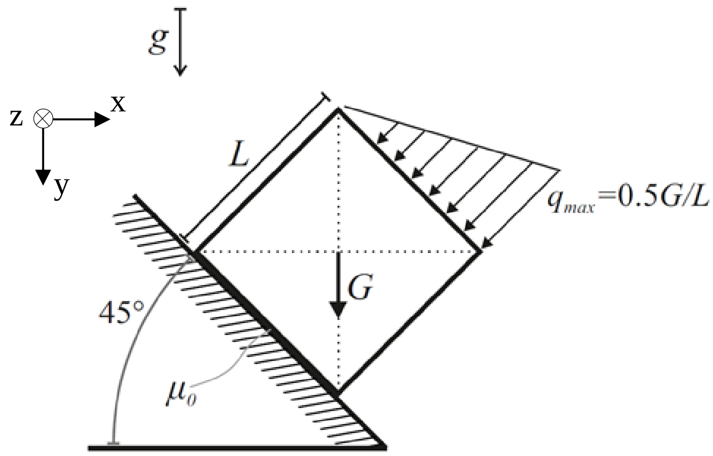
Mechanik II: Deformierbare Körper

für D-BAUG, D-MAVT **Haus- & Schnellübung 1**

Aufgabe S1:

Ein Würfel mit Kantenlänge L und Gewicht G liegt reibungsbehaftet auf einer schiefen Ebene (Winkel 45°). Wie in der Skizze dargestellt, wirkt am Würfel eine dreiecksverteilte Linienlast mit $q_{\max} = 0.5\frac{G}{L}$.

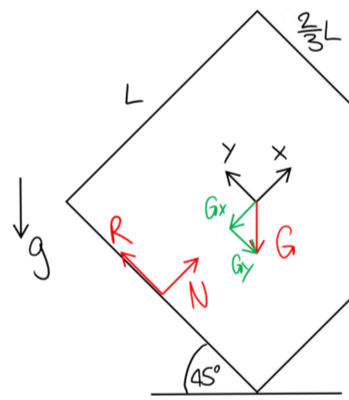
Berechnen Sie die Bedingung für den Haftreibungskoeffizienten μ_0, damit der Würfel in Ruhe ist. **Hinweis**: Die Standfestigkeit ist gegeben.



S1. 5 mögliche Antworten	Ⓐ $\mu_0 = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}$	Ⓑ $\mu_0 = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}$	Ⓒ $\mu_0 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$	Ⓓ $\mu_0 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$	Ⓔ $\mu_0 = \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+1}$

Lösung zu Aufgabe 1:

1. Freischnitt



Bemerkung: Das Koordinatensystem wurde so gewählt, damit man nur die Kraft G projizieren muss.

2. Q, G_x und G_y berechnen

Q ist die Resultierende der dreiecksverteilten Kraft:

$$Q = \frac{1}{2} q_{max} \cdot L = \frac{1}{2} \cdot 0.5 \frac{G}{L} \cdot L = \frac{1}{4} G$$

G_x und G_y sind die Projektionen der Gewichtskraft in x- und y-Richtung:

$$G_y = G_x = \frac{\sqrt{2}}{2} G$$

3. Gleichgewichtsbedingungen aufstellen

$$\sum F_x = N - \frac{\sqrt{2}}{2} G - Q = 0 \rightarrow N = Q + \frac{\sqrt{2}}{2} G, \qquad \sum F_y = R - \frac{\sqrt{2}}{2} G = 0 \rightarrow R = \frac{\sqrt{2}}{2} G$$

4. Haftreibungsbedingung aufstellen und nach $\boldsymbol{\mu_0}$ auflösen

Damit der Würfle nicht rutscht, muss folgende Ungleichheit erfüllt werden:

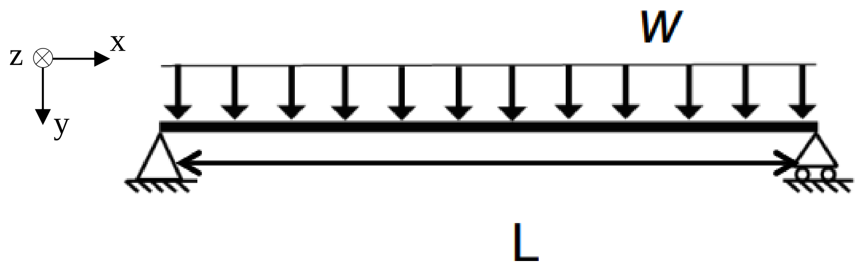
$$R \leq \mu_0 N$$

Setzt man die berechneten Werte für R und N ein kriegt man

$$\frac{\sqrt{2}}{2} G \leq \mu_0 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} G + Q \right) \overset{Q=\frac{1}{4}G}{\cong} \mu_0 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} G + \frac{1}{4} G \right) \rightarrow \mu_0 \geq \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} G}{\frac{\sqrt{2}}{2} G + \frac{1}{4} G} = \boxed{\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}}$$

Aufgabe S2:

Die untenstehende Abbildung zeigt einen Kragträger und eine linearverteilte, vertikal angreifende Kraft $w(x) = w$.



