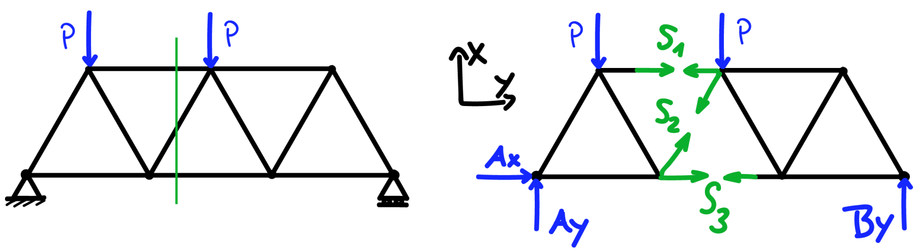


21.2 Dreikräfteschnitt

Kochrezept - Dreikräfteschnitt

1. Freischneiden & Lagerkräfte einführen
2. In 2 Teile schneiden
3. GGW → lösen nach S_1, S_2 & S_3

   Moment-GGW im Punkt wo 2 unbekannte Kräfte angreifen



21.3 Prinzip der virtuellen Leistung (PdvL)

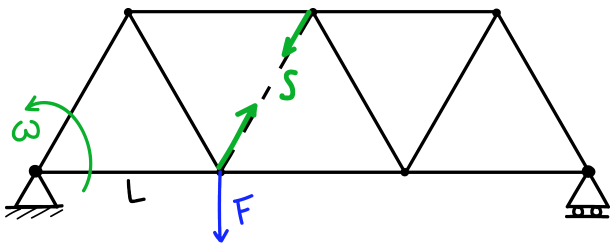
Kochrezept - PdvL

1. Stab entfernen & als Zugkraft einführen (Lagerkräfte muss man nicht berücksichtigen)
2. Virtuellen Bewegungszustand ω einführen
3. Schnelligkeiten in Richtung der Kräften in den Angriffspunkten besitmmen & Leistung berechnen

$$\mathbf{P} = \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{F}}$$

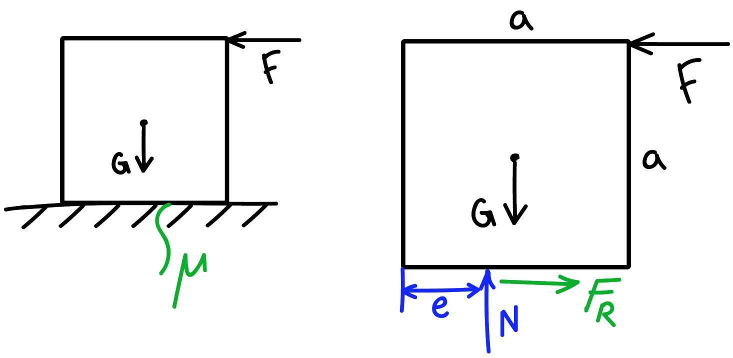
4. Nach **S** auflösen

$$\mathbf{P}_{tot} = \sum_i \mathbf{P}_i \stackrel{!}{=} 0$$



22 Reibung

Bisher wurde angenommen, dass Körper glatte Oberflächen haben und somit bei Berührung nur Normalkräfte übertragen werden. In Realität treten jedoch Reibungskräfte auf.



Der Reibungskoeffizient μ beschteibt das verhältnis zwischen Normalkraft und Reibungskraft:

$$|\underline{\mathbf{F}}_R| \leqslant \mu \cdot |\underline{\mathbf{N}}| \tag{31}$$

Die Reibungskraft darf also nie grösser als die Normalkraft sein.

22.1 Haftreibung vs. Gleitreibung

Haftreibung

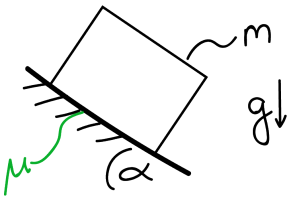
$$|\underline{\mathbf{F}}_{R0}| \leqslant \mu_0 \cdot |\underline{\mathbf{N}}|$$

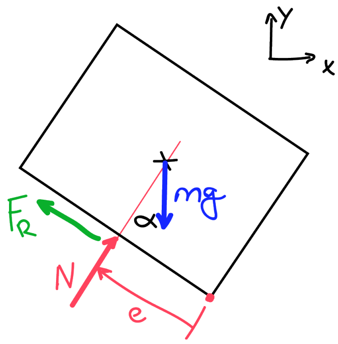
- Für Ruhe, muss $\mathbf{F}_{R0}$ kleiner als $\mu_0 \cdot \mathbf{N}$ sein
- $\mathbf{F}_{R0}$ aus GGW-Bedingungen bestimmen
- Wird $\mathbf{F}_{R0}$ bis zu $\mu_0 \cdot \mathbf{N}$ erhöht, tritt ein momentaner BZ ein $\rightarrow$ Gleitreibung

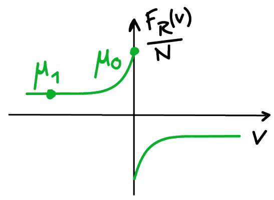
Gleitreibung

$$|\underline{\mathbf{F}}_{R1}| = \mu_1 \cdot |\underline{\mathbf{N}}|$$

- $\mathbf{F}_{R1}$ ist konstant & der Bewegung entgegengesetzt
- Gleitreibung direkt gleich $\mu_1 \cdot \mathbf{N}$ (keine GGW-Bed.)







Die Wirkungslinie von $\underline{\mathbf{N}}$ muss nicht durch den Mittelpunkt des Körpers zeigen.

