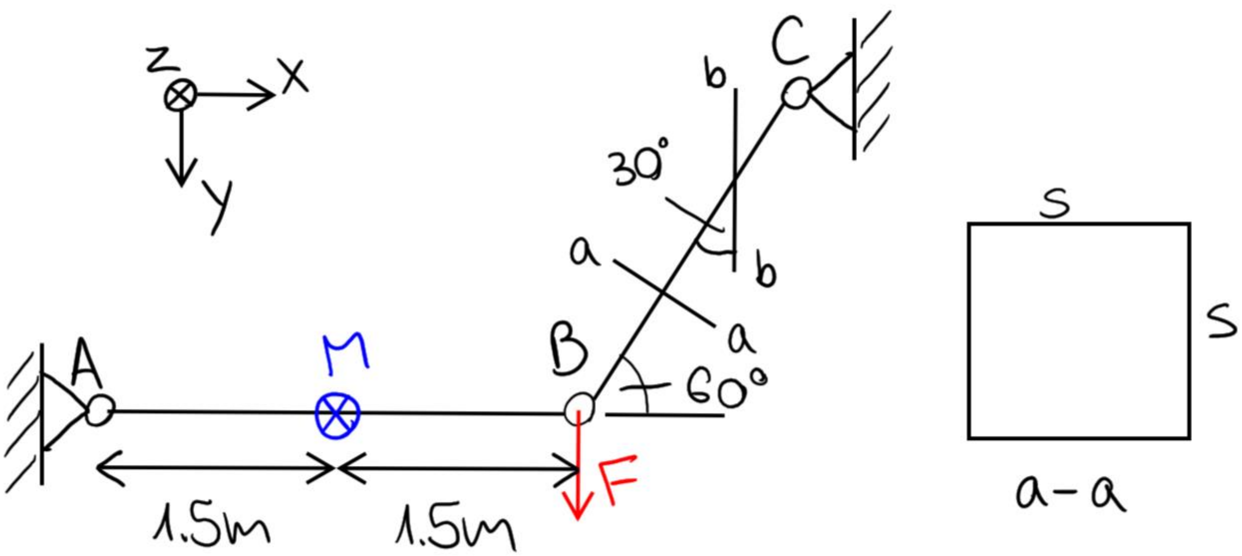
Mechanik II: Deformierbare Körper

für D-BAUG, D-MAVT **Haus- & Schnellübung 2**

Aufgabe S1:

Es sind zwei Stäbe gegeben, die in den Punkten A und C gelenkig gelagert sind und im Punkt B gelenkig verbunden sind. Im Punkt B zieht eine Kraft F mit dem Betrag von 80N in positiver y-Richtung und in der Mitte des Stabes AB befindet sich ein Moment M mit dem Betrag von 300Nm in positiver z-Richtung. Die Stäbe besitzen einen quadratischen Querschnitt mit einer Seitenlänge s von 50mm. Die restlichen Informationen sind auf der Skizze gegeben.



Vorzeichenkonvention: Zugspannungen sind positiv und Druckspannungen negativ definiert.

a) Berechnen Sie die Normal- und Schubspannung auf der Fläche bezüglich dem Schnitt a-a.

S1a). 5 mögliche Antworten	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
	$\sigma = -83.1kPa$ $\tau = 0Pa$	$\sigma = 83.1kPa$ $\tau = 0Pa$	$\sigma = 83.1Pa$ $\tau = 0Pa$	$\sigma = -83.1Pa$ $\tau = 0Pa$	$\sigma = 183.1kPa$ $\tau = 30kPa$

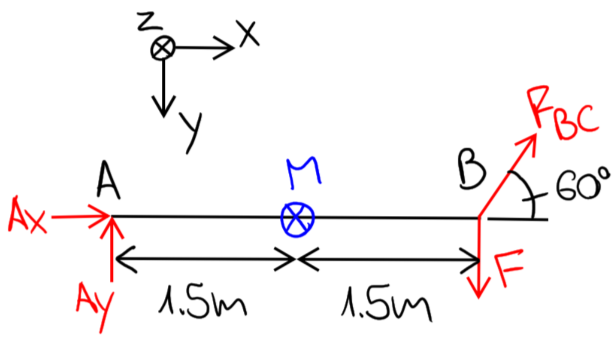
b) Berechnen Sie die Normal- und Schubspannung auf der Fläche bezüglich dem Schnitt b-b.

S1b). 5 mögliche Antworten	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
	$\sigma = -41.6kPa$ $\tau = 72Pa$	$\sigma = 41.6kPa$ $\tau = 72Pa$	$\sigma = -20.8kPa$ $\tau = -36kPa$	$\sigma = -20.8kPa$ $\tau = 36kPa$	$\sigma = 20.8kPa$ $\tau = 36kPa$

Lösung zu Aufgabe S1:

1. Stabkraft F_{BC} berechnen

1.1. Freischnitt des Stabes AB

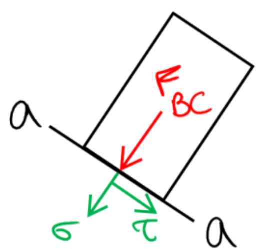


1.2. Mittels GGB F_{BC} berechnen

$$\sum M_A = 0 \rightarrow F_{BC} = 207.8N$$

2. Spannungen auf dem Querschnitt a-a berechnen

2.1. Geometrieanalyse



Da die Stabkraft senkrecht zur Querschnittsfläche a-a steht, wird es keine Kraftkomponenten haben, die parallel zur Bezugsfläche sind. Daraus folgt, dass die Schubspannung auf diesem Querschnitt gleich Null ist.

