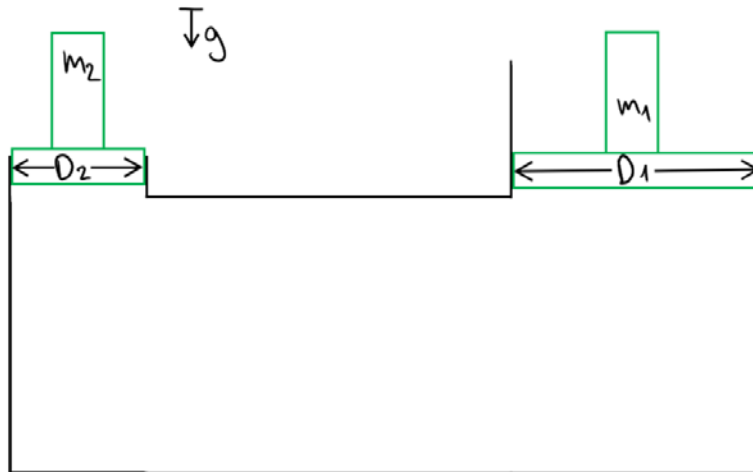


**Mechanik II: Deformierbare Körper**  
für D-BAUG, D-MAVT

**Haus- & Schnellübung 3**

Aufgabe S1:

Gegeben sei ein vollständig mit Wasser gefüllten Behälter mit nur zwei Ausgängen. Die Ausgänge sind mit zwei zylindrischen Kolben geschlossen, die auf der Seite dicht mit der Wand sind, damit kein Wasser aus dem Behälter auslaufen kann. Die schweren Kolben üben durch ihr Eigengewicht Druck auf das Wasser aus. Der rechte Kolben besitzt die Masse  $m_1 = 50\text{kg}$  und der Durchmesser  $D_1 = \sqrt{2} \cdot 50\text{mm}$ , vom linken Kolben ist hingegen nur die Masse  $m_2 = 25\text{kg}$  bekannt. Wie gross muss der Durchmesser  $D_2$  des linken Kolbens sein, damit die zwei gleichhohen Kolben im GGW bleiben?



S1. 5 mögliche Antworten	(A) $D_2 = 50\text{mm}$	(B) $D_2 = 25\text{mm}$	(C) $D_2 = 100\text{mm}$	(D) $D_2 = 75\text{mm}$	(E) $D_2 = 90\text{mm}$
--------------------------------	----------------------------	----------------------------	-----------------------------	----------------------------	----------------------------

Lösung zu Aufgabe S1:

Ein Fluid in einem Behälter übt auf allen Flächen den gleichen Druck aus.

Aus dieser Tatsache können wir die folgende Gleichung aufstellen:

$$p_1 = p_2 \rightarrow \frac{m_1 g}{\frac{\pi}{4} D_1^2} = \frac{m_2 g}{\frac{\pi}{4} D_2^2}$$

Nach  $D_2$  auflösen und die Werte einsetzen ergibt:

$D_2 = 50\text{mm}$

**Mechanik II: Deformierbare Körper**  
für D-BAUG, D-MAVT**Haus- & Schnellübung 3**Aufgabe S2:

Durch den Spannungstensor  $\underline{\underline{T}}$  bezüglich eines xyz-Koordinatensystems ist der Spannungszustand in einem Punkt P eines Körpers gegeben.

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4k \\ 0 & -3k & 0 \\ -4k & 0 & 2k \end{bmatrix}$$

- Welche Einheit (Dimension) hat k?
- Berechnen Sie die Spannungsvektoren am Flächenelement durch P, der parallel zur Ebene  
 $-x + 2y + 2z = 0$  ist.
- Bestimmen Sie die Normalspannungen  $\sigma$  und Schubspannungen  $\tau$  für die beiden Einheitsvektoren  $\underline{n}$ ,  $-\underline{n}$  aus dem Aufgabenteil b). Was fällt auf?
- Ist die Normalspannung eine Zug- oder Druckspannung (bei  $k > 0$ )?

Lösung zu Aufgabe S2:Lösungsteil a)

Die Einträge des Spannungstensors sind, wie der Name sagt, Spannungen, deswegen muss

$$\boxed{[k] = \frac{N}{mm^2} = MPa}$$

gelten.

