Prof. D. Mohr

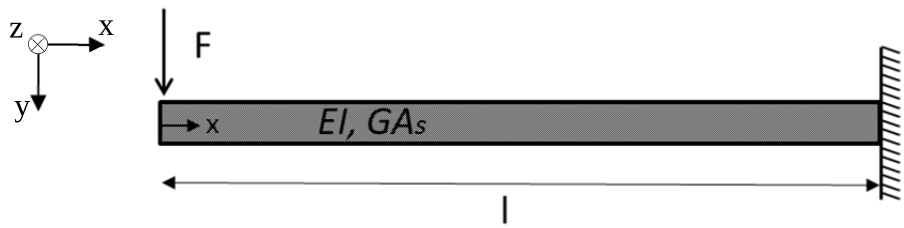
Mechanik II: Deformierbare Körper

für D-BAUG, D-MAVT

Haus- & Schnellübung 11

Aufgabe S1:

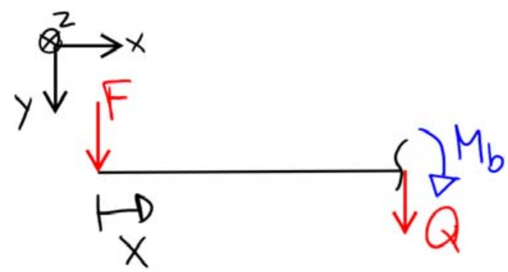
Ein Kragträger wird durch eine Einzelkraft F belastet. Wie groß ist die Absenkung f unter der Last bei Berücksichtigung der Schubdeformation des Balkens?



S1. 5 mögliche Antworten	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
	$f=\frac{Fl^3}{3EI}+\frac{Fl^3}{GA_S}$	$f=\frac{Fl^2}{3EI}+\frac{Fl^2}{GA_S}$	$f=\frac{Fl^3}{6EI}+\frac{Fl}{GA_S}$	$f=\frac{Fl^3}{2EI}+\frac{Fl}{GA_S}$	$f=\frac{Fl^3}{3EI}+\frac{Fl}{GA_S}$

Lösung zu Aufgabe S1:

1. Biegemoment und Querkraft berechnen



$$\sum M = 0 \rightarrow M_b = Fx, \qquad \sum F_y = 0 \rightarrow Q = -F$$

2. Verschiebung f finden

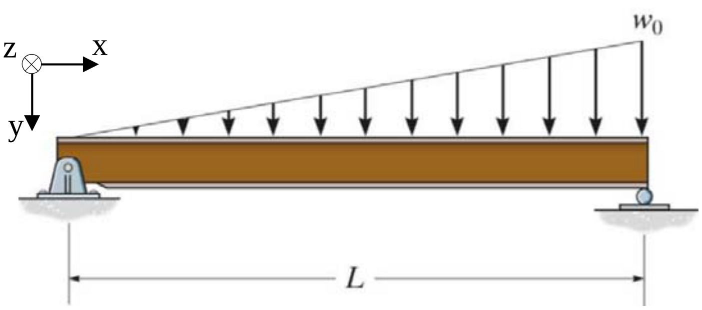
Nach dem Arbeitssatz gilt $\frac{1}{2}Ff = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_b^2}{EI} + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{Q^2}{GA_S}dx$

$$Ff = \frac{F^2}{EI}\int_0^l x^2 + \frac{F^2}{GA_S}\int_0^l dx = \frac{F^2 l^3}{3EI} + \frac{F^2 l}{GA_S} \rightarrow f = \boxed{\frac{Fl^3}{3EI} + \frac{Fl}{GA_S}}$$

Zum Vergleich kann man die Lösung auch noch mit Hilfe der DGL herleiten.

Aufgabe S2:

Gegeben sei einen Balken mit Querschnittsfläche A_S, der durch eine dreieckig verteilte Kraft mit Maximalwert w_0 belastet wird. Bestimmen Sie die totale Deformationsenergie E_{tot} im Balken, die durch Biegung und Schub entsteht.



Geg: w_0, E, I, G, A_S

Lösung zu Aufgabe S2

1. Biegemomentverlauf mittels Differentialbeziehungen ermitteln

1.1. Verteilte Kraft $w(x)$ bestimmen

$$w(x) = \frac{w_0}{L} x$$

1.2. Differentialbeziehungen anwenden

$$M_b(x) = -\int Q(x)dx = \iint w(x)dx = \frac{w_0}{6L} x^3 + C_1 x + C_2$$

Lagerbedingungen:

$$M_b(0) = 0 \rightarrow C_1 = 0, \qquad M_b(L) = 0 \rightarrow C_1 = -\frac{w_0 L}{6}$$

Das Biegemoment lautet also:

$$M_b(x) = \frac{w_0}{6L} x^3 - \frac{w_0 L}{6} x = \frac{w_0}{6L}(x^3 - xL^2)$$

2. Verlauf der Querkraft berechnen

$$M_b(x) = -\int Q(x)dx \rightarrow Q(x) = -\frac{dM(x)}{dx} = -\frac{w_0 x^2}{2L} + \frac{w_0}{6} L = -\frac{w_0}{6L}(3x^2 - L^2)$$

3. $\boldsymbol{E_{tot}}$ finden

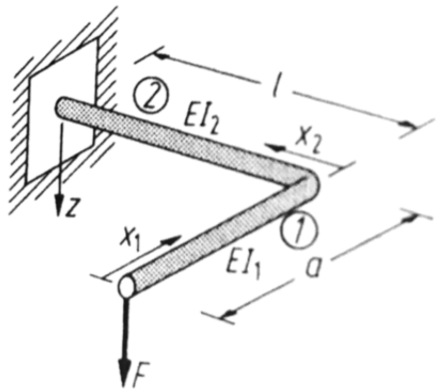
$$E_{tot} = E_b + E_{Schub} = \frac{1}{2EI}\int_0^L M_b^2(x)dx + \frac{1}{2GA_S}\int_0^L Q^2(x)dx$$

$$= \frac{w_0^2}{72L^2EI}\int_0^L (x^3 - xL^2)^2 dx + \frac{w_0^2}{72L^2GA_S}\int_0^L (3x^2 - L^2)^2 dx = \frac{w_0^2}{72L^2EI}\frac{8L^7}{105} + \frac{w_0^2}{72L^2GA_S}\frac{4L^5}{5}$$

$$\boxed{E_{tot} = \frac{w_0^2 L^3}{18}\left(\frac{2L^2}{105EI} + \frac{1}{5GA_S}\right)}$$

Aufgabe S3:

Ein abgewinkelter Balken ist am freien Ende einer Last F beaufschlagt.