$$\tau = 0$$

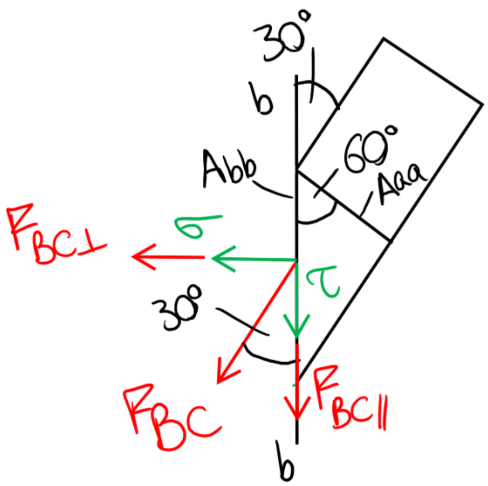
2.2. Normalspannung berechnen

Weil F_{BC} schon die senkrechte Komponente auf der Bezugsfläche ist, ist alles schon gegeben und man kann alles einfach in die Gleichung für die Normalspannung einsetzen.

$$\sigma = \frac{F_{BC}}{A_{aa}} = 83.1kPa$$

3. Spannungen auf dem Querschnitt b-b berechnen

3.1. Geometrieanalyse



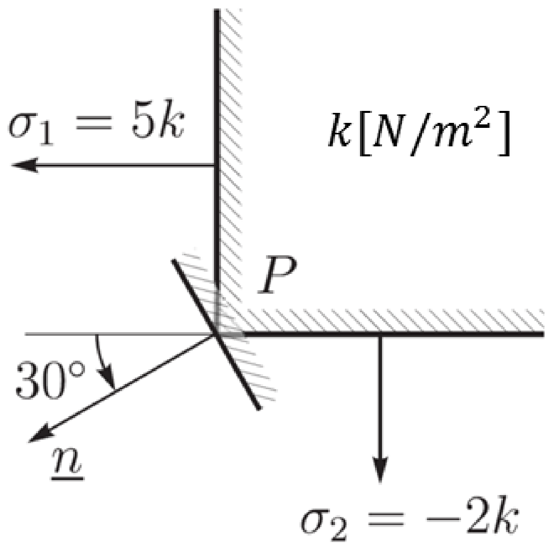
Wenn man die Skizze betrachtet ist es in diesem Fall klar, dass die Stabkraft auf diesem Querschnitt eine Normal- und eine Schubspannung erzeugt.

3.2. Spannungen berechnen

$$\sigma = \frac{F_{BC\perp}}{A_{bb}} = 20.8kPa, \qquad \tau = \frac{F_{BC\parallel}}{A_{bb}} = 36kPa$$

Aufgabe S2:

Der ebene Spannungszustand in einem Punkt P eines Körpers ist durch die Hauptachsen und die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 gegeben.



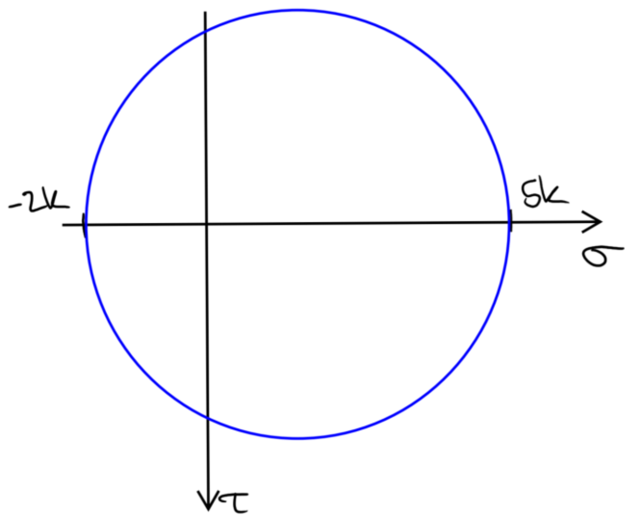
a) Konstruieren Sie den zugehörigen Mohrschen Spannungskreis.

b) Bestimmen Sie die Normalspannung und die Schubspannung am Flächenelement mit der Normalen $\underline{n}$ (um 30° bezüglich $\underline{e}_1$ geneigt). Einmal geometrisch (Mohrscher Kreis) und einmal analytisch (Spannungsvektor).

c) Zeichnen Sie die zugehörigen Vektoren an diesem Element ein.

