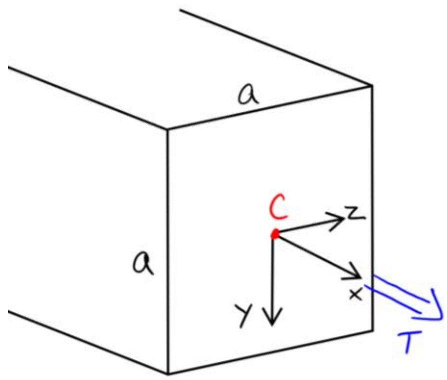
Mechanik II: Deformierbare Körper

für D-BAUG, D-MAVT

Haus- & Schnellübung 10

Aufgabe S1:

Gegeben sei ein rechteckiger Querschnitt mit der Seitenlänge a. Bestimmen Sie den Radius eines kreisförmigen Querschnitts, so dass die Torsionssteifigkeiten GI_T gleich sind.



S1. 5 mögliche Antworten	Ⓐ $r = 0.54a$	Ⓑ $r = 0.45a$	Ⓒ $r = 0.26a$	Ⓓ $r = 0.83a$	Ⓔ $r = 0.35a$

Lösung zu Aufgabe S1:

Aus „Zusammenfassung Torsion“:

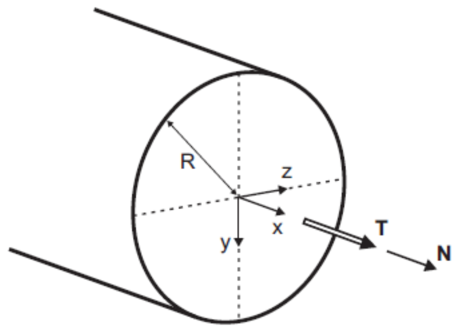
$$I_{T,RE} = 0.141a^4$$

$$I_{T,KR} = \frac{\pi \cdot r^4}{2}$$

$$I_{T,RE} \overset{!}{\triangleq} I_{T,KR} \rightarrow \ 0.141a^4 = \frac{\pi \cdot r^4}{2} \ \rightarrow \ \mathrm{r} = \sqrt[4]{\frac{2 \cdot 0.141a^4}{\pi}} = 0.54a$$

Aufgabe S2:

Ein Stabträger habe im kritischen Querschnitt den Radius R und sei mit den folgenden Komponenten beansprucht: Torsionsmoment $T > 0$ und Axialkraft $N > 0$. Berechnen Sie die maximale Schubspannung im Profil.



Bemerkung: Zusammengesetzte Beanspruchung.

Lösung zu Aufgabe S2:

Die Beanspruchung ist aus einer Normalspannung und einer Schubspannung zusammengesetzt.

1. **Normalspannung berechnen**

$$\sigma_x = \frac{N}{\pi R^2}$$

2. **Schubspannung berechnen**

$$\tau_{x\varphi} = \frac{T \cdot r}{I_T} \overset{I_T = \frac{1}{2}\pi r^4}{\cong} \frac{2T}{\pi R^4} r$$

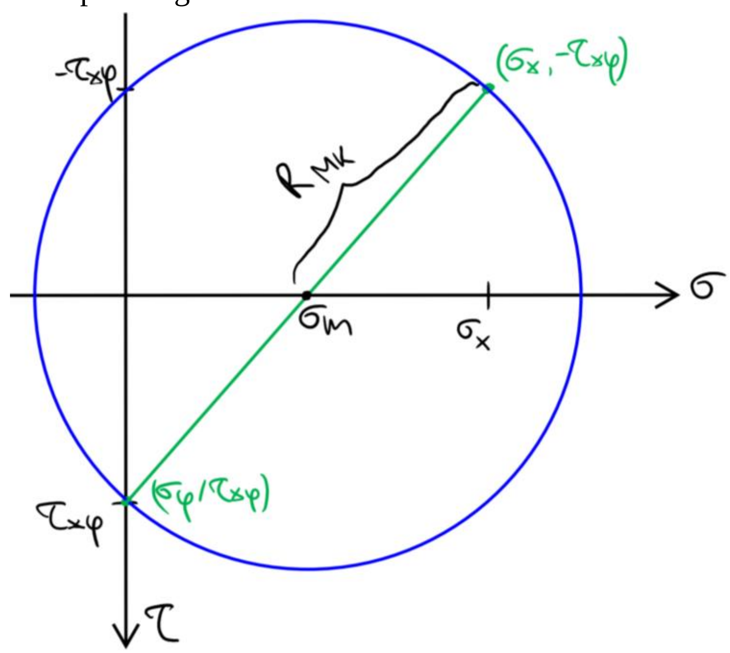
3. Maximale Schubspannung im Profil berechnen

3.1. Tensor aufstellen

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{x\varphi} \\ 0 & \tau_{x\varphi} & \sigma_x \end{bmatrix}_{r,\varphi,x}$$