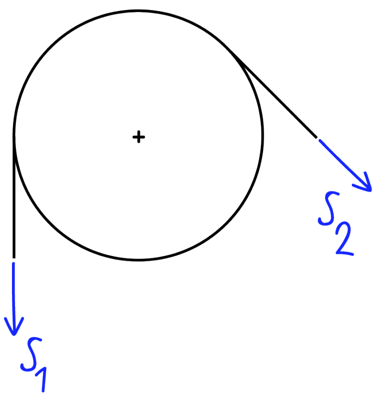
22.2 Ruhe

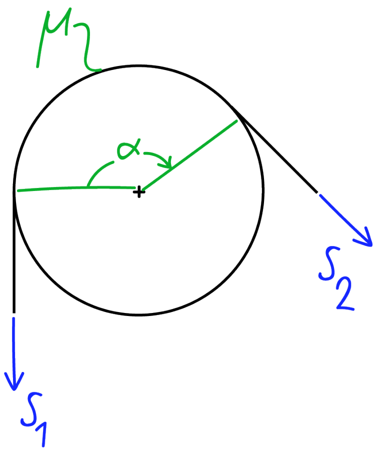
Kochrezept - Reibung

1. System abgrenzen
2. Freischneiden & Lagerreaktionen einführen
3. Flächenpaare, die aufeinander gleiten, identifizieren $\rightarrow$ Normal- & Reibungskraft als unbekannte Grösse einführen.
4. Gleichgewichtsbedingung aufstellen

(5. *Gleitreibung* $\rightarrow$ 4. Gleichung)

23 Seilstatik





Reibungsfrei

$$S_1 = S_2$$

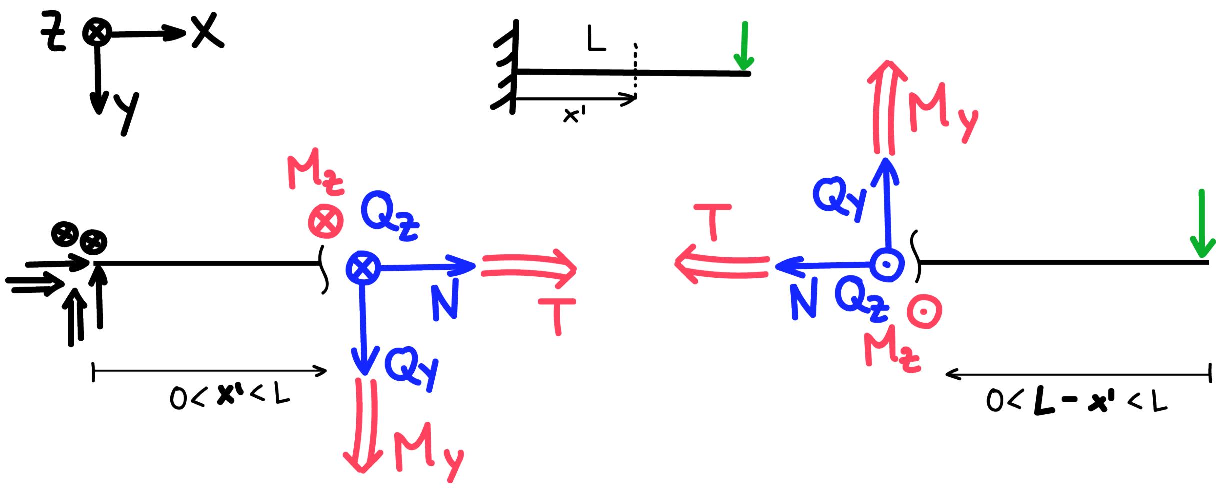
Bei einem reibungsfreien Zylinder wird die Zugkraft am Seil umgelenkt und bleibt im Betrag entprechend gleich.

Seilreibung

$$S_2 = S_1 e^{\mu_0 \alpha}$$

$S_2 > S_1$, α ist der Berührungswinkel und μ_0 der Haftreibungskoeffizient.
Haftet ab Grenzhaftung $(\leq)$.

24 Beanspruchung



Beanspruchung im geraden Balken bei einer Einspannung in $3D$ mit Laufvariable **x'**. In $2D$ soll man nur $\underline{\mathbf{N}}$, $\underline{\mathbf{Q}}_y$ & $\underline{\mathbf{M}}_z$ berücksichtigen.

Kochrezept - Beanspruchung

1. System abgrenzen & freischneiden
(2. Lagerreaktionen am Gesamtsystem bestimmen)
3. Körper schneiden: Laufvariable & Schnittkräfte einführen *Unstetigkeiten beachten!*
4. GGW-Bedingungen für abgegrenztes System aufstellen

   Schnittkräfte anhand Konvention oder Diff. Beziehungen berechnen

   Momentenbedingung in Abhängigkeit von Laufvariable
(5. Beanspruchungsdiagramme)

24.1 Differentielle Beziehungen

Differentielle Beziehungen stellen Beziehungen zwischen Querkraft bzw. Moment und Belastung zwischen zwei Unstetigkeiten dar. **Koordinaten nach Konvention & Niemals über Unsteigkeiten / unstetige Belastungen integrieren!**

$$\begin{aligned} Q_y' &= -q_y & \qquad Q_z' &= -q_z \\ M_z' &= -Q_y & \qquad M_y' &= +Q_z \\ M_z'' &= +q_y & \qquad M_y'' &= -q_z \end{aligned} \tag{32}$$

Berechnung der Querkräfte und Biegemomente:

$$Q_y = -\int q_y dx + C_1 \qquad\qquad M_z = -\int Q_y dx + C_2 \tag{33}$$

24.2 Beanspruchungsdiagramme