Lösung zu Aufgabe S2:

Lösungsteil a)

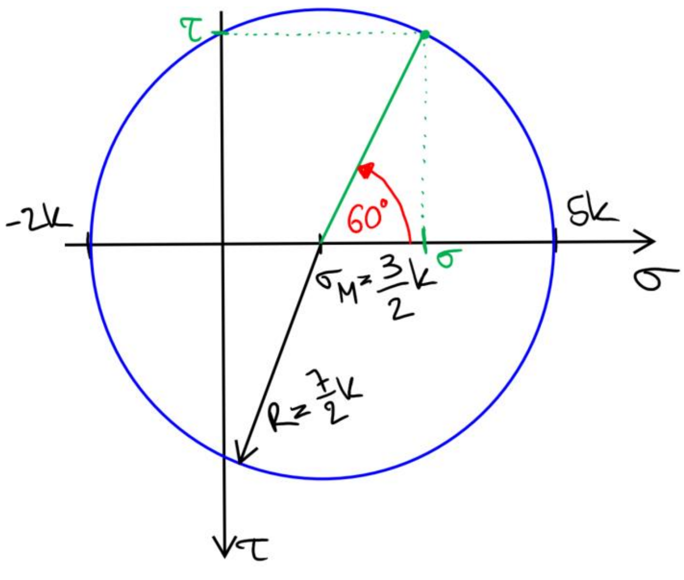


Bemerkung: Da σ_1 und σ_2 Hauptachsen sind, wissen wir, dass sie auf der Spannungsachse liegen, da in einem Hauptspannungszustand die Schubspannungen verschwinden. Deshalb können wir einfach die Werte auf der Spannungsachse eintragen und den Kreis zeichnen.

Lösungsteil b)

Geometrisch:

1. Den gedrehten Zustand auf dem Mohrscher Kreis zeichnen



Bemerkung: Im Mohrscher Kreis ist der Drehwinkel immer doppelt so gross wie der Drehwinkel in der Realität.

2. Aus der Geometrie σ und τ berechnen

$$\sigma = \frac{13}{4}k, \qquad \tau = -\frac{7\sqrt{3}}{4}k$$

Analytisch:

1. Spannungstensor und Normalenvektor aufstellen

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 5k & 0 \\ 0 & -2k \end{bmatrix}, \qquad \underline{n} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Spannungsvektor berechnen

$$\underline{s} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{n} = \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{3}}{2}k \\ -k \end{pmatrix}$$

3. Normalspannung berechnen

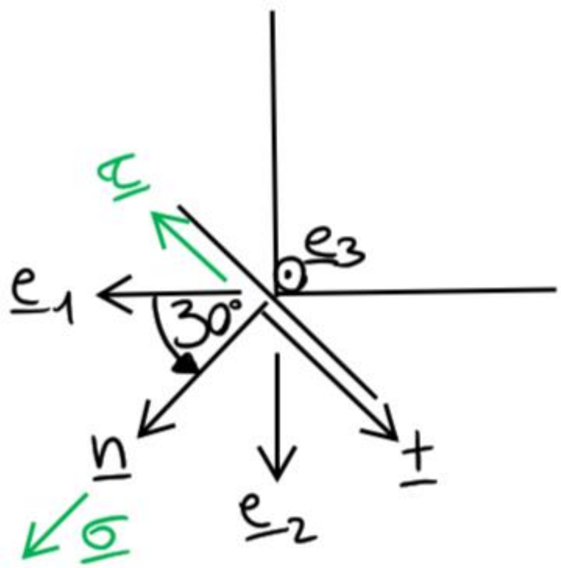
$$\sigma = \underline{s} \cdot \underline{n} = \frac{13}{4}k$$

4. Schubspannung berechnen

$$|\underline{\tau}| = |\underline{s} - \sigma \cdot \underline{n}| = \frac{7\sqrt{3}}{4}k$$

Bemerkung: Wenn man die Schubspannung mit dem Mohrscher Kreis und mit dem Spannungsvektor berechnet, kriegt man ein Vorzeichenunterschied. Dies kommt aus der Tatsache, dass man mit dem Mohrscher Kreis auch die Richtung (positiv oder negativ) berechnet aber mit dem Spannungsvektor nur den Betrag des Vektors berechnet, welcher per Definition immer positiv ist.

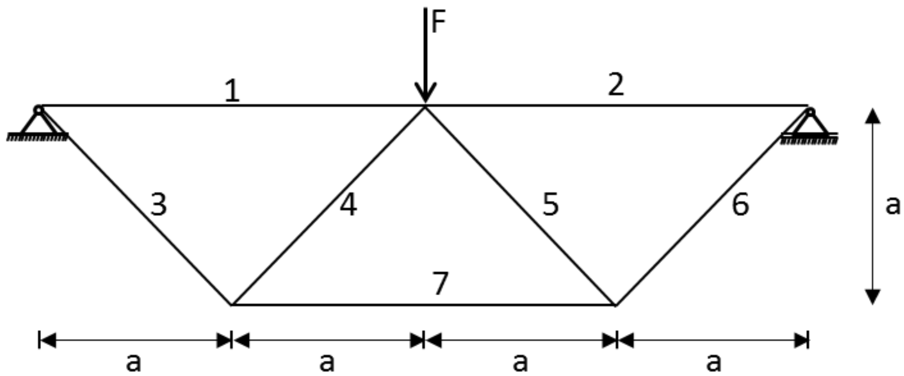
Lösungsteil c)



Bemerkung: Die Richtung von $\underline{t}$ lässt sich aus der Tatsache bestimmen, dass die Vektoren $\underline{\sigma}, \underline{t}$ und $\underline{e}_3$ eine Orthonormalbasis bilden müssen.