Wie groß ist die Absenkung f des Kraftangriffspunktes unter Vernachlässigung der Schubdeformationen aufgrund der Querkraft, wenn das Flächenträgheitsmoment für Torsion im Abschnitt 2 I_T ist?

Lösung zu Aufgabe S3:

Aufgabenteil a):

1. Innere Momente und Querkräfte berechnen

$$|M_2| = x_2 F, \qquad |T_2| = aF, \qquad |M_1| = x_1 F$$

Bemerkung: Die Momente wurden mit Betragszeichen gesetzt, da das Vorzeichen aufgrund des Quadrats keine Rolle spielt.

2. Arbeitssatz anwenden und f berechnen

$$\frac{1}{2}Ff = \frac{1}{2EI_2}\int_0^l M_2^2\,dx_2 + \frac{1}{2GI_T}\int_0^l T_2^2 dx_2 + \frac{1}{2EI_1}\int_0^l M_1^2 dx_1$$

$$= \frac{F^2}{2EI_2}\int_0^l x_2^2\,dx_2 + \frac{F^2a^2}{2GI_T}\int_0^l dx_2 + \frac{F^2}{2EI_1}\int_0^a x_1^2 dx_1 = \frac{F^2l^3}{6EI_2} + \frac{F^2a^2l}{2GI_T} + \frac{F^2a^3}{6EI_1} = \frac{1}{2}Ff$$

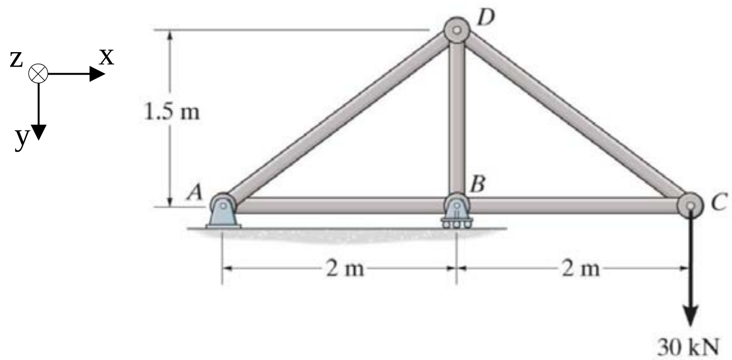
$$\boxed{f = F\left(\frac{l^3}{3EI_2} + \frac{a^2l}{GI_T} + \frac{a^3}{3EI_1}\right)}$$

Mechanik II: Deformierbare Körper

für D-BAUG, D-MAVT **Haus- & Schnellübung 11**

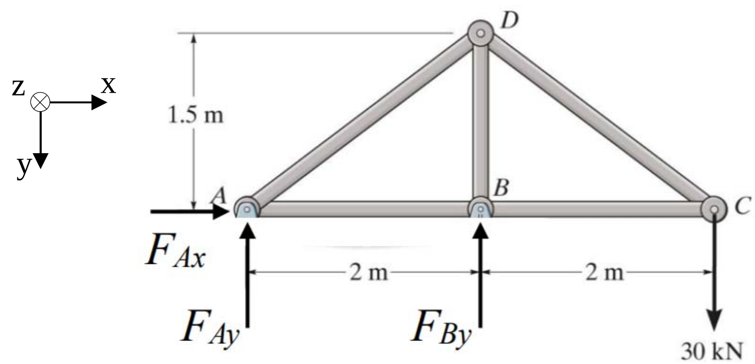
Aufgabe H1

Berechnen Sie die Verschiebung v_C des Punktes C in y-Richtung. Das Fachwerk besteht aus runden Stäben mit einem Durchmesser von 40mm und aus dem Material AA 2014-T6 Aluminium ($E = 73.1GPa$).



Lösung zu Aufgabe H1:

1. Lagerkräfte berechnen



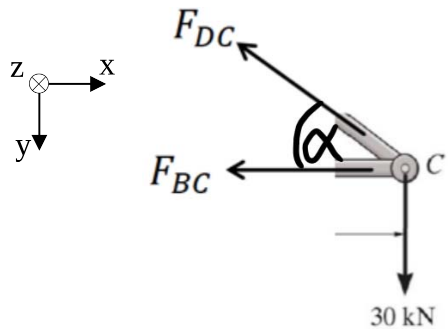
$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_{Ax} = 0, \qquad \sum M_B = 0 \rightarrow F_{Ay} = -30kN, \qquad \sum F_y = 0 \rightarrow F_{By} = 60kN$$

2. Stabkräfte berechnen

2.1. $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ bestimmen

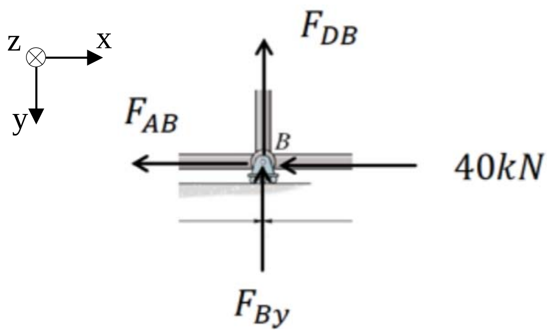
$$\sin\alpha = \frac{\frac{3}{2}}{\underbrace{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2}}_{\frac{5}{2}}} = \frac{3}{5}, \qquad \cos\alpha \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2}} = \frac{4}{5}$$