## Mechanik II: Deformierbare Körper

für D-BAUG, D-MAVT

## Haus- & Schnellübung 3

Bemerkung: Jede Druckeinheit wäre eine korrekte Lösung dieser Aufgabe. Normalerweise ist die Grössenordnung der Ingenieure *MPa*.

Lösungsteil b):

### 1. Normalenvektoren der gegebenen Ebene berechnen

Wie man es aus der Vektoralgebra kennt, bestehen die Einträge des Normalenvektors einer Ebene aus den normierten Koeffizienten der Ebenengleichung.

$$\underline{n}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{n}_2 = -\underline{n}_1 = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

### 2. Spannungsvektoren berechnen

$$\underline{s}_1 = \underline{T} \cdot \underline{n}_1 = \frac{k}{3} \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \underline{s}_2 = -\underline{s}_1 = \frac{k}{3} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Lösungsteil c):

### 1. Normalspannungen berechnen

$$\sigma_1 = \underline{s}_1 \cdot \underline{n}_1 = \frac{4}{3}k, \quad \sigma_2 = \underline{s}_2 \cdot \underline{n}_2 = (-\underline{s}_1) \cdot (-\underline{n}_1) = \underline{s}_1 \cdot \underline{n}_1 = \frac{4}{3}k \rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$$

### 2. Schubspannungen berechnen

$$|\underline{\tau}_1| = |\underline{s}_1 - \sigma_1 \cdot \underline{n}_1| = \frac{2\sqrt{37}}{3}k, \quad |\underline{\tau}_2| = |\underline{s}_2 - \sigma_2 \cdot \underline{n}_2| = |-(\underline{s}_1 - \sigma_1 \cdot \underline{n}_1)| = \frac{2\sqrt{37}}{3}k$$

$$\tau_1 = \tau_2$$

Bemerkung: Die Wahl des Normalenvektors ändert das Endresultat nicht; Die Druckspannungen sind immer negativ und die Zugspannungen immer positiv.

Lösungsteil d):

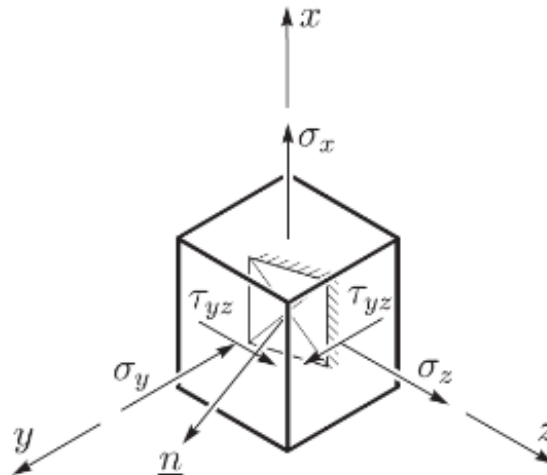
$$k > 0 \rightarrow \sigma_1 = \sigma_2 > 0 \rightarrow \text{Zugspannung}$$

**Mechanik II: Deformierbare Körper**  
 für D-BAUG, D-MAVT

**Haus- & Schnellübung 3**

Aufgabe S3:

Der Spannungszustand im Punkt P eines Körpers ist durch die Spannungen  $\sigma_x = 4k$ ,  $\sigma_y = -k$ ,  $\sigma_z = k$ ,  $\tau_{yz} = k\sqrt{3}$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0k$  und  $k = 10MPa$  am abgebildeten, infinitesimal kleinen Würfel gegeben. Man bestimme analytisch und geometrisch (Mohrscher Kreis) den normalen Einheitsvektor  $\underline{n}$  der zur x-Achsen parallelen Fläche, bei der keine Schubspannungen wirken. Wie gross ist die Normalspannung auf dieser Fläche?