a) Berechnen Sie zuerst den Beanspruchungsverlauf der Querkraft $Q(x)$

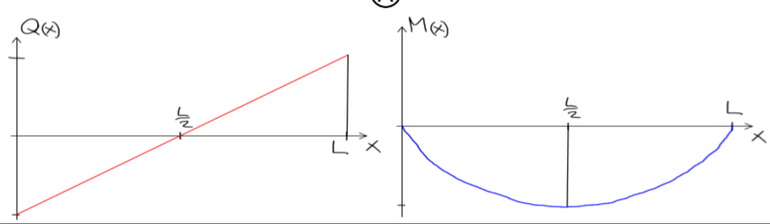
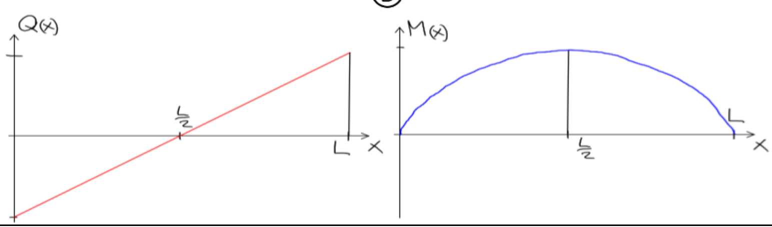
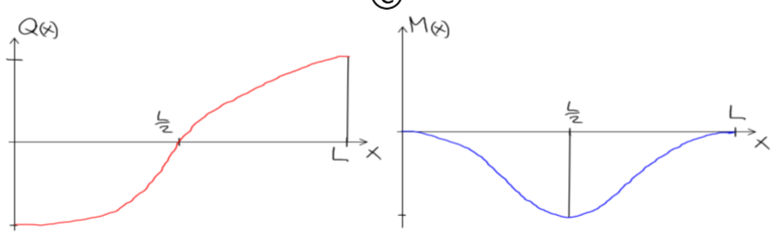
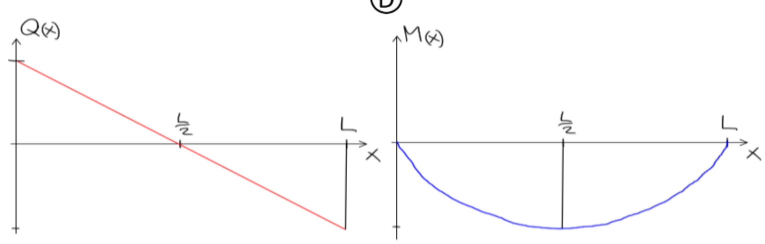
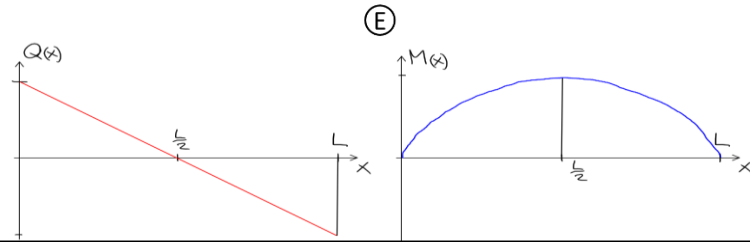
S2a. 5 mögliche Antworten	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ
	$Q(x) = w\left(\frac{L}{2} - x\right)$	$Q(x) = wx$	$Q(x) = w(L - x)$
	Ⓓ $Q(x) = w\left(\frac{L}{2} - x\right)^2$		Ⓔ $Q(x) = w\left(x - \frac{L}{2}\right)$

b) Berechnen Sie den Beanspruchungsverlauf Biegemomentes $M_b(x)$

S2b. 5 mögliche Antworten	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ
	$M_b(x) = \frac{wx^2}{2}$	$M_b(x) = wx\left(L - \frac{x}{2}\right)$	$M_b(x) = \frac{wx}{2}(L - x)$
	Ⓓ $M_b(x) = \frac{wx}{2}(x - L)$		Ⓔ $M_b(x) = w\left(\frac{L}{2} - x\right)^3$

c) Zeichnen Sie anschliessend den Verlauf von $Q(x)$ und $M(x)$

<table>
<tr><td rowspan="5">S2b.

5 mögliche Antworten</td><td>Ⓐ

</td></tr>
<tr><td>Ⓑ

</td></tr>
<tr><td>Ⓒ

</td></tr>
<tr><td>Ⓓ

</td></tr>
<tr><td>Ⓔ

</td></tr>
</table>

d) Wo erwarten Sie einen Bruch, falls P zu gross wird?