2.2. Knotengleichgewicht in C



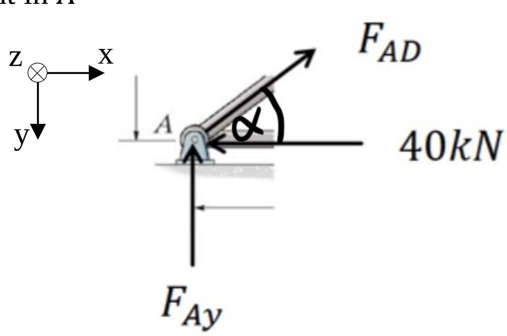
$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_{DC} = \frac{30kN}{\sin\alpha} = 50kN, \qquad \sum F_x = 0 \rightarrow F_{BC} = -\cos\alpha\, F_{DC} = -40kN$$

2.3. Knotengleichgewicht in B



$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_{AB} = -40kN, \qquad \sum F_y = 0 \rightarrow F_{DB} = -F_{By} = -60kN$$

2.4. Knotengleichgewicht in A



$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_{AD} = \frac{40kN}{\cos\alpha} = 50kN$$

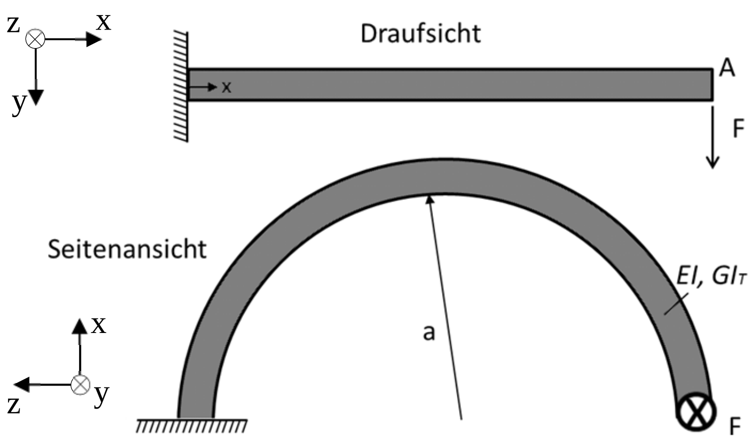
3. Mittels Arbeitssatz die Verschiebung v_C berechnen

$$\frac{1}{2}Ff = \frac{2}{E\pi d^2}\left(\int_0^{2.5m} F_{AD}^2 dx + \int_0^{1.5m} F_{DB}^2 dx + \int_0^{2m} F_{AB}^2 dx + \int_0^{2m} F_{BC}^2 dx + \int_0^{2.5m} F_{DC}^2 dx\right)$$

$$\rightarrow f = \frac{4}{FE\pi d^2}\left(2.5m \cdot F_{AD}^2 + 1.5m \cdot F_{DB}^2 + 2m \cdot F_{AB}^2 + 2m \cdot F_{BC}^2 + 2.5m \cdot F_{DC}^2\right) = \boxed{8.817mm}$$

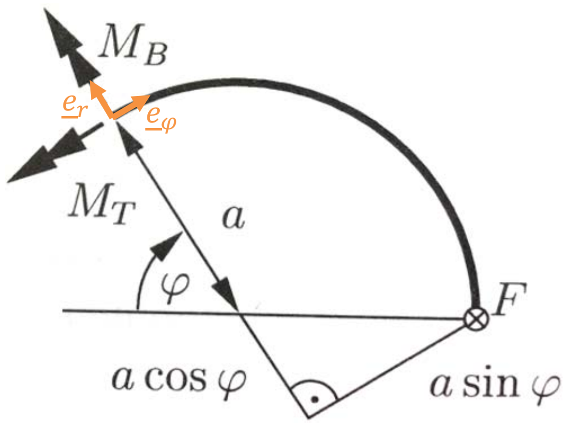
Aufgabe H2

Ein halbkreisförmiger, eingespannter Träger ist in *A* durch die Kraft *F* belastet. Wie groß ist die Absenkung des Kraftangriffspunktes unter Vernachlässigung der Schubdeformationen aufgrund der Querkraft?



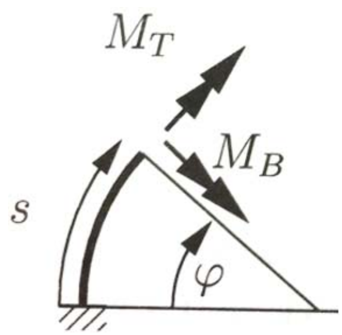
Lösung zu Aufgabe H2:

1. Inneres Biege- und Torsionsmoment bestimmen



$$\sum M_r = 0 \rightarrow M_B(\varphi) = -Fa\sin\varphi\,, \qquad \sum M_\varphi = 0 \rightarrow M_T(\varphi) = Fa(1+\cos\varphi)$$

2. Laufvariable *s* finden



$$s(\varphi) = a\varphi, \qquad \Delta s = a \cdot \Delta\varphi$$

3. Absenkung des Kraftangriffpunktes berechnen

$$\frac{1}{2}Ff = \frac{1}{2EI}\int_{s(0)}^{s(\pi)} M_B^2(\varphi)ds + \frac{1}{2GI_T}\int_{s(0)}^{s(\pi)} M_T^2(\varphi)ds$$

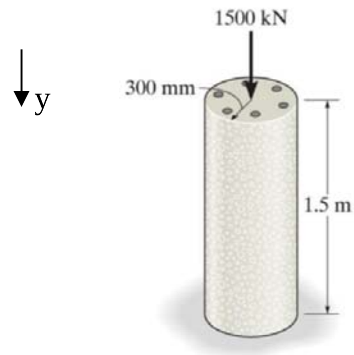
$$= \frac{F^2a^3}{2EI}\underbrace{\int_0^{\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi}_{\frac{\pi}{2}} + \frac{F^2a^3}{2GI_T}\underbrace{\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2 d\varphi}_{\frac{3\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}F^2a^3\left(\frac{1}{EI} + \frac{3}{GI_T}\right)$$

$$\rightarrow \boxed{f = \frac{\pi}{2}Fa^3\left(\frac{1}{EI} + \frac{3}{GI_T}\right)}$$

Aufgabe H3

Gegeben sei eine Betonsäule ($E_B = 25GPa$), die mit sechs Stahlstäben ($E_S = 200GPa$) verstärkt wird. Die Säule habe einen Durchmesser von 300mm und jeder Stab habe einen Durchmesser von 25mm. Wie viel Energie nimmt die Säule auf, wenn sie eine Kraft von 1500kN und ihr Eigengewicht halten muss?