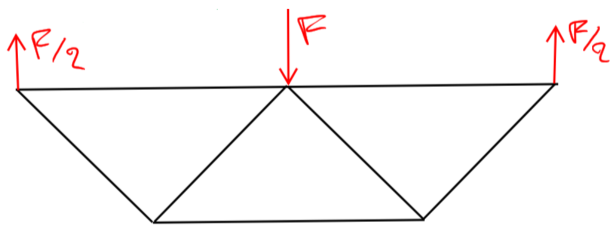
Aufgabe H1:

Das dargestellte Fachwerk, das aus Stahlstäben besteht, wird durch die Kraft F=64kN belastet. Bestimmen Sie die Querschnittsflächen der Stäbe so, dass die auftrtenden Spannungen gerade den Wert $\sigma_{zul} = 160\ N/mm^2$ annehmen. Es wird vorausgesetzt, dass kein Knicken eintritt.



Lösung zu Aufgabe H1:

1. Lagerkräfte bestimmen



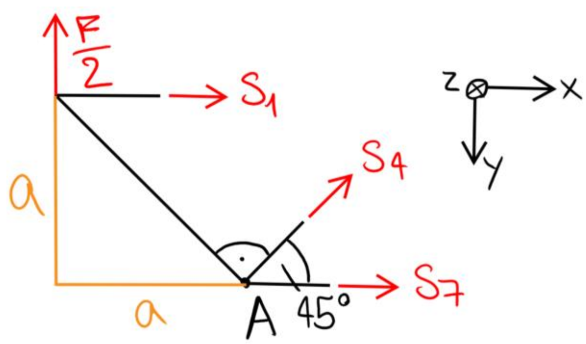
Bemerkung: Aus Symmetriegründen sieht man sofort, dass die zwei Lagerkräfte $\frac{F}{2}$ betragen müssen, weil sie von der Kraft F gleich weit entfernt sind.

2. Stabkräfte Bestimmen

2.1. Geometrieanalyse

Aus symmetrischen Gründen wissen wir, dass $S_1 = S_2$ und dass $S_3 = S_4 = S_5 = S_6$.
Deshalb können wir alle Stabkräfte mit einem Dreikräfteschnitt berechnen.

2.2. Dreikräfteschnitt



$$\sum M_A = 0 \rightarrow S_1 = -32kN = S_2, \qquad \sum F_y = 0 \rightarrow S_4 = -45.255kN = S_3 = S_5 = S_6,$$
$$\sum F_x = 0 \rightarrow S_7 = -64kN$$

3. Flächen berechnen

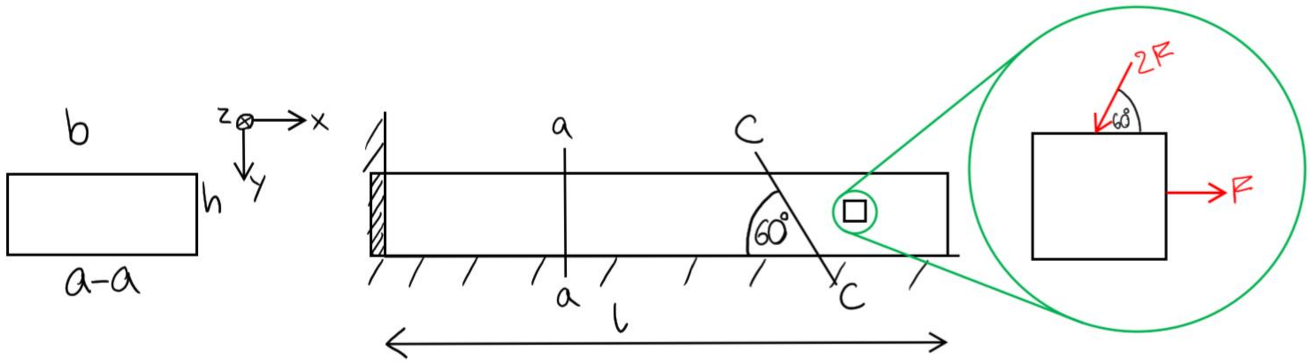
$$A_i = \frac{|S_i|}{\sigma_{zul}}, \qquad i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$$

Die Stabkräfte sind im Betrag, weil es in dieser Aufgabe nicht drauf an kommt, ob es Druck- oder Zugkräfte sind.

$$A_1 = A_2 = 200mm^2, \qquad A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = 283mm^2, \qquad A_7 = 400mm^2$$

Aufgabe H2:

Es sei ein Stab der Länge $l = 1m$, Höhe $h = 0.1m$ und breite $b = 0.3m$ gegeben, der in einer Ecke auf dem Boden liegt und links in der Wand eingespannt ist. Der Stab sei so beansprucht, dass wenn man irgendeine infinitesimal kleine Fläche im Innern des Stabes untersucht, die folgende Beanspruchungen vorfindet.



a) Geben Sie den Spannungstensor dieses Zustandes bezüglich der gegebenen Koordinaten an und zeichnen Sie den dazugehörigen Mohrscher Kreis.

b) Es gelte $F = 12kN$. Berechnen Sie die Normal- und Schubspannung im Querschnitt c-c. Überlegen Sie sich zuerst, ob der schnellste Weg geometrisch oder analytisch ist.

c) Berechnen Sie die Hauptspannungen und ihre Richtungen. Stellen Sie den Spannungstensor bezüglich $\underline{e}_1$ und $\underline{e}_2$ auf.

d) Um wie viel muss die Querschnittsfläche a-a gedreht werden, um die maximale Schubspannung zu haben? Welchen Betrag hat sie?