3.2. Maximale Schubspannung berechnen

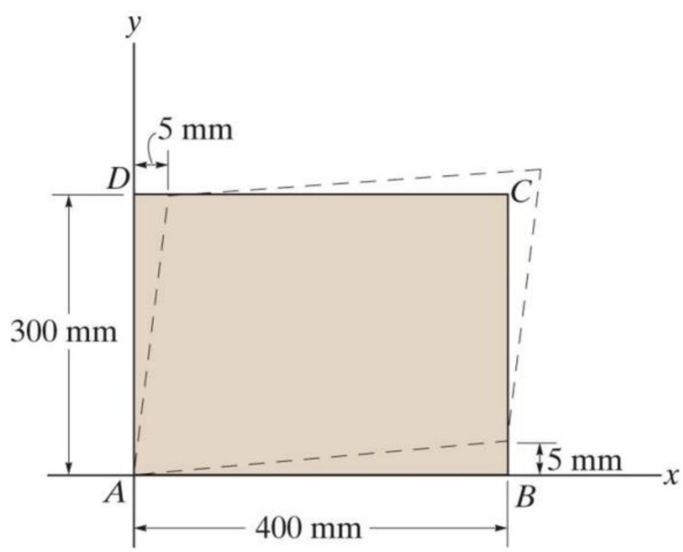
Die maximale Schubspannung ist bei $r = R$.



$$\tau_{max} = R_{MK} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_m)^2 + \tau_{x\varphi}^2} \overset{\sigma_m = \frac{\sigma_x}{2}}{\triangleq} \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{x\varphi}^2} = \boxed{\sqrt{\left(\frac{N}{2\pi R^2}\right)^2 + \left(\frac{2T}{\pi R^3}\right)^2}}$$

Aufgabe S3:

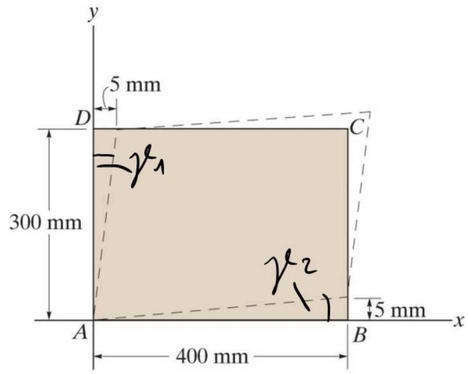
Gegeben sei der Spannungstensor $\underline{\underline{T}}_{xy} = \begin{bmatrix} 200 & 744 \\ 744 & 150 \end{bmatrix} MPa$ wodurch das gegebene Rechteck auf folgender Art und Weise verformt wird:



Wie gross ist der Schubmodul des Rechtecks?

Lösung zu Aufgabe S3:

1. Schubwinkel aus der Geometrie berechnen



Der Schubwinkel γ_{xy} lässt sich aus der Summe der Winkel γ_1 und γ_2 berechnen:

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{5mm}{300mm} + \frac{5mm}{400mm} = 0.0292$$

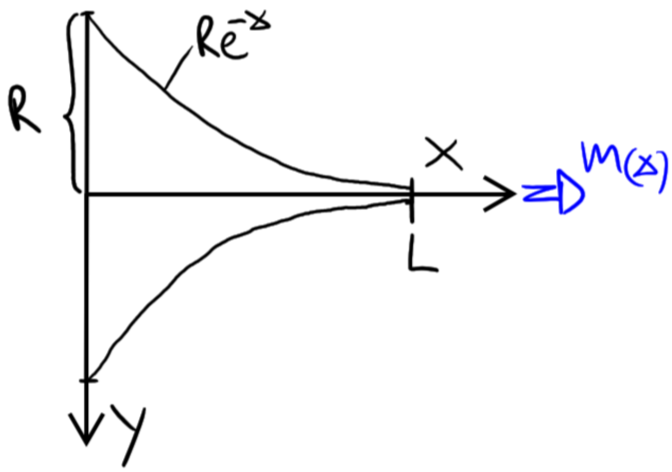
2. Schubmodul bestimmen

$$G = \frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}} = \boxed{25.511GPa}$$

Bemerkung: Es handelt sich um Aluminium. Stahl hätte ein G-Modul von ungefähr $80GPa$.

Aufgabe H1:

Es sei ein runder, rotationssymmetrischer Balken mit Vollquerschnitt und Schubmodul G gegeben, dessen Radius R exponentiell abfällt ($R = R_0 e^{-ax}$). Er sei bei $x = 0$ eingespannt und bei $x = L$ frei. Der Balken wird mit einem verteilten Torsionsmoment von $m(x) = -K$ belastet, wobei $[m(x)] = \frac{kNm}{m}$ und $a, K > 0$.



a) Wo tritt die grösste Verdrehung auf und wie gross ist sie?

b) Berechnen Sie Ort und Betrag der grössten Schubspannung

Lösung zu Aufgabe H1:

Aufgabenteil a):

1. I_T und $T(x)$ berechnen

1.1. Trägheitsmoment berechnen

$$I_T(x) = \frac{1}{2}\pi R_0^4 e^{-4ax}$$

1.2. Torsionsmoment berechnen

$$T(x) = -\int m(x)dx = Kx + C_1 = K(x-L)$$

Randbedingungen aus der Lagerreaktion in positiver x-Richtung:

$$T(L) = C_1 + KL = 0 \rightarrow C_1 = -KL$$

2. $\vartheta(x)$ berechnen

2.1. Allgemeine Gleichung finden

$$\vartheta(x) = \frac{1}{G}\int \frac{T(x)}{I_T(x)}dx = \frac{2K}{G\pi R_0^4}\int (x-L)e^{4ax}dx = \frac{K}{2G\pi R_0^4 a}\left(x - L - \frac{1}{4a}\right)e^{4ax} + C_2$$