Die Kraft sei homogen auf die Fläche verteilt und die Reibung zwischen den Materialen sei vernachlässigbar.



Geg.: $\rho_B = 2300\frac{kg}{m^3}, \rho_S = 7900\frac{kg}{m^3}, g = 9.81\frac{m}{s^2}$

Lösung zu Aufgabe H3:

1. Kräfteverteilung analysieren

Falls F_B die Kraft ist, die auf dem Beton wirkt und F_S die Kraft ist, die auf eine Stahlsäule wirkt, gilt:

$$1500kN = F_B + 6F_S \qquad (1)$$

Zum Berechnen der Kräfte benutzt man folgende Randbedingung:

$$\Delta l_B = \Delta l_S$$

Dadurch erhält man den folgenden Zusammenhang:

$$\frac{F_B l_B}{E_B A_B} = \frac{F_S l_S}{E_S A_S} \overset{l_B = l_S}{\Rightarrow} \frac{F_B}{F_S} = \frac{E_B A_B}{E_S A_S} = \frac{E_B(d_B^2 - 6d_S^2)}{E_S d_S^2} = 17.25 \qquad (2)$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) erhält man:

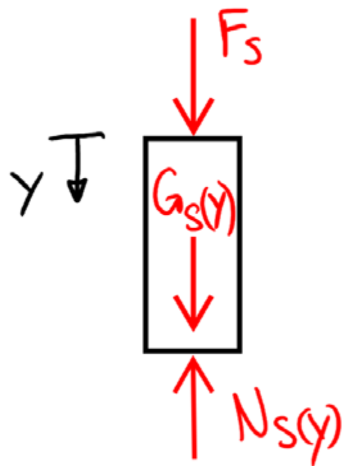
$$F_S = 64.516kN, \qquad F_B = 1112.904kN$$

2. Axialkraft in einem Stahlstab bestimmen

2.1. $G_S(y)$ finden

$$G_S(y) = \frac{\pi}{4} d_S^2 g \rho_S y$$

2.2. $N_S(y)$ berechnen



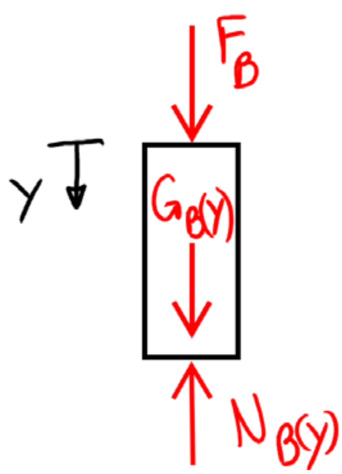
$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_S(y) = \frac{\pi}{4} d_S^2 g \rho_S y + F_S$$

3. Axialkraft in der Betonsäule bestimmen

3.1. $G_B(y)$ finden

$$G_B(y) = \frac{\pi}{4}(d_B^2 - 6d_S^2) g \rho_B y$$

3.2. $N_B(y)$ berechnen



$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_B(y) = \frac{\pi}{4}(d_B^2 - 6d_S^2) g\rho_B y + F_B$$

4. Aufgenommene Energie berechnen

$$E_{tot} = E_B + 6E_S = \frac{1}{2E_B A_B}\int_0^{l_B} N_B^2(y)dy + \frac{6}{2E_S A_S}\int_0^{l_S} N_S^2(y)dy$$

$$= \frac{2}{E_B\pi(d_B^2 - 6d_S^2)}\int_0^{l_B}\left(\frac{\pi}{4}(d_B^2 - 6d_S^2)g\rho_B y + F_B\right)^2 dy + \frac{12}{E_S\pi d_S^2}\int_0^{l_S}\left(\frac{\pi}{4}d_S^2 g\rho_S y + F_S\right)^2 dy$$

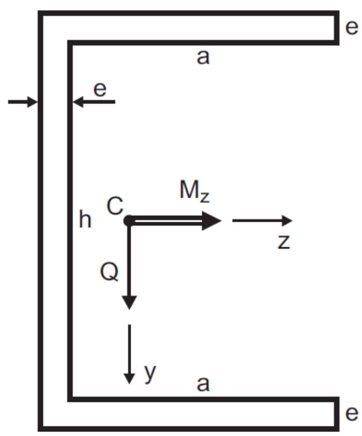
$$= \frac{8}{3E_B\pi^2(d_B^2 - 6d_S^2)^2 g\rho_B}\left[\left(\frac{\pi}{4}(d_B^2 - 6d_S^2)g\rho_B l_B + F_B\right)^3 - F_B^3\right] + \frac{48}{3E_S\pi^2 d_S^4 g\rho_S}\left[\left(\frac{\pi}{4}d_S^2 g\rho_S l_S + F_S\right)^3 - F_S^3\right]$$

$$\boxed{E_{tot} = 740.600J}$$

Wiederholungsaufgabe 1:

Der in der Abbildung gezeigte, dünnwandige Querschnitt ($I_T = \frac{1}{3}(2a + h)e^3$) ist mit einer Querkraft Q in positive y-Richtung und einem Biegemoment M_z in positive z-Richtung beansprucht.