Mechanik II: Deformierbare Körper

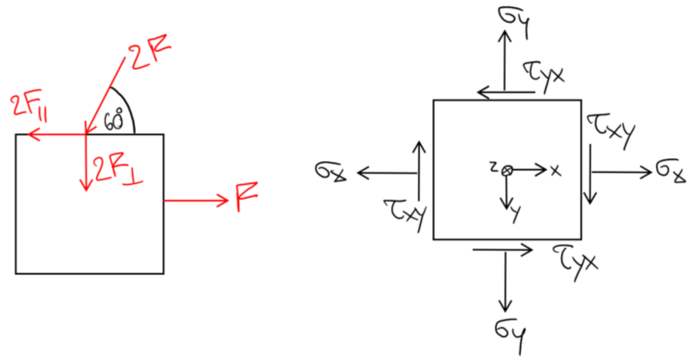
für D-BAUG, D-MAVT **Haus- & Schnellübung 2**

Lösung zu Aufgabe H2:

Lösungsteil a):

1. Spannungen am infinitesimal kleinen Quadrat berechnen

1.1. Kräfte am infinitesimal kleinen Quadrat einzeichnen und mit der Konvention vergleichen



1.2. σ_y, σ_x und τ_{xy} berechnen

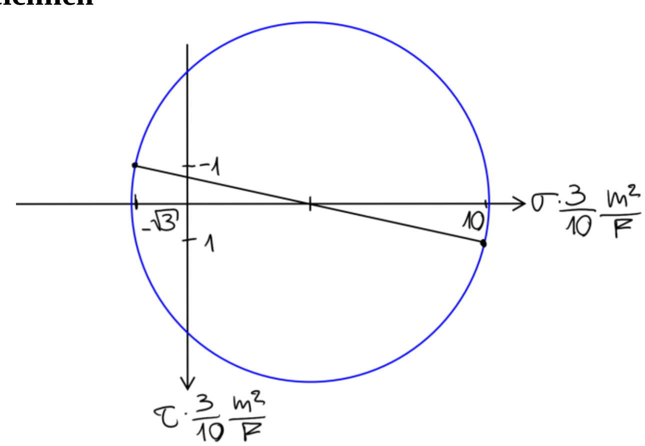
$$\sigma_x = \frac{F}{Q_v} = \frac{F}{b \cdot h} = \frac{100}{3}\frac{1}{m^2}\,F\,, \qquad \sigma_y = \frac{2F_\perp}{Q_h} = \frac{\sqrt{3}F}{l \cdot b} = -\frac{10\sqrt{3}}{3}\frac{1}{m^2}F,$$

$$\tau_{xy} = \frac{2F_\parallel}{Q_h} = \frac{F}{l \cdot b} = \frac{10}{3}\frac{1}{m^2}F$$

2. Werte in den Tensor einfügen

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \frac{1}{m^2}\frac{10F}{3}$$

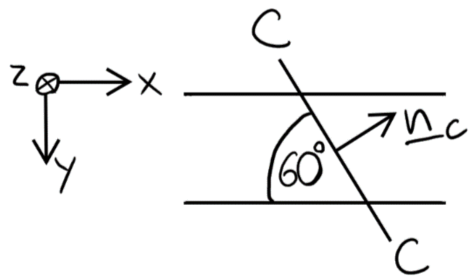
3. Mohrscher Kreis zeichnen



Lösungsteil b):

Der schnellste Weg ist hier analytisch, da wir geometrisch Probleme mit den Winkeln haben könnten.

1. Normalenvektor definieren



$$\underline{n}_c = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix}$$

2. Spannungvektor berechnen

$$\underline{s} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{n} = \begin{pmatrix}326.41\\69.28\end{pmatrix} kPa$$

3. Normalspannung berechnen

$$\sigma = \underline{s} \cdot \underline{n} = 248.04 kPa$$

4. Schubspannung berechnen

$$|\underline{\tau}| = |\underline{s} - \sigma \cdot \underline{n}| = 223.21 kPa$$

Lösungsteil c):

1. Hauptspannungen direkt mit der Formel im Theorieblatt berechnen

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 403.39 kPa,$$

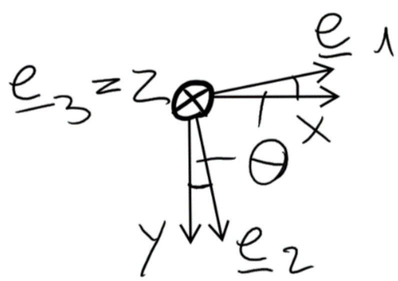
$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = -72.67 kPa$$

2. Hauptachsen berechnen

2.1. Drehwinkel berechnen

$$\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) = 4.84°$$

2.2. Hauptachsen durch Koordinatentransformation berechnen



$$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 0.996 \\ -0.084 \end{pmatrix}, \qquad \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0.084 \\ 0.996 \end{pmatrix}$$

Die Drehrichtung kann man am Mohrscher Kreis erkennen.

