THEORIE 02

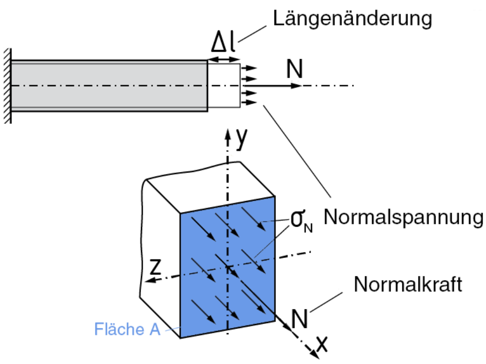
kendallj@ethz.ch

1 Spannungen

Eine Spannung σ ist eine Kraft F über eine Fläche A verteilt. Wir benutzen die Einheit $MPa = \frac{N}{mm^2}$

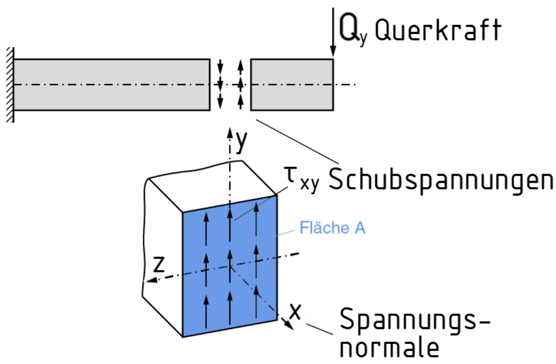
$\sigma > 0 \rightarrow$ Zug $\qquad \sigma < 0 \rightarrow$ Druck

1.1 Normalspannung



$$\sigma_n = \frac{|\mathbf{F}|}{A} = \frac{N}{A} \tag{1}$$

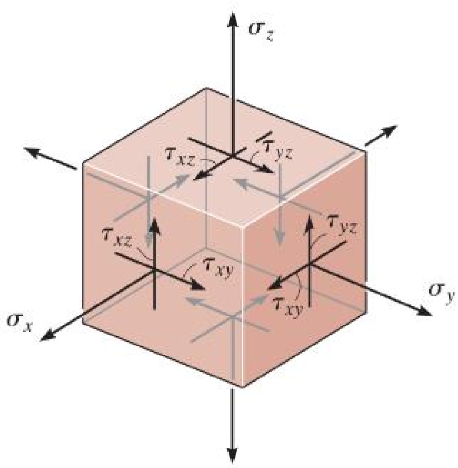
1.2 Schubspannung



$$\tau_y = \frac{|\mathbf{F}|}{A} = \frac{Q_y}{A} \tag{2}$$

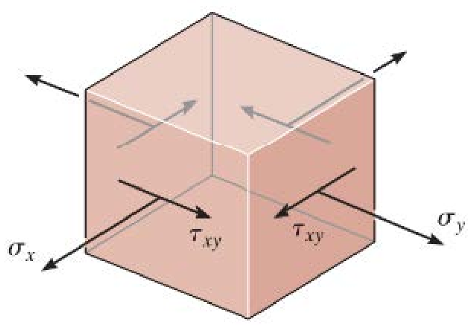
1.3 Spannungstensor

3D



$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \tag{3}$$

2D



$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

1.4 Spannungsvektor

Der Spannungsvektor $\underline{s}$ wird für ein infinitesimales Flächenelement gebraucht.

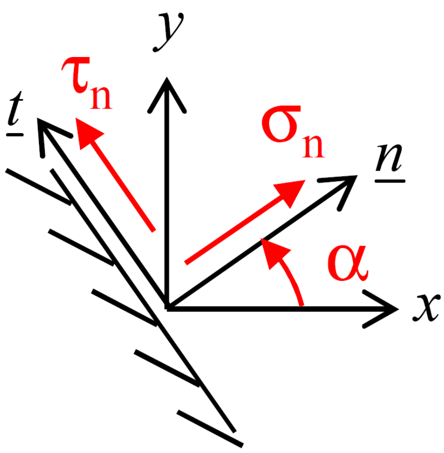
$$\underline{s} = \underline{s}(\underline{n}) = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{n} \tag{5}$$

$$\begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \tag{6}$$

Für einen bestimmten Punkt $P \in K$ lassen sich die Beträge von Normal- und Schubspannungen anschliessend berechnen:

$$\sigma_n = \underline{s} \cdot \underline{n} \tag{7}$$

$$\tau_n = |\underline{s} - \sigma_n \underline{n}| = \underline{s} \cdot \underline{t} \tag{8}$$