2.2. Spezielle Gleichung berechnen

Lagerbedingung:

$$\vartheta(0) = 0 \rightarrow C_2 = \frac{K}{2G\pi R_0^4 a}\left(L + \frac{1}{4a}\right)$$

$$\vartheta(x) = \frac{K}{2G\pi R_0^4 a}\left[\left(x - L - \frac{1}{4a}\right)e^{4ax} + L + \frac{1}{4a}\right],$$

3. ϑ_{max} berechnen

Die Extrema von $\vartheta(x)$ sind bei $\frac{d\vartheta(x)}{dx} = 0$.

$$\frac{d\vartheta(x)}{dx} = \frac{2K}{G\pi R_0^4}(x-L)e^{4ax} = 0 \rightarrow x = L$$

Für $x = L$

$$\vartheta(L) = \frac{K}{2G\pi R_0^4 a}\left[L + \frac{1}{4a}\left(1 - e^{4aL}\right)\right]$$

→ Der Drehwinkel ist maximal bei $x = L$ mit Betrag

$$\boxed{\vartheta_{max} = \vartheta(L) = \frac{K}{2G\pi R_0^4 a}\left[L + \frac{1}{4a}\left(1 - e^{4aL}\right)\right]}$$

Aufgabenteil b):

1. $\boldsymbol{\tau_{x\varphi}(x)}$ berechnen

$$\tau_{x\varphi}(x) = \frac{T(x)}{I_T(x)}R = \frac{K(x-L)}{\frac{1}{2}\pi R_0^4 e^{-4ax}} R_0 e^{-ax} = \frac{2K}{\pi R_0^3}(x-L)e^{3ax}$$

2. $\boldsymbol{\tau_{max}}$ bestimmen

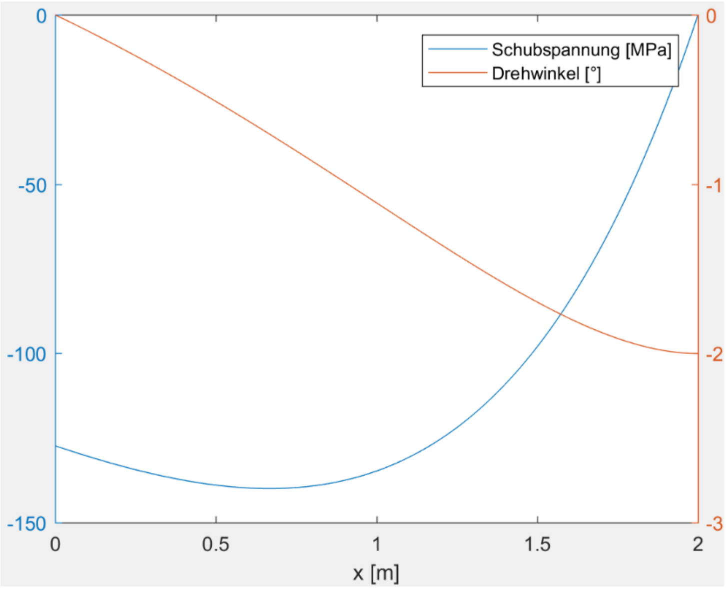
$$\frac{d\tau_{x\varphi}(x)}{dx} = \frac{6aK}{\pi R_0^3}\left(x - L + \frac{1}{3a}\right)e^{3ax} = 0 \rightarrow x = \frac{3aL-1}{3a}$$

Für $x = \frac{3aL-1}{3a}$

$$\tau_{x\varphi}\left(\frac{3aL-1}{3a}\right) = -\frac{2K}{3\pi R_0^3 a}e^{3aL-1}$$

$\rightarrow$ $\boxed{\text{Die Schubspannung ist maximal bei } x = \frac{3aL-1}{3a} \text{ mit Betrag } \tau_{max} = \left|\tau_{x\varphi}\left(\frac{3aL-1}{3a}\right)\right| = \frac{2K}{3\pi R_0^3 a}e^{3aL-1}}$

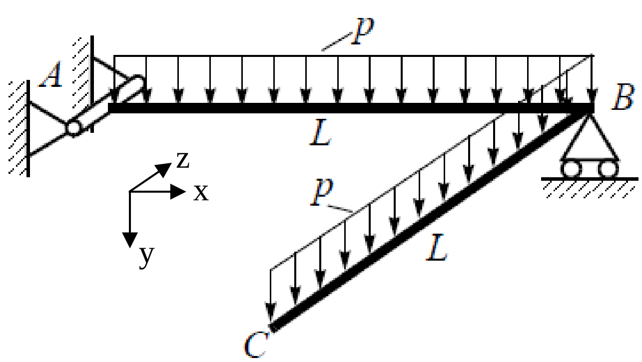
Bemerkung: Bei dieser Aufgabe sieht man, dass sich der Drehwinkel nicht unbedingt gleich dem Schubspannungsverlauf verhalten muss, wie man es intuitiv annehmen könnte.



Bei dieser Abbildung wurden die Werte $K = 100\frac{KNm}{m}, a = 0.25\frac{1}{m}$, $L = 2m,\ R = 0.11m$ und $G = 80GPa$ verwendet.

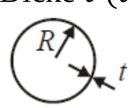
Aufgabe H2:

Das skizzierte System besteht aus zwei in B zu einem rechten Winkel zusammengeschweissten, duktilen Stäben der Länge L, E-Modul E und Schubmodul G. Es ist gleichförmig belastet mit der Kraft p pro Längeneinheit, in A scharnierartig (Einspannung bezüglich Torsion) und in B horizontal verschiebbar gelagert.