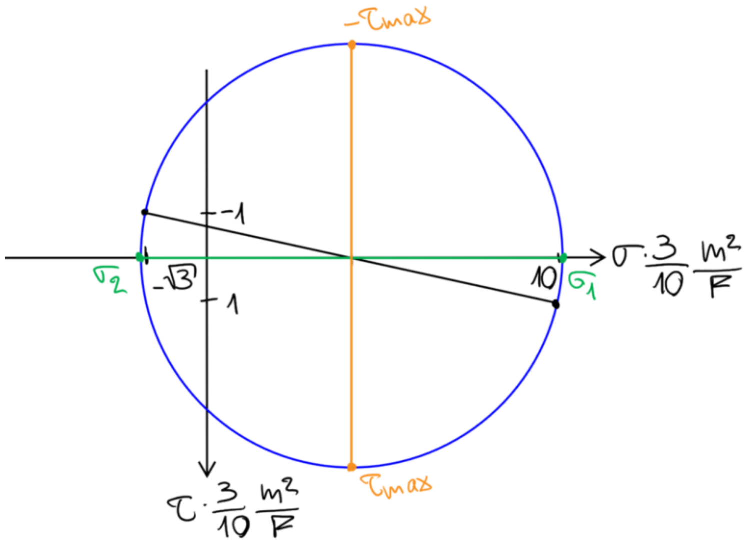
3. Tensor bezüglich der Hauptachsen aufstellen

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 403.39 & 0 \\ 0 & -72.67 \end{bmatrix} kPa$$

Lösungsteil d):

1. Drehwinkel berechnen

Anhand des Mohrscher Kreises erkennt man, dass der Zustand, bei dem die Schubspannung maximal ist, senkrecht auf den Hauptachsenzustand liegt, also in der Realität um 45° gedreht.



Da wir schon berechnet haben, wie viel wir den gegebenen Zustand drehen müssen, um in den Hauptachsenzustand zu gelangen, ist die Gleichung für den gesuchten Drehwinkel banal:

$$\theta_{max} = 49.84°$$

2. Betrag der maximalen Schubspannung berechnen

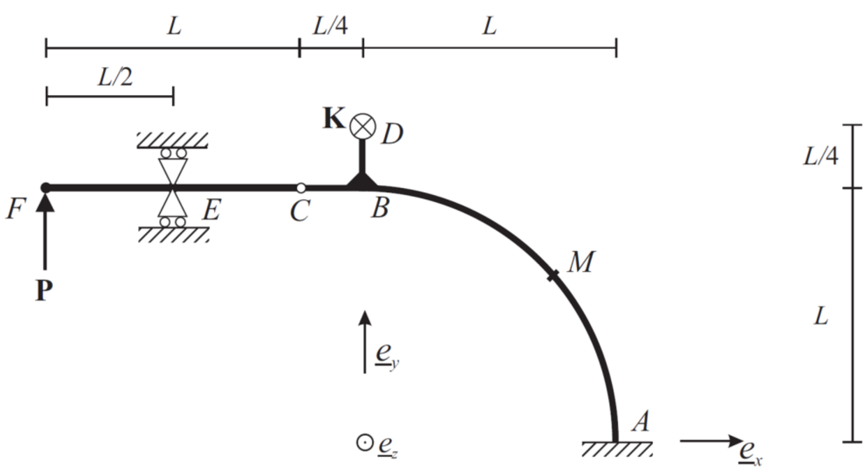
Wenn man den Mohrscher Kreis betrachtet, sieht man, dass der Betrag der maximalen Schubspannung genau den Betrag des Kreiseradius entspricht.

$$\tau_{max} = 238.03 kPa$$

Wiederholungsaufgabe:

Die abgebildete Struktur besteht aus den masselosen Balken AB, BC, BD und CF, welche in der x-y-Ebene liegen. Die Balken BC und CF sind im Punkt C reibungsfrei gelenkig miteinander verbunden. Der Balken CF ist im Punkt E durch ein kurzes Querlager reibungsfrei gelagert und im Punkt F wirkt die Kraf. Der viertelkreisförmige Balken AB ist in A eingespannt und in B mit den Balken BC und BD fest verschweisst. Im Punkt D wirkt die Kraft $\underline{K} = -K\underline{e}_z$. Die Balkenlängen sind in der Zeichnung ersichtlich

a) Handelt es sich hier um ein 2D oder ein 3D Problem? Begründen Sie Ihre Antwort.
b) Bestimmen Sie die Lagerkräfte und -momente in den Punkten A und E.
c) Bestimmen Sie die Beanspruchung im Balken CF.
d) Bestimmen Sie die Beanspruchung im Punkt M, welcher in der Mitte vom Balken AB liegt.
e) Ist der Balken CF eine Pendelstütze? Begründen Sie Ihre Antwort.