# Mechanik II: Deformierbare Körper

für D-BAUG, D-MAVT

## Haus- & Schnellübung 3

### Lösung zu Aufgabe S3:

#### Analytischer Lösungsweg

#### 1. Spannungstensor aufstellen

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} k$$

#### 2. Hauptspannungen durch das Eigenwertproblem lösen

$$\det \left[ \underline{\underline{T}} - \sigma \cdot \underline{\underline{I}} \right] = -\det \left[ \sigma \cdot \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{T}} \right] = 0$$

$$\rightarrow \sigma_1 = 4k \text{ (aus dem Tensor ersichtlich), } \quad \sigma_2 = 2k, \quad \sigma_3 = -2k$$

#### 3. Hauptachsen berechnen

Aus dem Tensor sieht man, dass  $\underline{e}_1 = \underline{e}_x$ . Der Rest wird mit der Gleichung

$$\left[ \sigma_i \cdot \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{T}} \right] \cdot \underline{n}_i = 0 \text{ gelöst.}$$

$$\underline{e}'_2 = 2t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{normieren}} \underline{e}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \underline{n}_2$$

$$\underline{e}'_3 = 3t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{normieren}} \underline{e}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{n}_3$$

Beide Flächen sind Schubspannungsfrei.

#### 4. Normalspannungen berechnen

Die Normalspannungen wurden am Anfang schon berechnet; Es sind nämlich die Hauptspannungen.

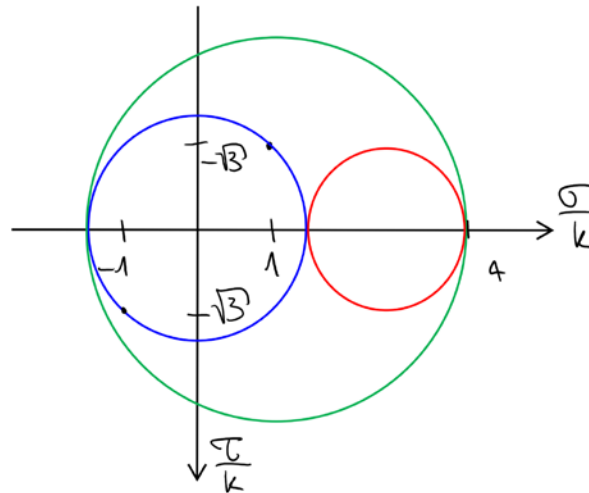
$$\sigma_2 = 2k, \quad \sigma_3 = -2k$$

**Mechanik II: Deformierbare Körper**  
 für D-BAUG, D-MAVT

**Haus- & Schnellübung 3**

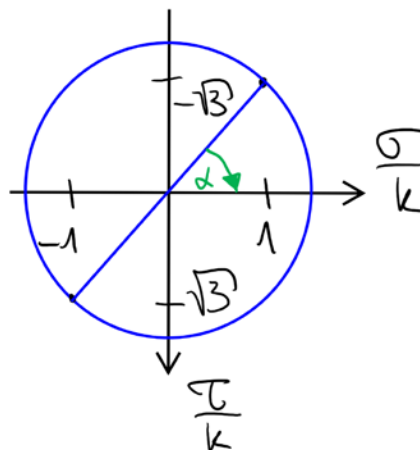
Geometrischer Lösungsweg:

**1. Mohrscher Kreis Zeichnen**



Da in der Aufgabenstellung nur um die x-Achse gedreht wird, muss man nicht unbedingt alle drei Kreise zeichnen, sondern man kann auch nur den blauen Kreis zeichnen, da die x-Achse eine Haupttrichtung ist.

**2. Aus dem blauen Kreis den Drehwinkel berechnen, um in den Hauptspannungszustand zu kommen**



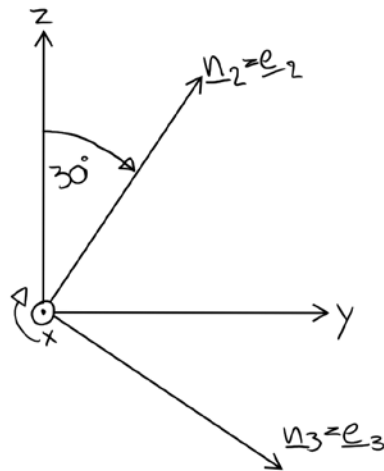
$\alpha = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = 60^\circ \rightarrow$  In der Realität wird um  $30^\circ$  im Uhrzeigersinn gedreht.