Die infolge Biegung auftretenden Schubspannungen in den Flaschen erzeugen ein Torsionsmoment bezüglich des Flächenmittelpunktes, das zusätzliche Schubspannungen im vorliegenden Querschnitt induziert.



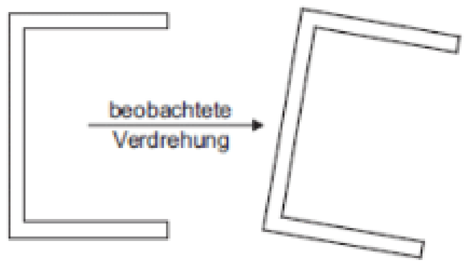
a) Berechnen Sie die Schubspannungsverteilungen infolge Biegung im Steg und in den Flanschen. Bestimmen Sie anschliessend Betrag und Ort der infolge Biegung maximalen Schubspannung. Tragen Sie den Schubspannungsverlauf mit Pfeilen ein.

b) Bestimmen Sie das durch die Schubspannungen infolge Biegung resultierende Torsionsmoment T_B. Berechnen Sie die spezifische Verdrehung, die durch das entsprechende innere Torsionsmoment T_T hervorgerufen wird und geben Sie Betrag und Ort der maximalen Schubspannungen an. Welchen Schluss können sie ziehen, wenn Sie die maximalen Schubspannungen vergleichen?

c) Um die Verdrehung des Querschnittes zu vermeiden, muss die Querkraft im Schubmittelpunkt angreifen. Berechnen Sie für diesen Querschnitt den Abstand z_D vom Flächenmittelpunkt.

Lösung zur Wiederholungsaufgabe 1:

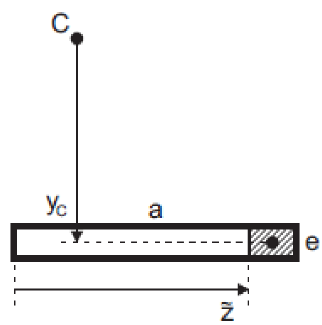
Der gegebene Querschnitt ist auf Querkraft und Biegung beansprucht. Die Beanspruchung erfolgt in Richtung der Hauptachsen, es handelt sich also um spezielle Biegung, allerdings beobachtet man im Experiment eine unerwartete Verdrehung des Querschnitts.



Die Begründung dieser Art der Deformation lässt sich mittels der Betrachtung der Schubspannungsverteilung erklären.

Aufgabenteil a):

1. $H_z^{Flansch}$ bestimmen



$$H_z^{Flansch}(\tilde{z}) = y_c \cdot dA(\tilde{z}) = \left(\frac{h+e}{2}\right)(a-\tilde{z})e = \frac{eh}{2}(a-\tilde{z}) + \frac{e^2}{2}(a-\tilde{z}) \approx \frac{eh}{2}(a-\tilde{z})$$

2. Schubspannung im Flansch berechnen

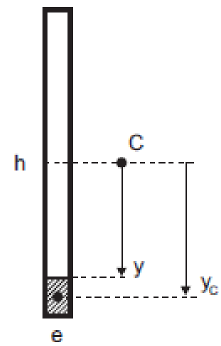
2.1. Flächenträgheitsmoment bestimmen

$$I = \frac{eh^3}{12} + 2\frac{ae^3+e^4}{12} + 2\frac{(e+h)^2}{4}(e+a)e \approx \frac{eh^3}{12} + \frac{h^2ae}{2} = \frac{h^2e}{2}\left(\frac{h}{6}+a\right)$$

2.2. Schubspannungsverteilung finden

$$\tau_{zx}(\tilde{z}) = \frac{QH_z^{Flansch}(\tilde{z})}{Ie} = \boxed{\frac{6}{eh}\frac{Q(a-\tilde{z})}{h+6a}}$$

3. $\boldsymbol{H_z^{Steg}}$ **bestimmen**



$$H_z^{Steg}(y) = H_z(\tilde{z}) + y_c(y) \cdot dA(y) = \frac{eah}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + y\right)\left(\frac{h}{2} - y\right)e = \left(ah + \frac{h^2}{4} - y^2\right)\frac{e}{2}$$

4. Schubspannung im Steg berechnen

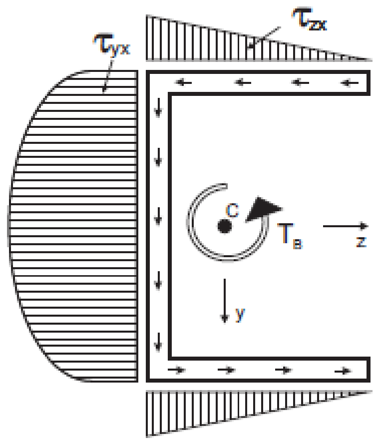
$$\tau_{yx}(y) = \frac{QH_z^{Steg}}{Ie} = \boxed{\frac{Q\left(ah + \frac{h^2}{4} - y^2\right)}{h^2 e\left(\frac{h}{6} + a\right)}}$$

5. Ort und Betrag der maximalen Schubspannung bestimmen

$$\tau_{yx,max} = \tau_{yx}(0) = \boxed{\frac{3Q}{2he}\frac{(4a + h)}{(6a + h)}}$$

6. Schubspannungsverläufe zeichnen

Die aus der Biegung resultierende Schubspannungsverteilung ist in der unteren Skizze eingezeichnet. Der Schubfluss würde vermuten lassen, dass sich der Balken in genau der entgegengesetzten Richtung verdrehen würde, als tatsächlich im Experiment beobachtet. Dies deutet darauf hin, dass eine zweite Schubspannungsverteilung im Querschnitt vorhanden sein muss, die der biegungsbedingten Schubspannungen überlagert ist. Dabei müssen diese zusätzlichen Schubspannungen eine solche Verteilung haben, dass sie die Verdrehung des Querschnittes erklären. Weiter müssen sie vom Betrag so sein, dass sie das Torsionsmoment aus Schubspannungen infolge Biegung kompensieren, da gemäss Aufgabenstellung keinerlei Torsionsbeanspruchung in unserem Querschnitt vorhanden sein darf. Dies soll nun im folgenden Aufgabenteil diskutiert werden.