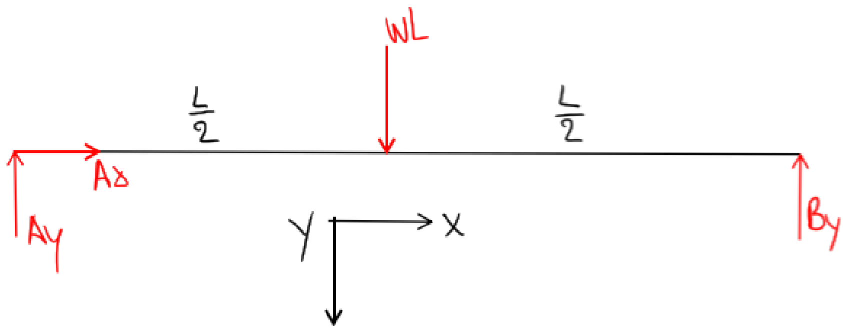
S2c. 5 mögliche Antworten	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
	$x = 0$	$x = L$	$x = \frac{L}{2}$	$x = \frac{L}{4}$	$x = \frac{3L}{4}$

Lösung zu Aufgabe H1:

Aufgabenteile a) & b)

1. Lagerkräfte berechnen

1.1 Freischnitt

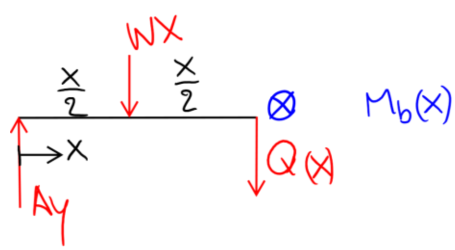


1.2 GGB lösen

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0, \qquad \sum F_y = 0 \rightarrow A_y = wL - B_y = \frac{1}{2}wL, \qquad M_A = 0 \rightarrow B_y = \frac{1}{2}wL$$

2. Beanspruchung im Abschnitt $0 < x < L$

2.1 Freischnitt von links



2.2 GGB lösen

$$\sum F_y = 0 \rightarrow Q(x) = \boxed{w\left(\frac{L}{2} - x\right)}$$

$$\sum M_z = M_b(x) + A_y \cdot x - wx \cdot \frac{x}{2} = 0 \rightarrow M_b(x) = \boxed{\frac{wx}{2}(x - L)}$$

3. Alternativer Lösungsweg mit den Differenzialbeziehungen

3.1 $Q(x)$ berechnen

$$Q(x) = \int -w(x)dx = -\int w dx = -wx + C_1$$

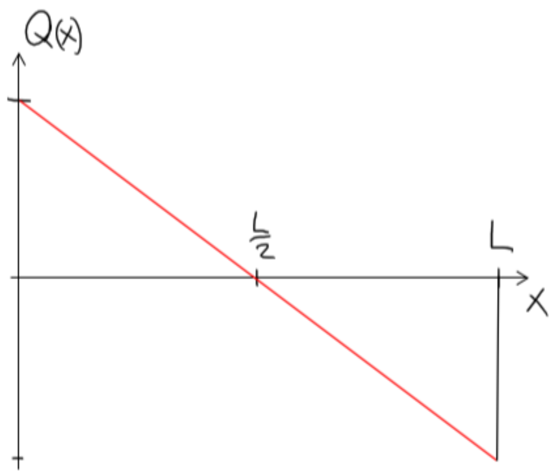
$$\text{mit } Q(0) = Q(L) = -\frac{wL}{2} \rightarrow C_1 = A_y = \frac{1}{2}wL \rightarrow \boxed{Q(x) = w\left(\frac{L}{2} - x\right)}$$

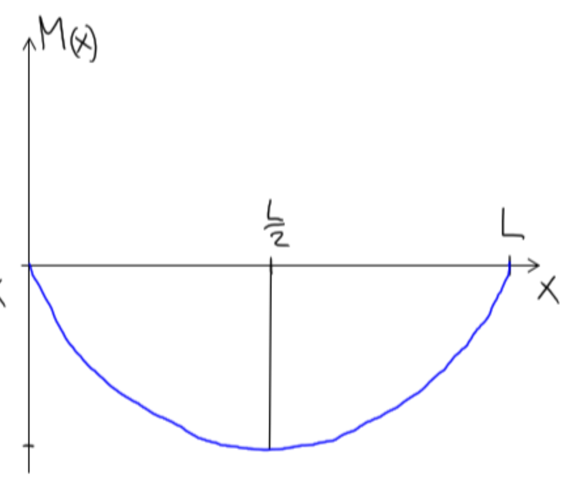
3.2 $M_b(x)$ berechnen

$$M_b(x) = \int -Q(x)dx = -\int \left(\frac{1}{2}wL - wx\right)dx = -\frac{1}{2}wL + \frac{1}{2}wx^2 + C_2$$

$$\text{mit } M_b(0) = M_b(L) = 0 \rightarrow C_2 = 0 \rightarrow \boxed{M_b(x) = \frac{1}{2}wx(x - L)}$$

Aufgabenteil c)





Aufgabenteil d)

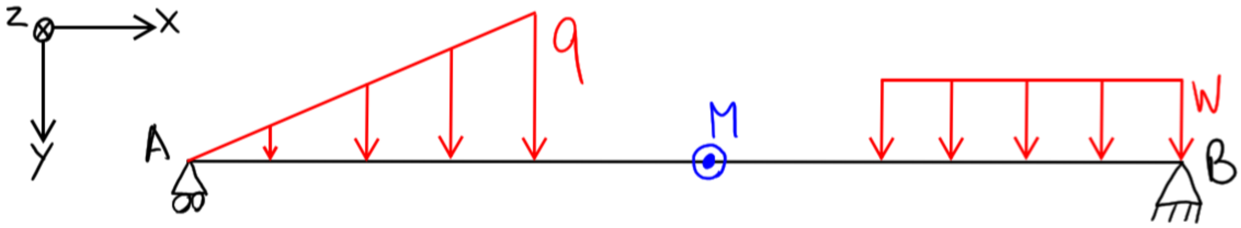
Es gibt zwei logische Szenarien, die in Frage kommen: Entweder bricht der Stab, wo die Querkraft am höchsten ist, oder dort, wo das Biegemoment am grössten ist.