## Mechanik II: Deformierbare Körper

für D-BAUG, D-MAVT

## Haus- & Schnellübung 3

### 3. Hauptspannungsrichtungen berechnen



Aus der Zeichnung sieht man, dass

$$\underline{n}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \underline{n}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Im Mohrschen Kreis sieht man, dass man so dreht, dass der Eintrag  $(\sigma_z, -\tau_{yz})$  zum Punkt  $(\sigma_2, 0)$  wird. Dies motiviert die Tatsache, dass die z-Achse zur Achse  $\underline{e}_2$  wird. Analog kann man die gleiche Bemerkung für die y-Achse machen.

### 4. Hauptspannungen berechnen

Da der blaue Kreis bezüglich der Normal- und Schubspannungsachse symmetrisch ist

werden die Hauptspannungen bei  $\pm R$  liegen. Mit  $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2}$  kriegt man für die Hauptspannungen die folgende Werte:

$$\sigma_2 = 2k, \quad \sigma_3 = -2k$$

## Mechanik II: Deformierbare Körper

für D-BAUG, D-MAVT

### Haus- & Schnellübung 3

---

#### Aufgabe H1:

Im Spannungstensor des Punktes P eines Körpers seien die Komponenten  $\sigma_z$  und  $\tau_{xz}$  unbekannt, die restlichen Komponenten des Tensors sind bestimmt:

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 3k & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 2k & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Weiter seien die Werte von zwei Hauptspannungen gegeben:

$$\sigma_1 = 5k, \quad \sigma_3 = -3k$$

- a) Bestimmen Sie die fehlenden Komponenten des Spannungstensors mit der Annahme, dass der Eintrag  $\tau_{xz}$  positiv ist.
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- b) Welche Richtungen haben die Hauptachsen?



**Mechanik II: Deformierbare Körper**  
 für D-BAUG, D-MAVT

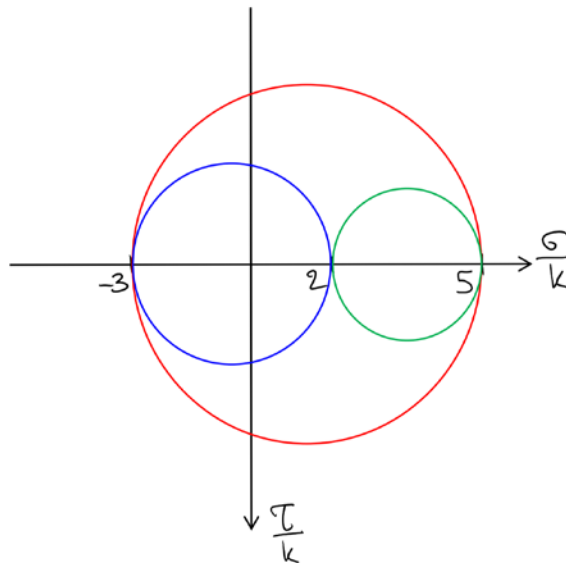
**Haus- & Schnellübung 3**

Lösung zu Aufgabe H1:

Lösungsteil a):

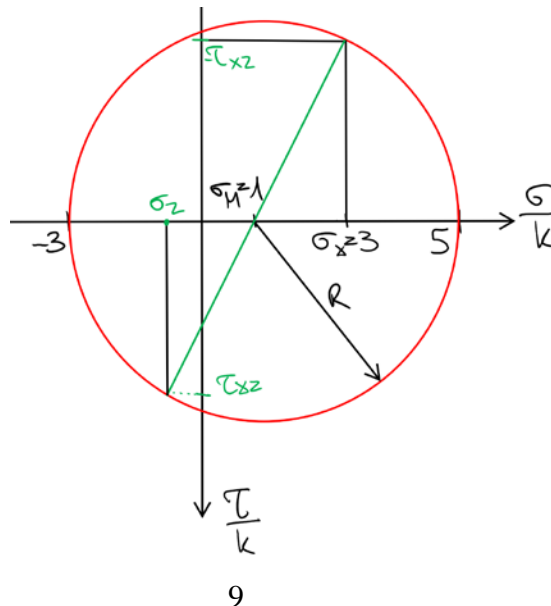
Da alle drei Hauptspannungen gegeben sind, kann man diese Aufgabe am besten geometrisch mit dem Mohrschen Spannungskreis lösen.