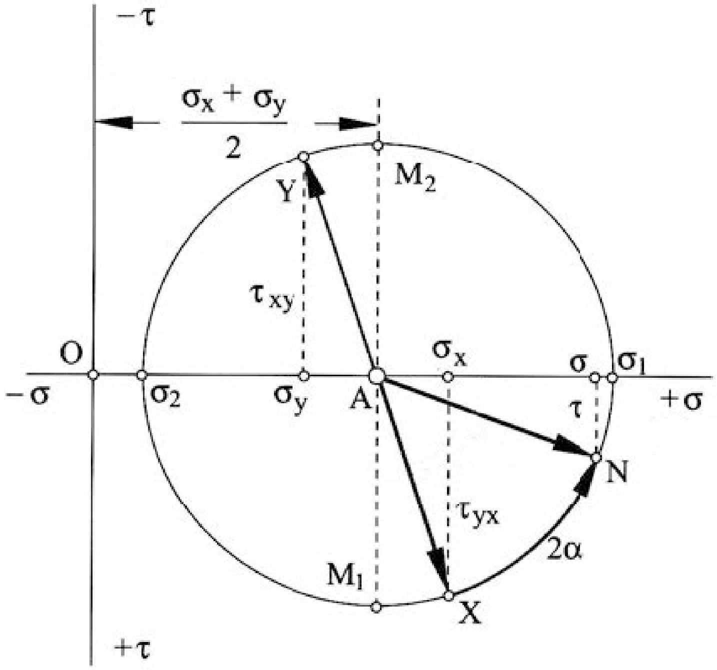


$$\sigma_n(\alpha) = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha\tau_{xy} \tag{9}$$

$$\tau_n(\alpha) = (\sigma_y - \sigma_x)\sin\alpha\cos\alpha + \tau_{xy}\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) \tag{10}$$

2 Mohrscher Spannungskreis

Spannungen lassen sich auch im Mohr‘schen Kreis darstellen. Ein Mohr‘scher Kreis kann die Spannung in einer Ebene, z.B. x-y, zeigen. Für zwei Ebenen braucht man einen Mohrschen Kreis und für 3 Ebenen (3D) drei Mohrsche Kreise. Diese lassen sich alle im selben Koordinatensystem σ - τ einzeichnen.



Aus dem Mohr’schen Kreis lassen sich verschiedene Formeln für eine Rotation der Bezugsachsen sowie die Maximalspannungen herleiten.

Kochrezept - Konstruktion Mohrscher Kreis (2D)

1. Koordinatenachsen σ - τ zeichnen
2. Punkte $X(\sigma_x, \tau_{yx})$ & $Y(\sigma_y, \tau_{xy})$ einzeichnen
3. Diese zwei Punkte mit einer Geraden verbinden.
4. Der Schnittpunkt A dieser Geraden mit der σ-Achse ist der Kreismittelpunkt.
5. Kreis um den Mittelpunkt durch X & Y zeichnen.

2.1 Rotation der Bezugsachsen

Bei einer Rotation der x- und y-Achse um den Winkel α berechnen sich die Spannungen entlang der rotierten Achsen x‘ und y‘ als:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\alpha + \tau_{xy} \cdot \sin 2\alpha \tag{11}$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\alpha - \tau_{xy} \cdot \sin 2\alpha \tag{12}$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cdot \cos 2\alpha \tag{13}$$

Eine Rotation der Achsen um α in negativer Richtung im Raum entspricht eine Drehung um 2α in Uhrzeigersinn im Mohrschen Kreis. Analog: positive Richtung im Raum $\rightarrow$ Gegenuhrzeigersinn im Mohrschen Kreis.

2.2 Maximale Normalspannung

Der grösste und der kleinste Wert der Normalspannung treten senkrecht zueinander auf. In diesem Fall herrscht keine Schubspannung.

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \tag{14}$$

$$\sigma_1 = \sigma_{max} \qquad \sigma_2 = \sigma_{min} \qquad \tau_{xy} = 0$$

2.3 Mohrscher Spannungskreis 3D

Wir behandeln hier nur den ebenen Spannungskreis, jedoch verhaltet sich der dreidimensionaler Spannungskreis genau wie den zweidimensionalen. Für denn 3D Fall gibt es hier ein gutes Video und einen Eintrag in Wikipedia.