Aus der Erfahrung kann man aber definitiv sagen, dass der Stab wegen des Biegemoments in der Mitte (bei $x = \frac{1}{2}L$) brechen wird. Einerseits, weil der Stab physikalisch nicht an seinen Enden brechen kann und anderseits, weil Momente generell höhere Belastungen im Material verursachen.

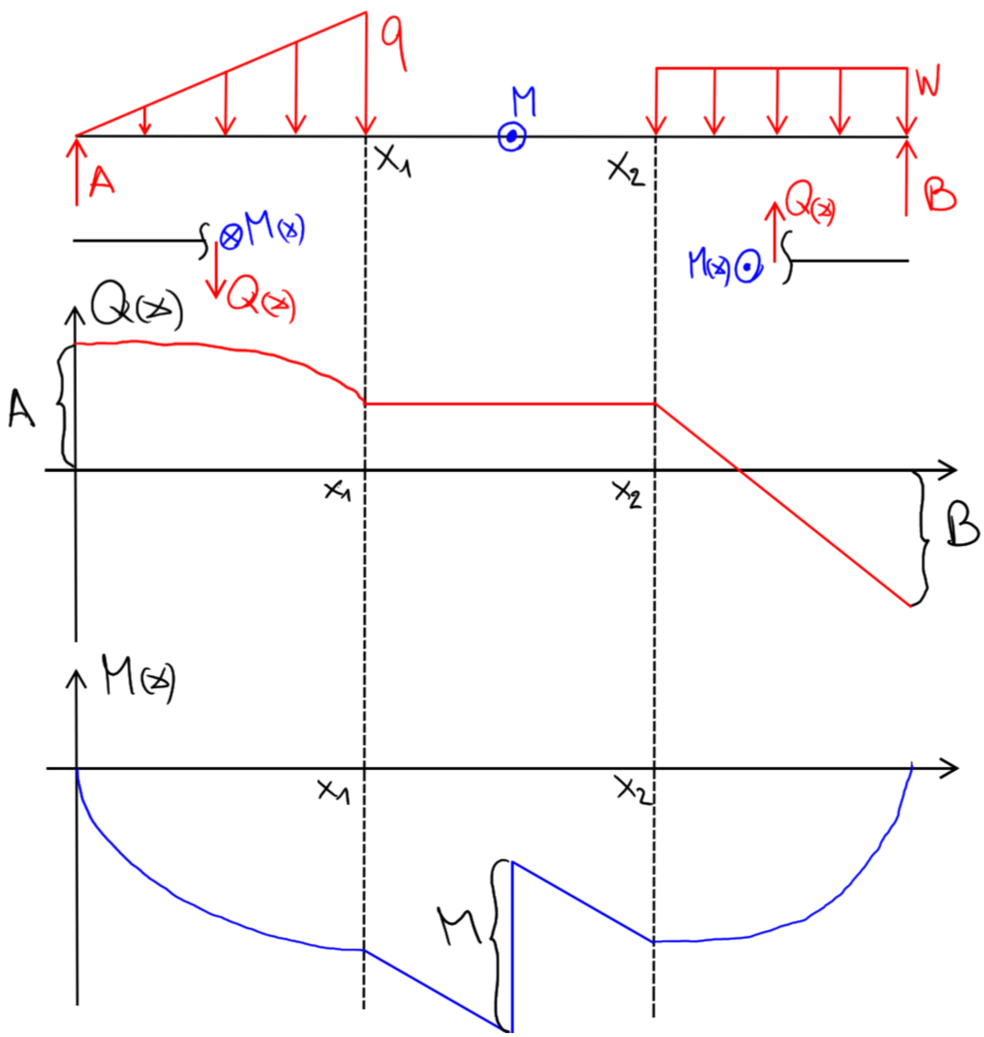
Der letzte Punkt wird noch im folgenden Semester besprochen, sobald ihr die inneren Spannungen, die durch Querkräfte und Biegemomente verursacht werden, berechnen könnt.

Aufgabe H1:

Zeichnen Sie (falls möglich intuitiv, d.h. ohne es explizit zu berechnen) das Querkraft- und Momentendiagramm des in der Skizze dargestellten Balkenträgers der Länge L.



Lösung zu Aufgabe H1:



Bemerkung: Für die folgende Erklärungen der Verläufe für jeden Abschnitt sollte man immer die Differenzialbeziehungen im Kopf haben und die Tatsache, dass $Q(x)$ und $M(x)$ in positiver Richtung eingeführt worden sind.

$$M(x) = -\int Q(x)dx = \int q(x)dx$$

Die inneren Belastungen sind Reaktionskräfte, das heisst sie wirken immer den äusseren Kräften entgegen.

Abschnitt $0 < x < x_1$
Für $x = 0$ muss $Q(x)$ gleich der Lagerkraft A sein. Danach nimmt die Querkraft parabolisch ab zu, weil mit zunehmendes x auch die Resultierende der verteilten Kraft zunimmt, welche die Lagerkraft A kompensiert ($Q(x)$ wird quasi von der verteilten Kraft geholfen die Lagerkraft auszugleichen).