**1. Mohrscher Kreis zeichnen**



**2. Alle gesuchten Informationen können nun von der Geometrie des grössten Kreises abgelesen werden.**

2.1. Den grössten Kreis isolieren und die zu berechnenden Koeffizienten eintragen



# Mechanik II: Deformierbare Körper

für D-BAUG, D-MAVT

## Haus- & Schnellübung 3

Wenn man den Spannungstensor zyklisch vertauscht, merkt man, dass, falls  $\tau_{xz}$  positiv ist, die Schubspannung bei  $\sigma_x$  negativ und bei  $\sigma_z$  positiv sein muss.

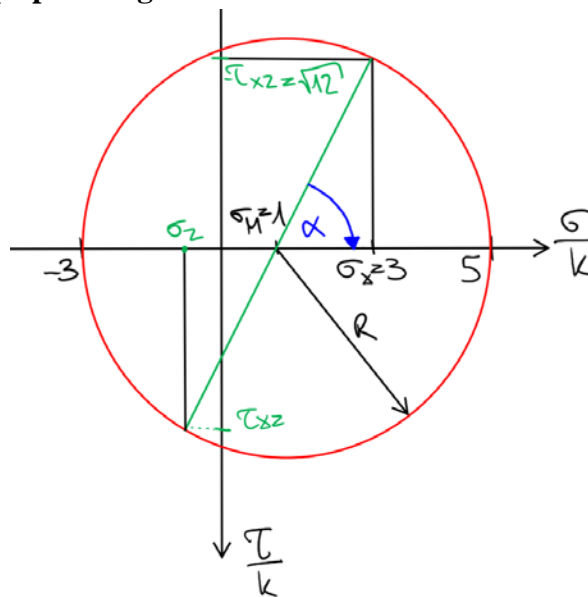
2.2.  $\sigma_z$  und  $\tau_{xz}$  berechnen

$$\sigma_M = 1, \quad R = 4$$

$$\tau_{xz} = \sqrt{R^2 - (\sigma_x - \sigma_M)^2} = \boxed{2\sqrt{3}k}, \quad \sigma_z = \sigma_M - (\sigma_x - \sigma_M) = \boxed{-k}$$

Lösungsteil b):

### 1. Drehwinkel des Hauptspannungszustandes berechnen



$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{\tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_M} \right) = 60^\circ \rightarrow \text{In der Realität wird um } 30^\circ \text{ im Uhrzeigersinn gedreht.}$$

### 2. Hauptspannungsrichtungen berechnen

Aus der Zeichnung sieht man, dass

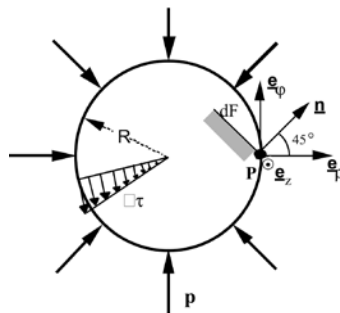
$$\underline{e}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_2 = \underline{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

**Mechanik II: Deformierbare Körper**  
 für D-BAUG, D-MAVT

**Haus- & Schnellübung 3**

Aufgabe H2:

Gegeben sein ein unter Torsion und hydrostatischen Druck  $p$  belasteten Stab. Überlege dir, wie der hydrostatische Druck genau definiert ist. Die von der Torsion verursachten Schubspannung wächst linear mit zunehmenden Abstand von der Stabsachse:  $\tau(\rho) = \tau_0 \frac{\rho}{R}$ . Die restlichen Informationen sind in der Skizze vorhanden.



a) Finden Sie den Spannungstensor  $\underline{T}_{\rho=R, \varphi, z}$ .

b) Berechnen Sie die Normal- und Schubspannung auf der Fläche  $dF$ .