Aufgabenteil b):

1. Abstand z_C vom Schwerpunkt zum Steg bestimmen

$$z_C = \frac{\sum_i \bar{z}_i A_i}{\sum_i A_i} = \frac{\frac{e}{2}he + 2 \cdot \frac{a}{2}ea}{he + 2ea} = \frac{a^2}{h+2a}$$

2. T_B und T_T berechnen

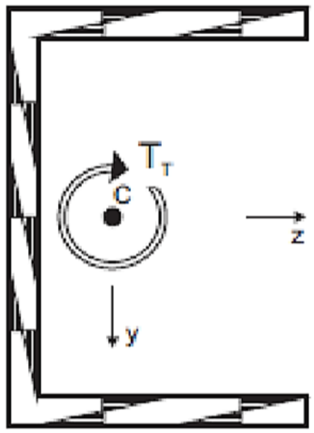
$$F^{Steg} = Q, \qquad F^{Flansch} = e\int_0^a \tau_{zx}(\bar{z})d\bar{z} = \frac{6}{h}\int_0^a \frac{Q(a-\tilde{z})}{h+6a}d\bar{z} = \frac{3}{h}\frac{Qa^2}{h+6a}$$

$$T_B = z_C F^{Steg} + 2 \cdot \frac{h}{2}F^{Flansch} = \frac{Qa^2}{h+2a} + 3\frac{Qa^2}{h+6a} = \boxed{4Qa^2\frac{h+3a}{(h+2a)(h+6a)}}$$

Da T_T die innere Reaktion des Querschnitts auf die Biegung ist, gilt

$$T_T = -T_B = \boxed{-4Qa^2\frac{h+3a}{(h+2a)(h+6a)}}$$

Bemerkung: Wie oben bereits erklärt, darf kein Torsionsmoment im Querschnitt vorhanden sein. Dies bedeutet, dass eine zweite Schubspannungsverteilung wirken muss, die sowohl T_B kompensiert wie auch die beobachtete Verdrehung des Querschnitts erklärt. Diese zweite Schubspannungsverteilung T_T muss folgendermassen zu T_B stehen: $T_T = -T_B$ und eine Verteilung wie in der Skizze auf der nächsten Seite haben.



3. **Spezifische Verdrehung bestimmen**
   Aufgrund der vorhandenen Schubspannungsverteilung gibt es neben einer Biegung eine spezifische Verdrehung des Querschnitts in Abhängigkeit der Koordinate x. Diese ist gegeben durch das Verhältnis von Torsion zur material- und querschnittsabhängigen Verdrehsteifigkeit.

$$\vartheta' = \frac{T_T}{GI_T} = \boxed{\frac{-12Qa^2(h+3a)}{G(h+2a)^2(h+6a)e^3}}$$

4. **Maximale Schubspannung infolge Torsion berechnen**

$$\tau_{T,max} = G\vartheta' e = \frac{T_T e}{I_T} = \boxed{\frac{12Qa^2(h+3a)}{(h+2a)^2(h+6a)e^2}}$$

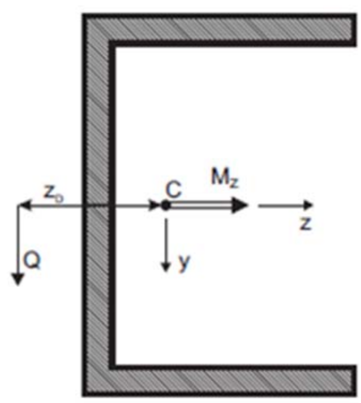
<u>Bemerkung:</u> Wenn man die Nenner vergleicht, sieht man, dass $\tau_{T,max}$ durch e^2 und $\tau_{yx,max}$ durch eh geteilt wird. Da wir wissen, dass $e \ll h$ und somit $e^2 \ll eh$, ist die infolge Torsion verursachte Schubspannung $\tau_{T,max}$ viel grösser als die infolge Biegung verursachte Schubspannung $\tau_{yx,max}$ und müssen unbedingt berücksichtigt werden. Je nach Geometrie des Querschnitts können diese Schubspannungen sogar in der Grössenordnung der Normalspannungen aus der Biegung liegen.

Aufgabenteil c):

Um die Verdrehung des Querschnittes zu verhindern, muss neben dem Biegemoment und der Querkraft gleichzeitig ein Torsionsmoment von Betrag T_B wirken, wie es von der Schubspannungsverteilung infolge Biegung und Querkraft erfordert wird. Um dieses Moment zu erzeugen, lässt man also die Querkraft nicht im Flächenmittelpunkt C angreifen, sondern verschiebt sie in einen Punkt D, dessen Abstand zum Flächenmittelpunkt z_D aus der Forderung

$$z_D \cdot Q = T_T$$

folgt.

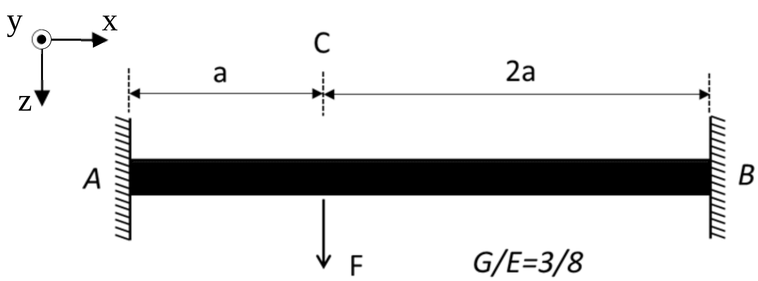


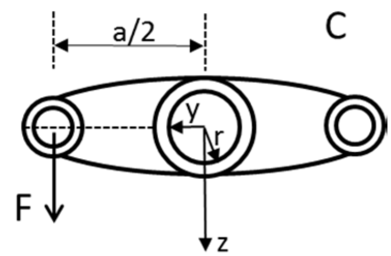
Der Schubmitteltpunkt lässt sich also bestimmen zu:

$$z_D = \frac{T_T}{Q} = \boxed{-\frac{4a^2(h+3a)}{(h+2a)(h+6a)}}$$

Wiederholungsaufgabe 2:

Der beiderseits eingespannte Träger mit dünnwandigem Kreisquerschnitt ist in C exzentrisch belastet. Wie groß ist die Absenkung des Kraftangriffspunktes und wie groß sind die Normalspannungen und Schubspannungen infolge Torsion?