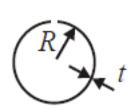


Es wird angenommen, dass nur kleine Verschiebungen und Winkeldrehungen vorliegen.

a) Man berechne die Verschiebung v_C im Punkt C unter der Annahme eines geschlossenen Kreisringquerschnittes mit Radius R und Dicke t $(t \ll R)$ für beide Stäbe:



b) Man berechne die Verschiebung v_C im Punkt C unter der Annahme eines offenen Kreisringquerschnittes mit Radius R und Dicke t $(t \ll R)$ für beide Stäbe. Vergleichen Sie anschliessend die beiden Resultate mit der Annahme, dass $E = \frac{5}{2}G$. $I_x = \pi R^3 t,\ I_T = \frac{2}{3}\pi R^3 t$

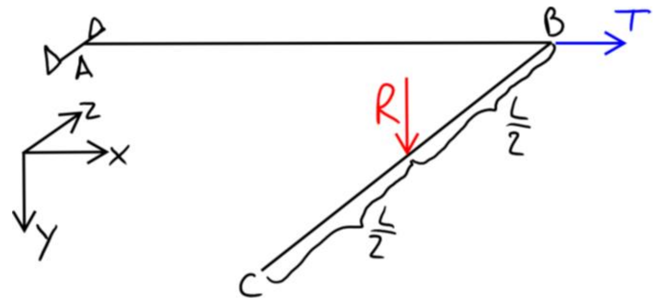


Lösung zu Aufgabe H2:

Aufgabenteil a):

1. Innere Momente berechnen

1.1. Torsionsmoment im Stab AB berechnen



$$T = \frac{RL}{2} = \frac{pL^2}{2}$$

1.2. Biegemoment im Stab BC bestimmen

Das Biegemoment kann mittels Differenzialbeziehungen berechnet werden:

$$M_b(z) = \iint p dz = \frac{p}{2} z^2 + C_1 z + C_2 = \frac{p}{2}(L+z)^2$$

$$M_b(0) = T = C_2 = \frac{pL^2}{2}, \qquad M_b(-L) = 0 = \frac{pL^2}{2} - C_1 L + \frac{pL^2}{2} = 0 \rightarrow C_1 = pL$$

2. Biegelinie im Stab BC berechnen

$$v(z) = \frac{1}{EI_x} \iint M_b dz = \frac{p}{24}(L+z)^4 + C_3 z + C_4$$

$$v(0) = \frac{1}{EI_x}\left(\frac{pL^4}{24} + C_4\right) = 0 \rightarrow C_4 = -\frac{pL^4}{24},$$

$$v'(0) = \frac{1}{EI_x}\left(\frac{pL^3}{6} + C_3\right) = -\vartheta(L) = -\frac{TL}{GI_T} = -\frac{pL^3}{2GI_T} \rightarrow C_3 = -\frac{pL^3}{2}\left(\frac{EI_x}{GI_T} + \frac{1}{3}\right)$$

Bemerkung: Man muss mit dem negativen Torsionswinkel rechnen, da unsere Biegelinie in negativer z-Richtung wächst.

$$\rightarrow v(z) = \frac{p}{2EI_x}\left[\frac{1}{12}(L+z)^4 - L^3\left(\frac{EI_x}{GI_T} + \frac{1}{3}\right) z - \frac{L^4}{12}\right]$$

3. Verschiebung v_C berechnen

$$I_x = \frac{\pi}{4}[R^4 - (R-t)^4] = \frac{\pi}{4}(R^4 - R^4 + 4R^3t - 6R^2t^2 + 4Rt^3 + t^4) \overset{t \ll R}{\cong} \pi R^3 t, I_T = 2I_x$$

$$v_C = v(-L) = \frac{pL^4}{2EI_x}\left[\frac{1}{4} + \frac{EI_x}{GI_T}\right] = \boxed{\frac{pL^4}{4E\pi R^3 t}\left[\frac{1}{2} + \frac{E}{G}\right]}$$

Aufgabenteil b):

Der einzige Unterschied vom Aufgabenteil a) und b) ist das polare Trägheitsmoment:

$$v_C = v(-L) = \frac{pL^4}{2EI_x}\left[\frac{1}{4} + \frac{EI_x}{GI_T}\right] = \boxed{\frac{pL^4}{2E\pi R^3 t}\left[\frac{1}{4} + \frac{2E}{3G}\right]}$$

Wenn man das Verhältnis $\frac{E}{G} = \frac{5}{2}$ in die Gleichungen für v_c einsetzt, erhält man:

$$v_{geschlossen} = \frac{3pL^4}{4E\pi R^3 t}, \qquad v_{offen} = \frac{23pL^4}{24E\pi R^3 t} \rightarrow \frac{v_{offen}}{v_{geschlossen}} = \frac{23}{18} = 1.278$$