Nachdem der Verlauf der Querkraft bestimmt ist, wissen wir aus den Differenzialbeziehungen, dass das Moment eine negative Funktion 3. Grades ist. Aus den Lagerbedingungen wissen wir auch, dass bei $M(x = 0) = 0$ sein muss.

Abschnitt $x_1 < x < x_2$
Da in diesem Abschnitt keine neue Kraft dazukommt, bleibt $Q(x)$ konstant.

Da die Querkraft positiv konstant bleibt, wird das Moment wegen den Differenzialbeziehungen linear steigen. Die Steigung hat vor und nach dem Sprung des Momentes die gleiche Steigung.

Punkt $x = x_2$
Bei $x = x_2$ kommt ein negatives Moment der Stärke M. Dies hat zur Folge, dass der Moment plötzlich um den Wert M sinkt.

Abschnitt $x_2 < x < L$
Da in diesem Abschnitt eine konstant verteilte Kraft wirkt, sinkt die Querkraft weiter, bis sie den Wert B erreicht hat.

Das Moment steigt parabolisch, bis es verschwindet.

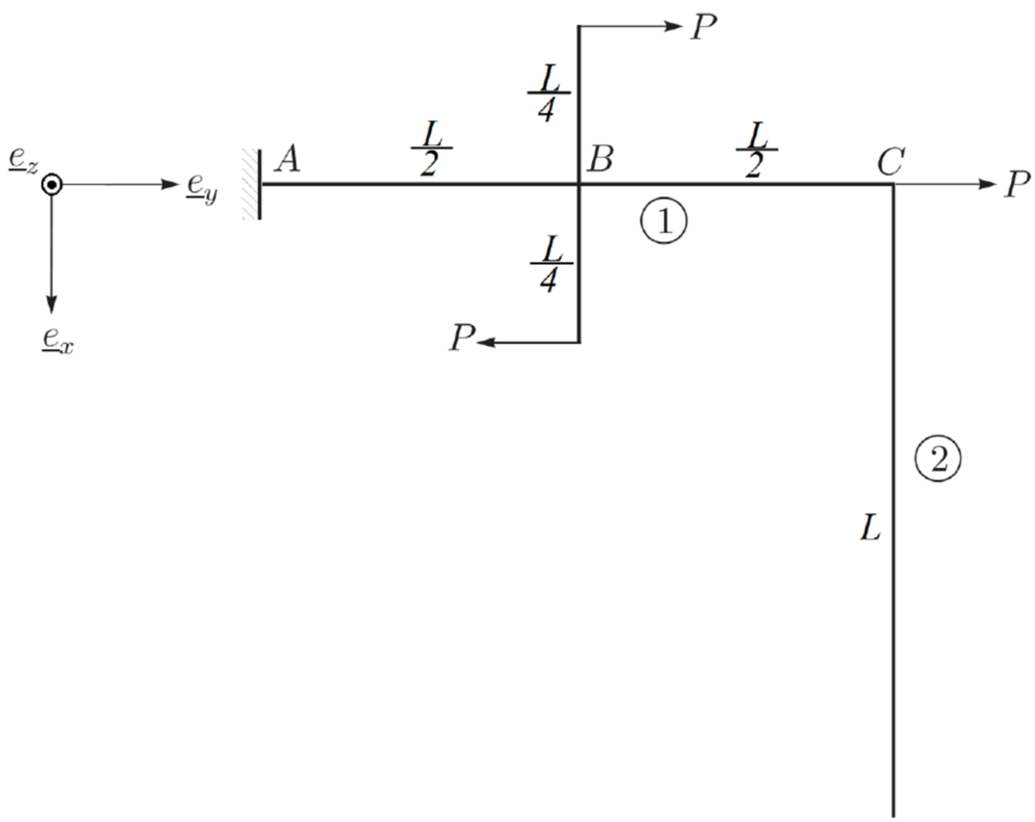
Bemerkung: Die Kraft w muss gross genug sein, um das Vorzeichen der Querkraft zu ändern, weil das Moment seine Richtung ändern muss, um die Lagerbedingung bei $x = L$ zu erfüllen. Falls man die verteilte Kraft w weglassen würde, würde die Querkraft wegen der verteilten Kraft schon bei $x = x_1$ ihr Vorzeichen ändern.

Aufgabe H2:

Zwei Stäbe der Länge L sind in C rechtwinklig zusammengeschweisst und im Punkt A eingespannt. Am Stab 1 ist in der Mitte beim Punkt B ein vertikaler Stab der Länge L/2 angeschweisst.

An beiden Enden dieses Stabes wirken zwei horizontale Einzelkräfte vom Betrag P wie in der Skizze eingetragen. Im Punkt C greift eine horizontale Kraft vom Betrag P in positive y-Richtung an. Und schliesslich greift am Stab 2 eine dreiecksverteilte Last $q = P\,x/L^2$ in negative z-Richtung an.