Lösen Sie die Aufgabe ohne virtuelle Kräfte und Momente und unter Berücksichtigung aller Belastungen.

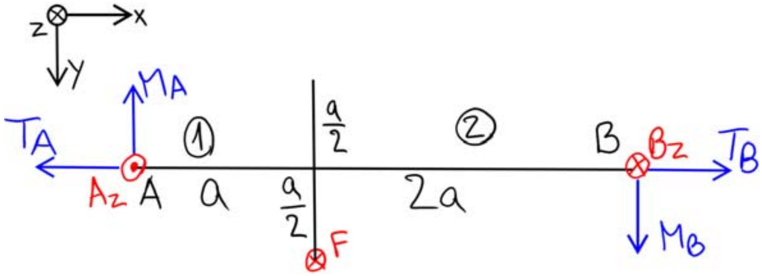
a) Finden Sie die Absenkung des Kraftangriffspunktes in Abhängigkeit von a, F, E, r.

b) Wie gross sind die grössten auftretenden Normal- und Schubspannungen im ganzen Träger?

Lösung zur Wiederholungsaufgabe 2:

Aufgabenteil a):

1. Lagerkräfte und -momente in Abhängigkeit der Reaktionen in B berechnen

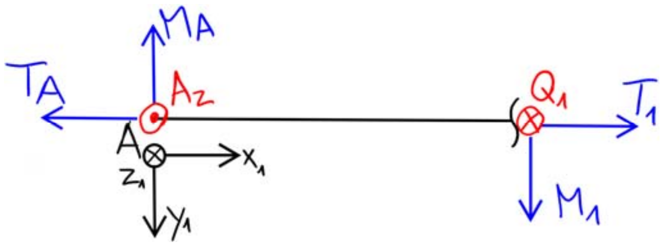


$$\sum F_z = 0 \rightarrow A_z = F + B_z, \qquad \sum T = 0 \rightarrow T_A = T_B + \frac{a}{2}F$$
$$\sum M_{A,y} = 0 \rightarrow M_A = M_B - a(3B_z + F)$$

2. Innere Beanspruchung bestimmen

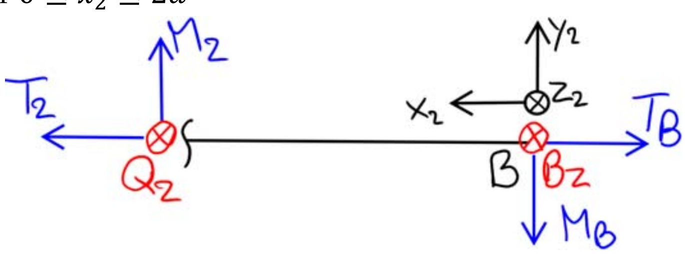
Um beim Berechnen der Integrationskonstanten der Biegelinie einen kleineren Rechenaufwand zu haben, führen wir in A das Rechtssystem x_1, y_1, z_1 und in B das Rechtssystem x_2, y_2, z_2 ein. Dabei soll man beachten, dass $\underline{e}_{x_1} = \underline{e}_x, \underline{e}_{y_1} = \underline{e}_y, \underline{e}_{x_2} = -\underline{e}_x, \underline{e}_{y_2} = -\underline{e}_y$ und $\underline{e}_{z_1} = \underline{e}_{z_2} = \underline{e}_z$

2.1. Im Abschnitt 1 für $0 \leq x_1 \leq a$



$$\sum M = 0 \rightarrow M_1 = M_B - a(3B_z + F) + (F + B_z)x_1,$$
$$\sum T = 0 \rightarrow T_1 = T_B + \frac{a}{2}F, \qquad \sum F_z = 0 \rightarrow Q_1 = F + B_z$$

2.2. Im Abschnitt 2 für $0 \leq x_2 \leq 2a$



$$\sum F_z = 0 \rightarrow Q_2 = -B_z, \qquad \sum M = 0 \rightarrow M_2 = M_B - x_2 B_z,$$
$$\sum T = 0 \rightarrow T_2 = T_B$$

3. Biegelinien finden

Wenn man die gegeben Koordinatensysteme betrachtet, würde sich bei positiver Momentenrichtung der Stab im Abschnitt 1 und im Abschnitt 2 in Richtung $-\underline{e}_z$ verformen. Da aber die Biegelinie in Richtung $\underline{e}_z$ positiv ist, müssen die Biegelinien $v_1(x_1)$ und $v_2(x_2)$ mit einem negativen Vorzeichen korrigiert werden.