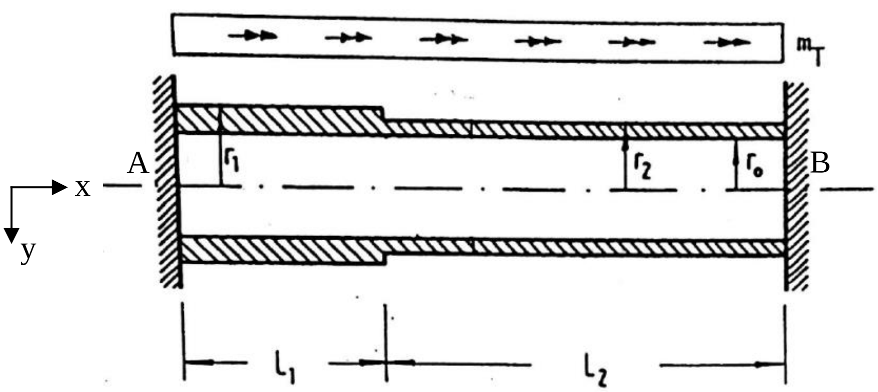
Das Öffnen des Ringes hat einen markanten Einfluss auf die Verschiebung, da es sie um 27.8% verlängert.

Wiederholungsaufgabe 1:

Ein Rohr mit abgesetztem Kreisringquerschnitt ist ohne Vorspannung beidseitig eingespannt. Es wird durch ein gleichmässig verteiltes Torsionsmoment pro Längeneinheit $m_T = const.$ belastet. Wie groß sind der maximale Verdrehwinkel ϑ und die maximalen Schubspannungen τ_1 bzw. τ_2 in beiden Rohrabschnitten?

Gegeben:

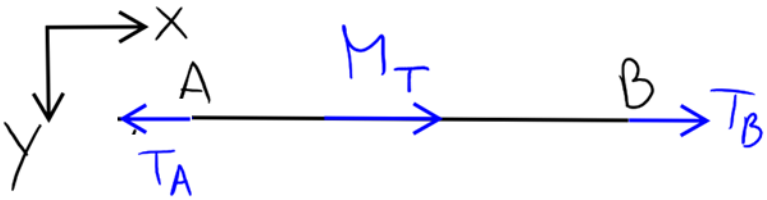
$l_1 = 300mm,\ l_2 = 600mm, r_0 = 25mm,\ r_1 = 30mm, r_2 = 27.5mm, G = 0.8 \cdot 10^5\ N/mm^2,\ m_T = 4kN$



Lösung zur Wiederholungsaufgabe 1:

1. Inneren Torsionsverlauf $T(x)$ berechnen

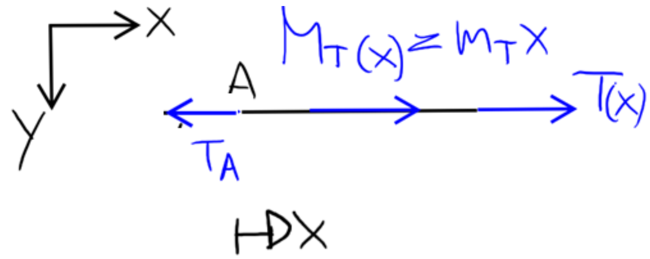
1.1. Lagerreaktionen bestimmen



$$M_T = \int_0^{l_1+l_2} m_T dx = m_T(l_1 + l_2)$$

$$\sum M_x = 0 \rightarrow -T_A + T_B + M_T = 0 \rightarrow T_A = T_B + m_T(l_1 + l_2)$$

1.2. Inneren Torsionsverlauf berechnen



$$\sum M_x = 0 \rightarrow T(x) = T_A - m_T x = T_B + m_T(l_1 + l_2) - m_T x$$

2. $\boldsymbol{\vartheta_1(x)}$ und $\boldsymbol{\vartheta_2(x)}$ berechnen

2.1. Die allgemeinen Verläufe $\vartheta_1(x)$ für $0 \le x \le l_1$ und $\vartheta_2(x)$ für $l_1 \le x \le l_1 + l_2$ sind

$$\vartheta_1(x) = \frac{1}{G \underbrace{I_{T,1}}_{\frac{\pi}{2}(r_1^4 - r_0^4)}} \int T(x)dx = \frac{2}{G\pi(r_1^4 - r_0^4)} \int (T_B + m_T(l_1 + l_2) - m_T x)\, dx$$

$$= \frac{2}{G\pi(r_1^4 - r_0^4)} \left\{ [m_T(l_1 + l_2) + T_B]x - \frac{1}{2} m_T x^2 + C_1 \right\}$$

$$\vartheta_2(x) = \frac{1}{G \underbrace{I_{T,2}}_{\frac{\pi}{2}(r_2^4 - r_0^4)}} \int T(x)dx = \frac{2}{G\pi(r_2^4 - r_0^4)} \left\{ [m_T(l_1 + l_2) + T_B]x - \frac{1}{2} m_T x^2 + C_2 \right\}$$

2.2. Randbedingungen aufstellen

Lagerbedingungen: $\vartheta_1(0) = \vartheta_2(l_1 + l_2) = 0$

Übergangsbedingungen: $\vartheta_1(l_1) = \vartheta_2(l_1)$

2.3. C_1, C_2 und T_B bestimmen

$$\vartheta_1(0) = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$\vartheta_2(l_1 + l_2) = 0 \rightarrow C_2 = -\frac{1}{2}(l_1 + l_2)[2T_B + m_T(l_1 + l_2)]$$

$$\vartheta_1(l_1) = \vartheta_2(l_1) \rightarrow T_B = -\frac{m_T[l_1^2(r_2^4 - r_0^4) + 2l_1 l_2(r_2^4 - r_0^4) + l_2^2(r_1^4 - r_0^4)]}{2[l_1(r_2^4 - r_0^4) + l_2(r_1^4 - r_0^4)]}$$

$$\rightarrow T_B = -1519.91\ kNmm$$

2.4. Spezielle Lösung für die Drehwinkelverläufe aufstellen

$$\vartheta_1(x) = \frac{2x}{G\pi(r_1^4 - r_0^4)} \left[-\frac{1}{2} m_T x + m_T(l_1 + l_2) + T_B \right], \qquad 0 \le x \le l_1$$

$$\vartheta_2(x) = \frac{x - l_1 - l_2}{G\pi(r_2^4 - r_0^4)} [2T_B - m_T(x - l_1 - l_2)], \qquad l_1 \le x \le l_2$$