Lösung zur Wiederholungsaufgabe:

Aufgabenteil a)

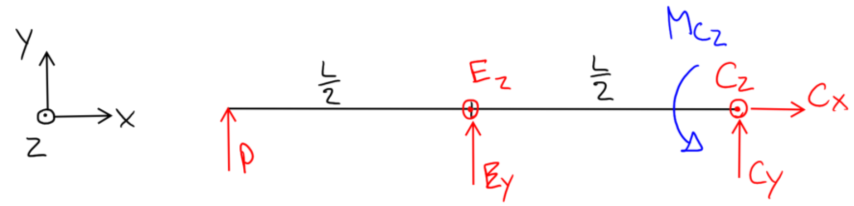
Die Kraft $\underline{K} = -K\underline{e}_z$ zeigt in die Bildebene hinein (negative z-Richtung), wodurch die Problemstellung 3D wird.

Aufgabenteil b)

Um genügend Gleichungen zu haben, muss das System im Punkt C getrennt werden.

1. Systemtrennung in C

1.1 Freischnitt Stab 1



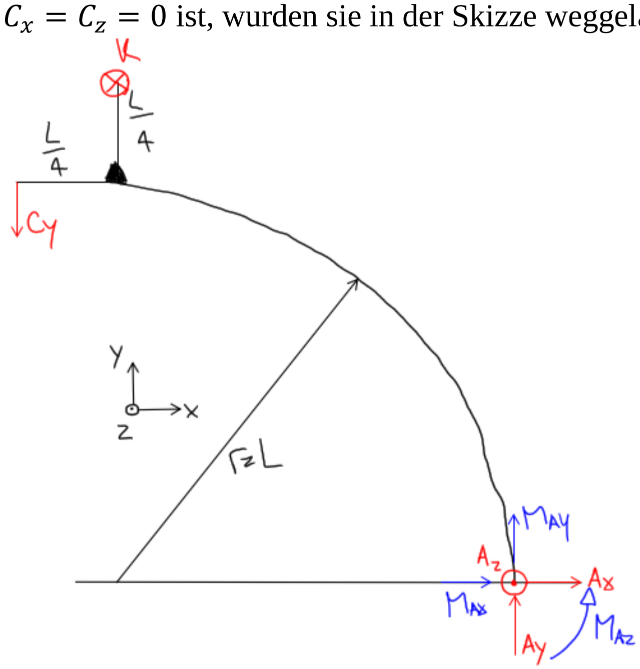
1.2 Mittels GGB die Kräfte in C und E berechnen

$$\sum F_x = 0 \rightarrow C_x = 0, \qquad \sum F_y = 0 \rightarrow C_y = P, \qquad \sum F_z = 0 \rightarrow E_z = 0 = -C_z$$

$$M_{Cz} = 0 \rightarrow E_y = -2P$$

Bemerkung: Es existieren keine äusseren Kräfte, die eine Lagerreaktion in z-Richtung provozieren.

1.3 Freischnitt Stab 2 (da $C_x = C_z = 0$ ist, wurden sie in der Skizze weggelassen)



1.4 Mittels GGB die Lagerkräfte- und momente berechnen

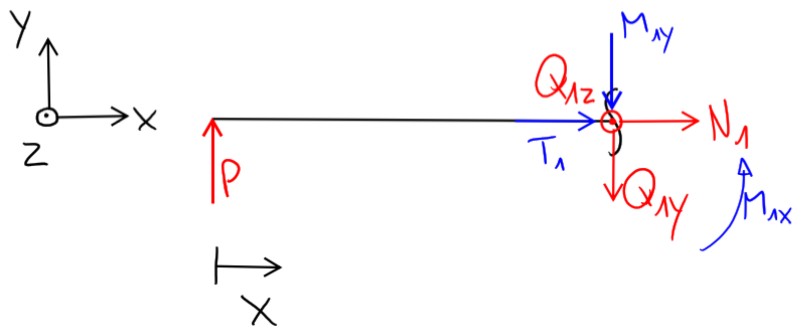
$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0, \quad \sum F_y = 0 \rightarrow A_y = P, \quad \sum F_z = 0 \rightarrow A_z = K$$

$$\sum M_x = 0 \rightarrow M_{Ax} = \frac{5}{4} LK, \quad \sum M_y = 0 \rightarrow M_{Ay} = LK, \quad \sum M_z = 0 \rightarrow M_{Az} = -\frac{5}{4} LP$$

<u>Aufgabenteil c)</u>

1. Beanspruchung im Abschnitt $0 < x < \frac{L}{2}$

1.1 Freischnitt von links



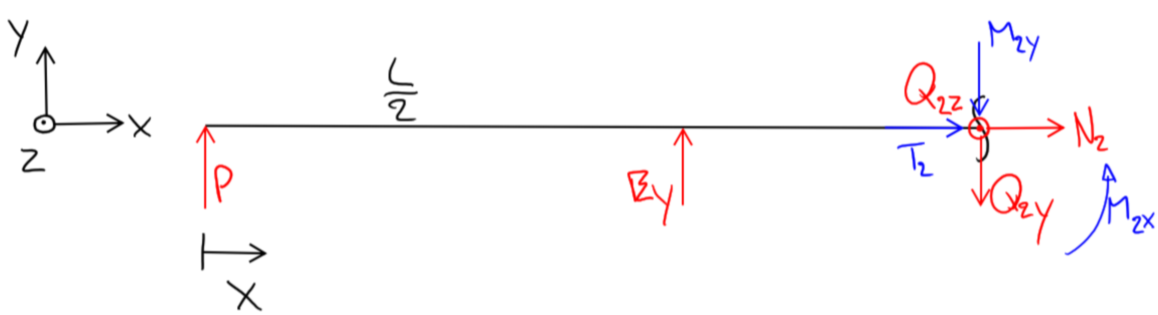
1.2 Gleichgewichtsbedingungen aufstellen