3.1. Im Abschnitt 1 für $0 \leq x_1 \leq a$

$$v_1(x_1) = -\frac{1}{EI}\iint M_1 dx_1 = \frac{1}{EI}\iint -M_B + a(3B_z + F) - (F + B_z)x_1 dx_1$$
$$= -\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}(B_z + F)x_1^3 \frac{1}{2}[M_B - a(3B_z + F)]x_1^2 + C_1 x + C_2\right)$$

$$v_1(0) = \frac{1}{EI}C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0, \qquad v_1'(0) = \frac{1}{EI}C_1 = 0 \rightarrow C_1 = 0$$
$$\rightarrow v_1(x) = -\frac{1}{2EI}\left(\frac{1}{3}(B_z + F)x_1^3 + [M_B - a(3B_z + F)]x_1^2\right)$$

3.2. Im Abschnitt 2 für $0 \leq x_2 \leq 2a$

$$v_2(x_2) = -\frac{1}{EI}\iint M_2 dx_2 = \frac{1}{EI}\iint x_2 B_z - M_B dx_2$$
$$= \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{6}B_z x_2^3 - \frac{1}{2}M_B x_2^2 + C_3 x + C_4\right]$$

Mit den Lagerbedingungen $v_2(0) = v_2'(0) = 0$ erhält man die Konstanten

$$C_3 = 0, \qquad C_4 = 0$$

$$\rightarrow v_2(x_2) = \frac{1}{2EI}\left[\frac{1}{3}B_z x_2^3 - M_B x_2^2\right]$$

4. Drehwinkelverlauf finden

4.1. Im Abschnitt 1 für $0 \leq x_1 \leq a$

$$\vartheta_1(x_1) = \int \frac{T_1}{I_T G} dx_1 = \frac{T_1 x}{I_T G} + C_5 = \frac{2T_B + aF}{2I_T G} x$$
$$\vartheta_1(0) = C_5 = 0$$

4.2. Im Abschnitt 2 für $0 \leq x_2 \leq 2a$

$$\vartheta_2(x_2) = \int \frac{T_2}{I_T G} dx_2 = \frac{T_2 x_2}{I_T G} + C_6 = \frac{T_B}{G I_T} x_2$$
$$\vartheta_2(0) = 0 \rightarrow C_6 = 0$$

5. Durch die Übergangsbedingungen die Reaktionen in *B* berechnen

5.1. Übergangsbedingungen aufstellen

Da man drei unbekannte Lagerreaktionen in B hat, sucht man drei Übergangsbedingungen. Damit der Übergang vom ersten in den zweiten Abschnitt stetig ist, müssen folgende Bedingungen gelten:

$$v_1(a) = v_2(2a), \qquad v_1'(a) = -v_2'(2a), \qquad \vartheta_1(a) = -\vartheta_2(2a)$$

<u>Bemerkung:</u> Da $\underline{e}_{x_1} = -\underline{e}_{x_2}$, sind die positive Drehrichtungen für die Drehwinkel ϑ_1 und ϑ_2 entgegengesetzt, was zum Vorzeichenunterschied in der Übergangsbedingung führt. Das gleiche gilt auch bei der Übergangsbedingung für die Steigung der Biegelinie. Für den Übergang der Biegelinie wurde schon im Teil 3 gesorgt.

5.2. Reaktionen in B bestimmen

Nachdem man das 3x3-Gleichungssystem gelöst hat, sollte man auf folgende Resultate kommen:

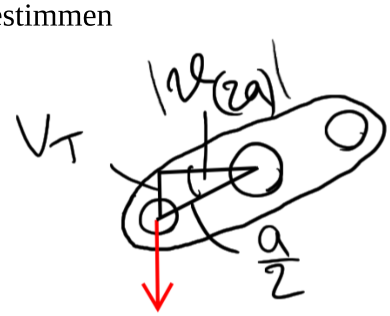
$$B_z = -\frac{7F}{27}, \qquad M_B = -\frac{2aF}{9}, \qquad T_B = -\frac{aF}{6}$$

6. Absenkung berechnen

6.1. Absenkung durch Biegung finden

$$v_1(x_1) = \frac{2F x_1^2}{81EI}(9a - 5x_1) \rightarrow v_{Biegung} = v_1(a) = \frac{8a^3 F}{81EI}$$

6.2. Absenkung durch Torsion bestimmen



$$\vartheta_1(x_1) = \frac{aFx}{GI_T} \rightarrow \vartheta_1(a) = \frac{a^2F}{GI_T}$$

Für kleine Drehungen gilt:

$$v_T \approx \frac{a}{2}|\vartheta_1(2a)| = \frac{a^3F}{2GI_T}$$

Die totale Absenkung am Kraftangriffspunktes ist also

$$v_C = v_{Biegung} + v_T = a^3F\left(\frac{8}{81EI} + \frac{1}{GI_T}\right) \overset{I_T=2I=2\pi r^3 t,\ G=\frac{3E}{8}}{\triangleq} \frac{26a^3F}{81E\pi r^3 t}$$

7. Grösste Spannungen finden

7.1. Grösste Biegespannung finden

$$\sigma_{b,max} = \frac{|M|_{max}r}{I} = \frac{|M_1(0)|r}{I} = \frac{4aFr}{9I}$$

Da die Biegemomente linear verlaufen, befindet sich das maximale Biegemoment entweder bei A oder bei B oder bei C.

$$A: M_1(0) = M_B - a(3B_z + F) = -\frac{4aF}{9}, \qquad B: M_2(0) = M_B = -\frac{2aF}{9},$$

$$C: M_1(a) = \frac{8aF}{27}$$

7.2. Grösste Schubspannung wegen Torsion finden

$$\tau_{x\varphi,max} = \frac{|T|_{max}r}{I_T} = \frac{|T_1|r}{I_T} = \frac{aFr}{6I}$$

$$T_1 = T_B + \frac{a}{2}F = \frac{aF}{3}, \qquad T_2 = T_B = -\frac{aF}{6}$$

7.3. Grösste auftretende Normalspannungen berechnen

Die grösste auftretenden Normalspannung ist die grösste Hauptspannung:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{b,max}}{2} + \sqrt{\frac{\sigma_{b,max}^2}{4} + \tau_{x\varphi,max}^2} = \boxed{\frac{aFr}{2I}}$$

7.4. Grösste auftretende Schubspannungen berechnen

$$\tau_{max} = \sqrt{\frac{\sigma_{b,max}^2}{4} + \tau_{x\varphi,max}^2} = \boxed{\frac{5aFr}{18I}}$$