3. $\boldsymbol{\vartheta_{max}}$ bestimmen

3.1. $\vartheta_{1,max}$ berechnen

Maxima im Bereich $0 < x < l_1$:

$$\frac{\partial \vartheta_1(x)}{\partial x} = \frac{2}{G\pi(r_1^4 - r_0^4)} \left[-m_T x + m_T(l_1 + l_2) + T_B\right] = 0$$

$$\rightarrow x_{1,max} = \frac{1}{m_T}(m_T(l_1 + l_2) + T_B) = 520mm \rightarrow \text{ausserhalb des Bereichs}$$

Werte an den Rändern des Bereichs:

$$\vartheta_1(0) = 0, \qquad \vartheta_1(l_1 = 300mm) = 0.008426rad = \vartheta_{1,max}$$

3.2. $\vartheta_{2,max}$ berechnen

Maxima im Bereich $l_1 < x < l_2 + l_1$:

$$\frac{\partial \vartheta_2(x)}{\partial x} = \frac{2}{G\pi(r_2^4 - r_0^4)} \left[-m_T x + m_T(l_1 + l_2) + T_B\right] = 0$$

$$\rightarrow x_{2,max} = \frac{1}{m_T}(m_T(l_1 + l_2) + T_B) = 520mm \rightarrow \text{im Bereich}$$

$$\vartheta_2\left(x_{2,max}\right) = 0.012675rad$$

Da $\vartheta_2(l_1 + l_2) = 0$ und $\vartheta_2(l_1) = \vartheta_1(l_1) = \vartheta_{1,max}$, ist

$$\vartheta_2\left(x_{2,max}\right) = \boxed{\vartheta_{max} = 0.012675rad = 0.7263°}$$

4. $\boldsymbol{\tau_1}$ und $\boldsymbol{\tau_2}$ finden

4.1. $\tau_1(x)$ und $\tau_2(x)$ bestimmen

$$\tau_1(x) = \frac{T(x) \cdot r_1}{I_{T,1}} = \frac{2[m_T(l_1 + l_2) + T_B - m_T x]}{\pi(r_1^4 - r_0^4)} r_1, \qquad 0 \leq x \leq l_1$$

$$\tau_2(x) = \frac{T(x) \cdot r_2}{I_{T,2}} = \frac{2[m_T(l_1 + l_2) + T_B - m_T x]}{\pi(r_2^4 - r_0^4)} r_2, \qquad l_1 \leq x \leq l_2 + l_1$$

4.2. τ_1 und τ_2 berechnen

$\tau_1(x)$ ist maximal bei $x = 0$

$$\tau_1 = \tau_1(0) = \frac{2[m_T(l_1 + l_2) + T_B]}{\pi(r_1^4 - r_0^4)} r_1 = \boxed{94.729 \frac{N}{mm^2}}$$

$\tau_2(x)$ ist maximal bei $x = l_1 + l_2$

$$\tau_2 = \tau_2(l_1 + l_2) = \frac{2T_B}{\pi(r_2^4 - r_0^4)} r_2 = \boxed{-146.777 \frac{N}{mm^2}}$$

<u>Bemerkung:</u> τ_2 ist negativ, weil T_B (verglichen mit der Skizze) in der Realität in die entgegengesetzte Richtung zeigt.

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

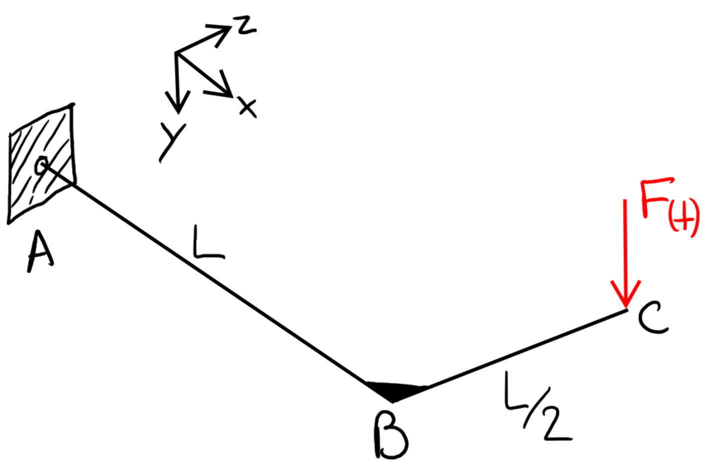
Prof. D. Mohr
FS2018

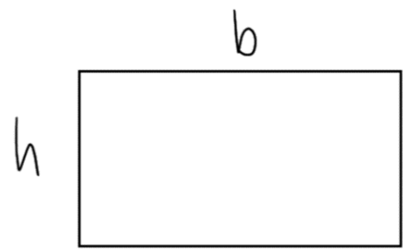
Mechanik II: Deformierbare Körper

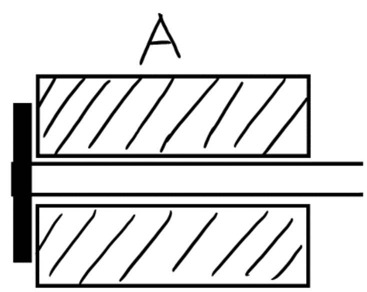
für D-BAUG, D-MAVT **Haus- & Schnellübung 10**