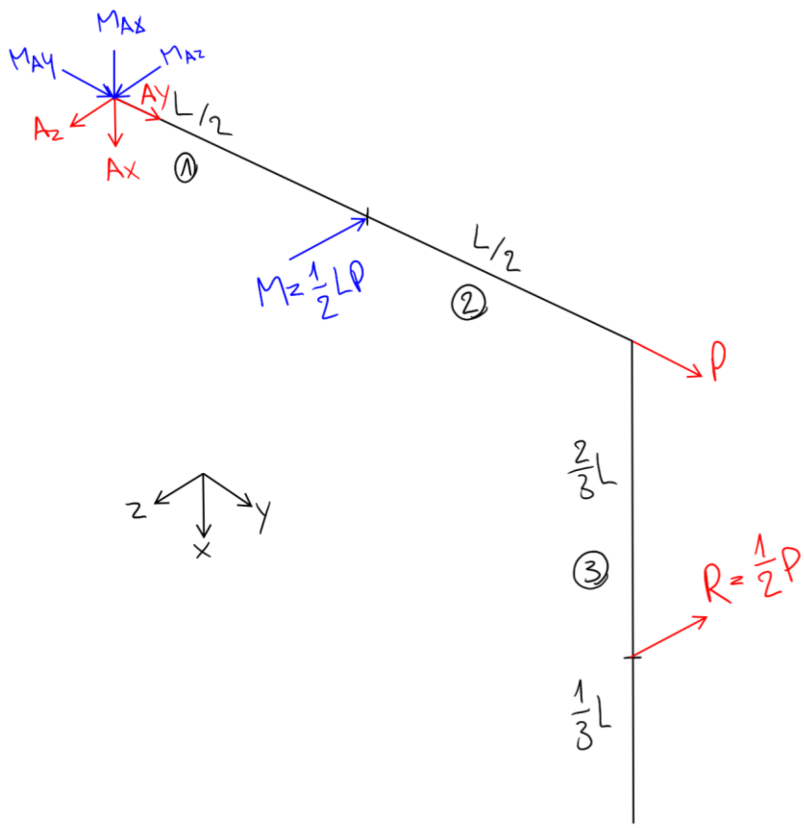
Bestimmen Sie die Beanspruchung in den Stäben 1 und 2!



Lösung zu Aufgabe H2:

1. Lagerkräfte- und momente berechnen

1.1 Freischnitt



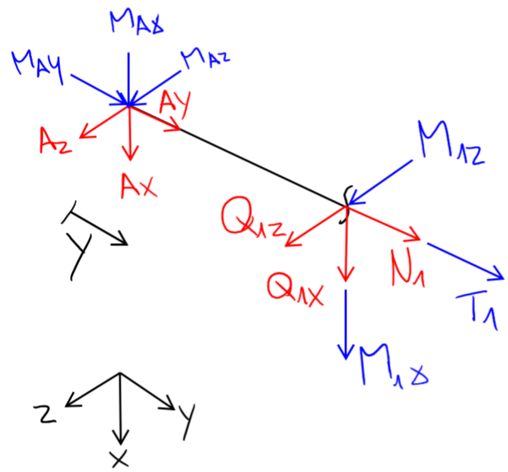
1.2 Gleichgewichtsbedingungen aufstellen

$$\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{A_x = 0} \qquad \sum F_y = 0 \rightarrow \boxed{A_y = -P} \qquad \sum F_z = 0 \rightarrow \boxed{A_z = \frac{1}{2}P}$$

$$\sum M_x = 0 \rightarrow \boxed{M_{Ax} = \frac{1}{2}LP} \qquad \sum M_y = 0 \rightarrow \boxed{M_{Ay} = -\frac{1}{3}LP} \qquad \sum M_z = 0 \rightarrow \boxed{M_{Az} = \frac{1}{2}LP}$$

2. Beanspruchung im Stab 1 für $0 < y < \frac{1}{2}L$

2.1 Freischnitt von links



2.2 Gleichgewichtsbedingungen aufstellen

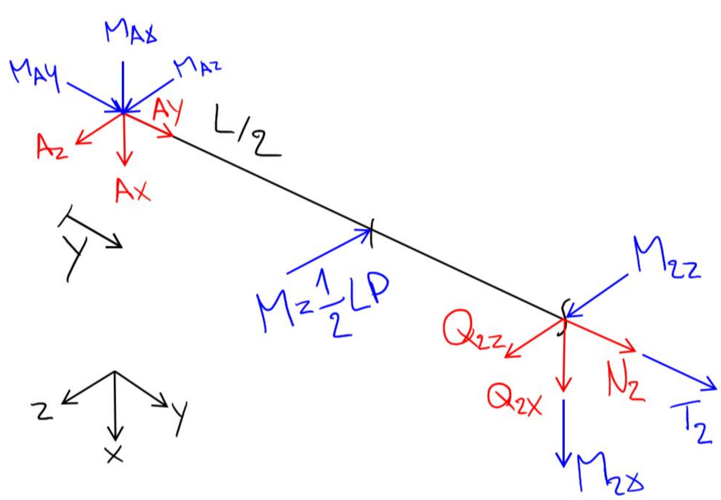
$$\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{Q_{1x} = 0} \qquad \sum F_y = 0 \rightarrow \boxed{N_1 = P} \qquad \sum F_z = 0 \rightarrow \boxed{Q_{1z} = -\frac{1}{2}P}$$