$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_1 = 0, \quad \sum F_y = 0 \rightarrow Q_{1y} = P, \quad \sum F_z = 0 \rightarrow Q_{1z} = 0$$

$$\sum M_x = 0 \rightarrow T_1 = 0, \quad \sum M_y = 0 \rightarrow M_{1y} = 0, \quad \sum M_z = 0 \rightarrow M_{1z} = xP$$

2. Beanspruchung im Abschnitt $\frac{L}{2} < x < L$

2.1 Freischnitt von links (da $E_z = 0$ ist, wurde es in der Skizze weggelassen)



2.2 Gleichgewichtsbedingungen aufstellen

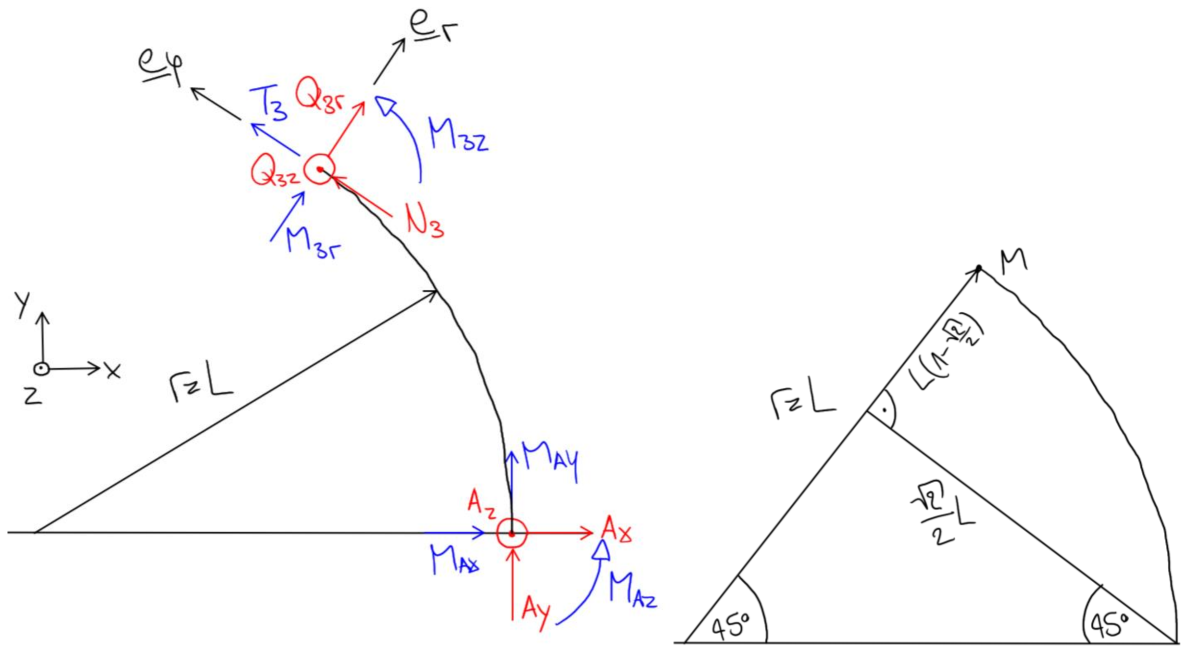
$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_2 = 0, \quad \sum F_y = 0 \rightarrow Q_{2y} = P, \quad \sum F_z = 0 \rightarrow Q_{2z} = 0$$

$$\sum M_x = 0 \rightarrow T_2 = 0, \quad \sum M_y = 0 \rightarrow M_{2y} = 0, \quad \sum M_z = 0 \rightarrow M_{2z} = P(L - x)$$

Aufgabenteil d)

1. Beanspruchung beim Punkt M

1.1 Freischnitt von rechts



1.2 Gleichgewichtsbedingungen aufstellen

$$\sum F_{\varphi}=0 \rightarrow N_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}P, \qquad \sum F_r=0 \rightarrow Q_{3r}=-\frac{\sqrt{2}}{2}P, \qquad \sum F_z=0 \rightarrow Q_{3z}=-K$$

$$\sum M_x=0 \rightarrow T_3=KL\left(\frac{5\sqrt{2}}{8}-1\right), \qquad \sum M_r=0 \rightarrow M_{3r}=-\frac{5\sqrt{2}}{8}LK,$$

$$\sum M_z=0 \rightarrow M_{3z}=LP\,\frac{1+2\sqrt{2}}{4}$$

Bemerkung: Es ist empfehlenswert die GGB respektive den Zylinderkoordinaten zu lösen, damit man direkt die gewünschte Richtung der Beanspruchung berechnen kann.

Aufgabenteil e)

Nein, da nicht alle Schnittkräfte in Balkenrichtung wirken. Ausserdem gibt es eine Krafteinleitung zwischen C und F (in E).