Wiederholungsaufgabe 2:

Gegeben sei ein L-förmiger Balken (E-Modul E und Schubmodul G), der an einem Ende frei ist und am anderen Ende mit einem langen Querlager gelagert ist. Im Innern befindet sich eine Spiralfeder mit Federkonstante ϕ ($[\phi] = \frac{rad}{Nm}$). Die maximale Drehung der Spirale ist gegeben durch ϑ_0 ($\vartheta_0 < 0$). Auf dem freien Ende im Punkt C wirkt eine oszillierende Kraft $F(t) = F_0|\sin(\omega t)|$ ($F_0 > 0$). Der Querschnitt des Balkens ist rechteckig mit der Breite b und der Höhe h ($\frac{b}{h} = 2$).







Hinweis: Überlegen Sie sich, wie sich die Fälle $\vartheta_{AB}(0) < \vartheta_0$ und $\vartheta_{AB}(0) = \vartheta_0$ unterscheiden.

a) Berechnen Sie die Verschiebung $v(t)$ des Punktes C in y-Richtung.

b) Wie muss man die Amplitude der Kraft F_0 einstellen, um den Fall $\vartheta_{AB}(0) = \vartheta_0$ im Bereich $\alpha < \omega t < \pi - \alpha$ zu haben?

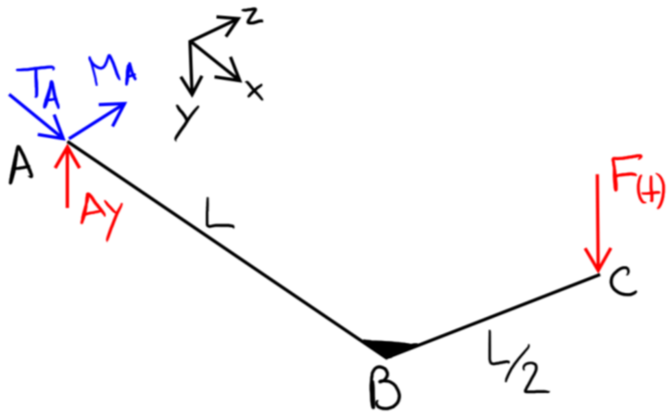
c) Zeichnen Sie ein Diagramm der Verschiebung $v(\omega t)$ im Bereich $0 \leq \omega t \leq \pi$ für den Fall, dass $\vartheta_{AB}(0) = \vartheta_0$ für $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Lösung zur Wiederholungsaufgabe 2:

Aufgabenteil a):

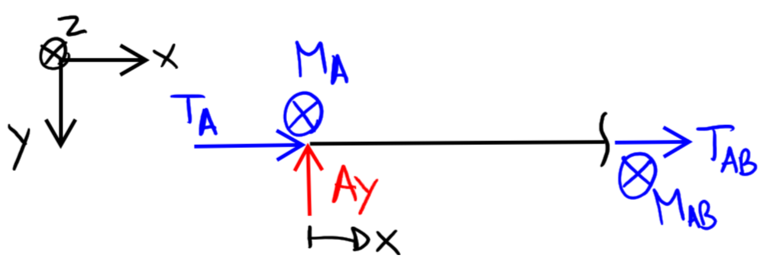
1. Inneren Momente im Balken berechnen

1.1. Lagerreaktionen bestimmen



$$\sum M_x = 0 \rightarrow T_A = \frac{L}{2}F(t), \qquad \sum M_z = 0 \rightarrow M_A = -LF(t), \qquad \sum F_y = 0 \rightarrow A_y = F(t)$$

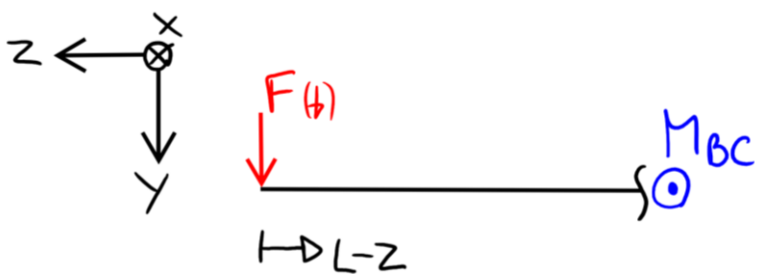
1.2. Innere Momente im Abschnitt AB



$$\sum M_x = 0 \rightarrow T_{AB} = -T_A = -\frac{L}{2}F(t),$$

$$\sum M_z = 0 \rightarrow M_{AB} = -M_A - A_y x = F(t)(L-x)$$

1.3. Innere Momente im Abschnitt BC



$$\sum M_x = 0 \rightarrow M_{BC} = -F(t)(L-z)$$

2. Biegelinien $v_{AB}(x)$ und $v_{BC}(z)$ berechnen

2.1. Allgemeine Biegelinie bestimmen

$$v_{AB}(x) = \frac{1}{EI_z}\iint M_{AB}dx = \frac{12F(t)}{Ebh^3}\left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}Lx^2 + C_1x + C_2\right)$$

$$v_{BC}(z) = -\frac{1}{EI_x}\iint M_{BC}dz = \frac{12F(t)}{Ebh^3}\left(-\frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{2}Lz^2 + C_3z + C_4\right)$$