$$\sum M_x = 0 \rightarrow \boxed{M_{1x} = \left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}L\right)P} \qquad \sum M_y = 0 \rightarrow \boxed{T_1 = \frac{1}{3}LP}$$

$$\sum M_z = 0 \rightarrow \boxed{M_{1z} = -\frac{1}{2}LP}$$

3. Beanspruchung im Stab 1 für $\frac{1}{2}L < y < L$

3.1 Freischnitt von links



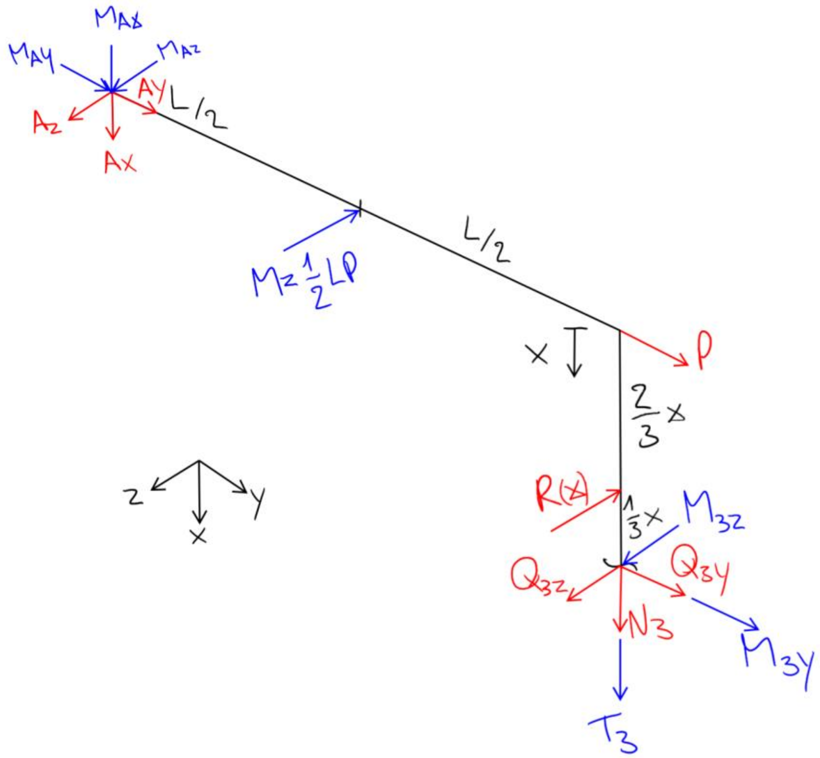
3.2 Gleichgewichtsbedingungen aufstellen (im Vergleich zum Abschnitt 1 ändert sich nur M_{2z})

$$\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{Q_{2x} = 0} \qquad \sum F_y = 0 \rightarrow \boxed{N_2 = P}, \qquad \sum F_z = 0 \rightarrow \boxed{Q_{2z} = -\frac{1}{2}P}$$

$$\sum M_x = 0 \rightarrow \boxed{M_{2x} = \left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}L\right)P} \qquad \sum M_y = 0 \rightarrow \boxed{T_2 = \frac{1}{3}LP} \qquad \sum M_z = 0 \rightarrow \boxed{M_{2z} = 0}$$

4. Beanspruchung im Stab 2 für $0 < x < L$

4.1 Freischnitt von links



4.2 $R(x)$ bestimmen

$$R(x) = \frac{1}{2}q(x) \cdot x = \frac{1}{2}P\frac{x^2}{L^2}$$

4.3 Gleichgewichtsbedingungen aufstellen

$$\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{N_3 = 0}, \qquad \sum F_y = 0 \rightarrow \boxed{Q_{3y} = 0}, \qquad \sum F_z = 0 \rightarrow \boxed{Q_{3z} = \frac{1}{2}P\left(\frac{x^2}{L^2} - 1\right)}$$

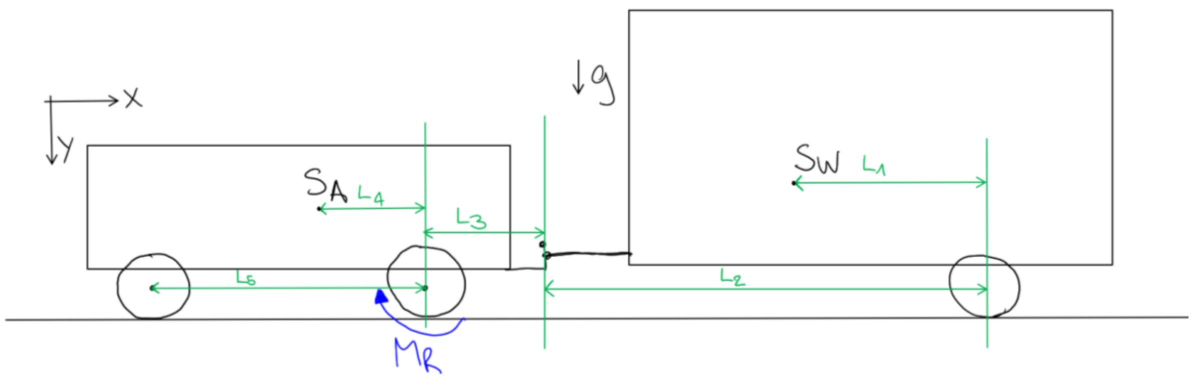
$$\sum M_x = 0 \rightarrow \boxed{T_3 = 0}, \qquad \sum M_y = 0 \rightarrow \boxed{M_{3y} = P\left(\frac{x^3}{6L^2} - \frac{x}{2} + \frac{L}{3}\right)}, \qquad \sum M_z = 0 \rightarrow \boxed{M_{3z} = 0}$$

