THEORIE 04

kendallj@ethz.ch

1 Gleichgewichtsbedingungen bei Spannungen

Führt man das Kräftegleichgewicht am infinitesimalen Quader durch, erhält man die GGB, die durch die Spannungen erfüllt werden müssen. Diese sind die sogenannten Gleichgewichtsbedingungen des Kontinuums:

$$\begin{aligned}
\sum F_x &: \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \\
\sum F_y &: \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + f_y = 0 \\
\sum F_z &: \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + f_z = 0
\end{aligned} \tag{1}$$

Die Funktionen f_x, f_y und f_z beschreiben die Komponenten des Raumkräftedichtevektors $\underline{\mathbf{f}}$

2 Verzerrung

2.1 Materialparameter

Elastizitätsmodul E

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \tag{2}$$

Schubmodul G

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{3}$$

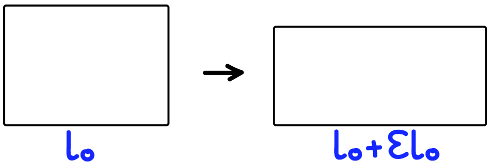
Poisson-/Querkontraktionszahl ν

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{quer}}{\varepsilon_{normal}} \tag{4}$$

Wärmeausdehnungskoeffizient α

$$\varepsilon = \alpha \cdot \Delta T \tag{5}$$

2.2 Dehnung ε



Die Dehnung ε wird durch eine Normalspannung induziert. Es lässt sich die Dehnung aus der Geometrie

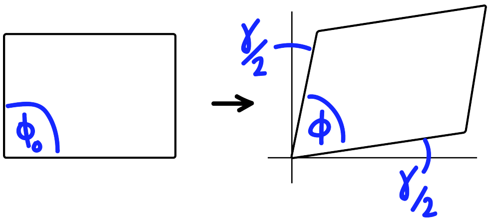
$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\Delta L}{L_0} \quad [\%] \tag{6}$$

oder aus der Spannung (Hook'sches Gesetz)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad [\%] \tag{7}$$

berechnen.

2.3 Schubverzerrung γ



Die Schubverzerrung γ wird durch eine Schubspannung induziert. Es lässt sich die Schubverzerrung aus der Geometrie. Der Winkel wird in positiver Richtung von der Achse weg gemessen:

$$\gamma \approx \phi_0 - \phi \quad [rad] \tag{8}$$

oder aus der Spannung:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad [rad] \tag{9}$$

berechnen. Eine Winkelvergrösserung bewirkt eine negative Schubverzerrung.

2.4 Elastizitätstensor

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}} = \begin{bmatrix} u_{xx} & \frac{u_{xy}+u_{yx}}{2} & \frac{u_{xz}+u_{zx}}{2} \\ \frac{u_{yx}+u_{xy}}{2} & u_{yy} & \frac{u_{yz}+u_{zy}}{2} \\ \frac{u_{zx}+u_{xz}}{2} & \frac{u_{zy}+u_{yz}}{2} & u_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \tag{10}$$

Dieses Kapitel und Unterkapitel ist kurz gehalten, denn: alle Formeln, die für die Spannung gelten (Bsp. Berechnung der Hauptspannungen) gelten auch für die Dehnungen! Ihr findet sie auf der *Zusammenfassung Spannungen* aus der Vorlesung. Es gilt: $\sigma \rightarrow \varepsilon$ und $\tau \rightarrow \frac{\gamma}{2}$. Z.B. für den Mohr'schen Kreis:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + (\frac{\gamma_{xy}}{2})^2} \tag{11}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \tag{12}$$