2.2. Randbedingungen aufstellen

Lagerbedingungen: $v_{AB}(0) = v'_{AB}(0) = 0$

Übergangsbedingungen: $v_{AB}(L) = v_{BC}(0),\ v'_{BC}(0) = -\vartheta_{AB}(L)$

2.3. Drehwinkel $\vartheta_{AB}(L)$ berechnen

$$\vartheta_{AB}(x) = \frac{1}{G\underbrace{I_T}_{0.23bh^3}}\int T_{AB}(x)dx = -\frac{LF(t)}{0.46Gbh^3}x + C_5 = -\frac{LF(t)}{0.46Gbh^3}x + \vartheta_{AB}(0)$$

$$\vartheta_{AB}(0) = \begin{cases} T_{AB}\cdot\phi = -\dfrac{LF(t)}{2}\phi, & f\text{ür } \vartheta_{AB}(0) < \vartheta_0 \rightarrow F(t) < -\dfrac{2\vartheta_0}{\phi L} \\ \vartheta_0, & f\text{ür } F(t) \geq -\dfrac{2\vartheta_0}{\phi L} \end{cases}$$

$$\vartheta_{AB}(L) = -\frac{L^2F(t)}{0.46Gbh^3} + \vartheta_{AB}(0)$$

<u>Bemerkung:</u> Sobald die Spiralfeder den maximalen Drehwinkel ϑ_0 erreicht hat, kann das Querlager wie eine Einspannung betrachtet werden.

2.4. C_1, C_2, C_3 und C_4 finden

$$v_{AB}(0) = v'_{AB}(0) = 0 \rightarrow C_1 = C_2 = 0 \rightarrow v_{AB}(x) = \frac{6F(t)x^2}{Ebh^3}\left(L - \frac{x}{3}\right)$$

$$v_{BC}(0) = \frac{12F(t)}{Ebh^3}C_4 = v_{AB}(L) = \frac{4F(t)L^3}{Ebh^3} \rightarrow C_4 = \frac{L^3}{3}$$

$$v'_{BC}(0) = \frac{12F(t)}{Ebh^3}C_3 = -\vartheta_{AB}(L) = \frac{L^2F(t)}{0.46Gbh^3} - \vartheta_{AB}(0)$$

$$\rightarrow C_3 = \frac{EL^2}{0.46\cdot 12G} - \frac{\vartheta_{AB}(0)Ebh^3}{12F(t)} = \frac{E}{12}\left(\frac{L^2}{0.46G} - \frac{\vartheta_{AB}(0)bh^3}{F(t)}\right)$$

$$v_{BC}(z) = \frac{12F(t)}{Ebh^3}\left(-\frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{2}Lz^2 + \frac{E}{12}\left(\frac{L^2}{0.46G} - \frac{\vartheta_{AB}(0)bh^3}{F(t)}\right)z + \frac{L^3}{3}\right)$$

3. Die Verschiebung in y-Richtung des Punktes C bestimmen

$$v(t) = v_{BC}\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{3F(t)L}{2Ebh^3}\left(\frac{E}{3}\left(\frac{L^2}{0.46G} - \frac{\vartheta_{AB}(0)bh^3}{F(t)}\right) + \frac{7}{2}L^2\right)$$

Für $F(t) < -\frac{2\vartheta_0}{\phi L}$, $\vartheta_{AB}(0) = -\frac{LF(t)}{2}\phi$ und $F(t) = F_0|\sin(\omega t)|$:

$$\boxed{v(t) = \frac{3L^2F_0}{2Ebh^3}\left(\frac{7}{2}L + \frac{E}{3}\left(\frac{L}{0.46G} + \frac{\phi bh^3}{2}\right)\right) \cdot |\sin(\omega t)|}$$

Für $F(t) \geq -\frac{2\vartheta_0}{\phi L}$, $\vartheta_{AB}(0) = \vartheta_0$ und $F(t) = F_0|\sin(\omega t)|$:

$$\boxed{v(t) = \frac{3F_0L}{2Ebh^3}\left(\frac{7}{2}L^2 + \frac{E}{3}\left(\frac{L^2}{0.46G} - \frac{\vartheta_0 bh^3}{F_0 \cdot |\sin(\omega t)|}\right)\right) \cdot |\sin(\omega t)|}$$

Aufgabenteil b):

Damit $v_{AB}(0) = \vartheta_0$ gilt, muss $F(t) \geq -\frac{2\vartheta_0}{\phi L}$ sein. Um zwischen den beiden Situationen einen Übergang bei $\omega t = \alpha$ und $\omega t = \pi - \alpha$ zu haben, muss $F(\omega t = \alpha) = -\frac{2\vartheta_0}{\phi L}$ gelten. Für F_0 erhält man also:

$$\boxed{F_0 = -\frac{2\vartheta_0}{\phi L \sin(\alpha)}} = -\frac{2\vartheta_0}{\phi L \sin(\pi - \alpha)}$$

Aufgabenteil c):