Aufgabe H3:

„Claire van Knipperlicht“ fährt mit ihrem Wohnwagen von Holland nach Spanien. Als die Ampel auf grün stellt, beginnt sie zu beschleunigen. Wird das Vorderrad vom Boden abheben? Das Problem kann als statisch bestimmt angenommen werden. Alle Kräfte und Momente sind in der untenstehenden Skizze dargestellt. Die Punkte S_A und S_W sind die Schwerpunkte der Wägen. Es herrscht die Erdbeschleunigung g.

Geg: $L_1 = 2.5m, L_2 = 5m, L_3 = 1.5m, L_4 = 1m, L_5 = 4m, m_A = 1T = m_W, M_R = 1kNm,$

$$g = 9.81\frac{m}{s}$$

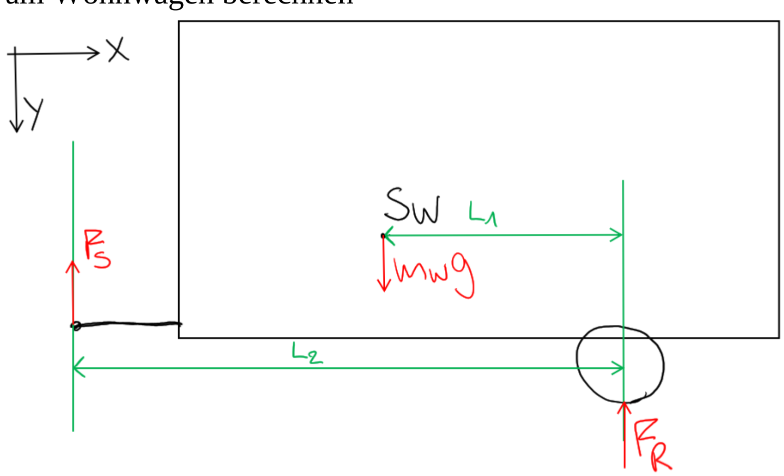


Lösungen zu Aufgabe H3:

1. Kraft des Vorderrades F_{VR} berechnen

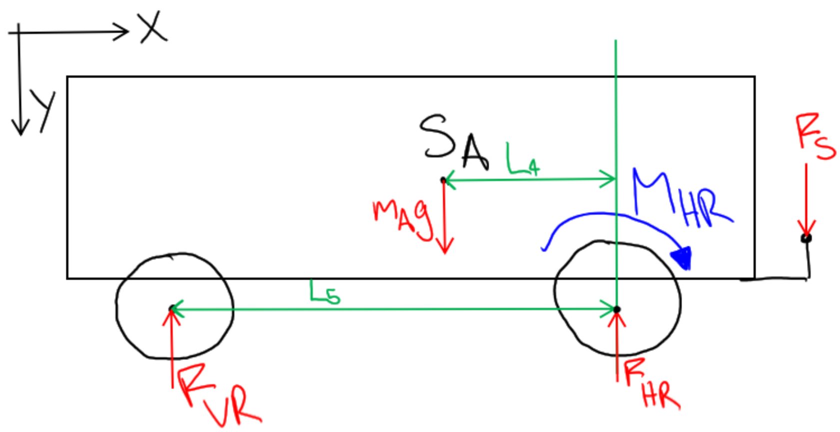
Bemerkung: Die Gewichtskraft eines Körpers greift immer an seinem Schwerpunkt an.

1.1 F_s mittels GGB am Wohnwagen berechnen



$$M_R = 0 \rightarrow F_s = \frac{L_1}{L_2} m_W g$$

1.2 F_{VR} mittels GGB am Auto analytisch berechnen



$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_{VR} = m_A g + F_s - F_{HR},$$

$$\sum M_{z,VR} = 0 \rightarrow F_{HR} = \frac{m_A g(L_5 - L_4) + M_{HR} + F_s(L_5 + L_3)}{L_5}$$

$$\rightarrow F_{VR} = \frac{-M_{HR} - L_3 F_s + L_4 m_A g}{L_5}$$

2. Wird das Vorderrad vom Boden abheben?

2.1 Ruhebedingung

Die Kraft F_{VR} wurde in der Skizze so eingezeichnet, dass das Vorderrad auf dem Boden drückt. Deshalb kann man sagen, dass, wenn das Vorderrad auf dem Boden wirklich drückt, F_{VR} positiv sein muss.

Die Ruhebedingung lautet somit

$$F_{VR} \geq 0$$

2.2 Überprüfung der Ruhebedingung

$$F_{VR} = 363.125N \geq 0 \rightarrow \text{die Ruhebedingung ist erfüllt}$$

$$\rightarrow \boxed{\text{das Vorderrad hebt nicht vom Boden ab!}}$$