**Mechanik II: Deformierbare Körper**  
für D-BAUG, D-MAVT**Haus- & Schnellübung 3**Lösung zu Aufgabe H2:Lösungsteil a)**1. Zuerst allgemein**

$$\underline{T}_{\rho,\varphi,z} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & \tau_0 \frac{\rho}{R} \\ 0 & \tau_0 \frac{\rho}{R} & -p \end{bmatrix}$$

**2. Für  $\rho = R$** 

$$\underline{T}_{\rho=R,\varphi,z} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & \tau_0 \\ 0 & \tau_0 & -p \end{bmatrix}$$

Lösungsteil b):**1. Normalenvektor bestimmen**

$$\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**2. Spannungsvektor berechnen**

$$\underline{s} = \underline{T} \cdot \underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -p \\ -p \\ \tau_0 \end{pmatrix}$$

**3. Normalspannung berechnen**

$$\sigma = \underline{s} \cdot \underline{n} = \boxed{-p}$$

**4. Schubspannung berechnen**

$$|\underline{\tau}| = |\underline{s} - \sigma \cdot \underline{n}| = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \tau_0}$$

## Mechanik II: Deformierbare Körper

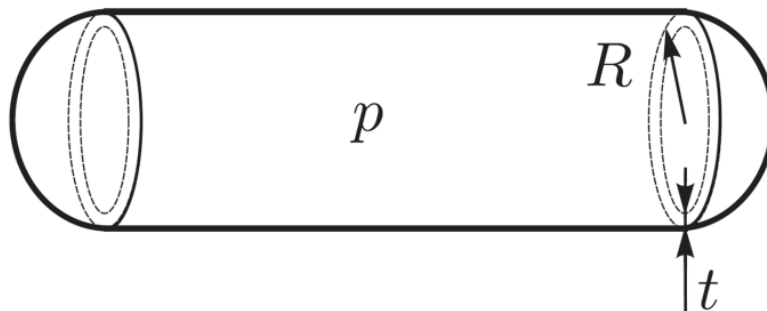
für D-BAUG, D-MAVT

### Haus- & Schnellübung 3

#### Wiederholungsaufgabe:

Es wird der Spannungszustand ( $\tau_{xr} = \tau_{x\varphi} = \tau_{\varphi r} = 0$ ) in einem dünnwandigen ( $t \ll R$ ) zylindrischen Kessel (Radius  $R$ , Dicke  $t$ , Länge  $L$ ) untersucht. Der Innendruck  $p$  sei homogen verteilt. Dabei soll nur der Bereich betrachtet werden, der hinreichend weit von den Deckeln entfernt ist. Der Spannungszustand ist dann unabhängig vom Ort.

- Bestimmen Sie die unbekanntenen Spannungen, indem man den Kessel einmal längs und einmal quer schneidet und dann das Gleichgewicht am abgeschnittenen System fordert.
- Finden Sie den Spannungstensor und zeichnen Sie den Mohrschen Kreis für diesen Spannungszustand.
- Wie ändert sich der Mohrsche Kreis, wenn man statt eines zylindrischen Kessels einen kugelförmigen Kessel mit Innendruck  $p$  betrachtet?



Annahme: Die senkrechte Komponente der Kugeloberfläche an den Enden des Zylinders kann als den senkrechteren Querschnitt des Zylinders approximiert werden.

**Mechanik II: Deformierbare Körper**  
für D-BAUG, D-MAVT

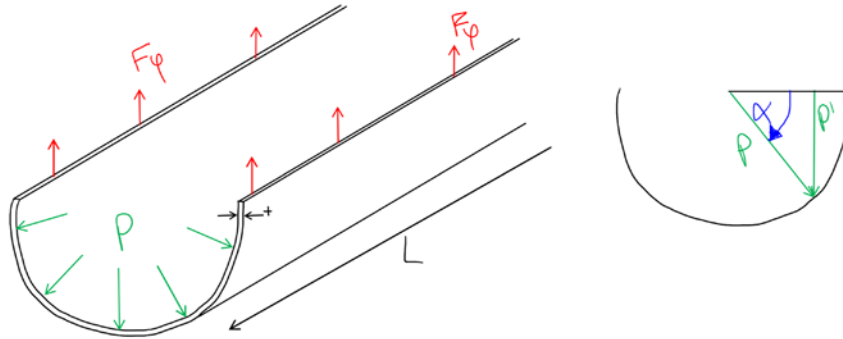
**Haus- & Schnellübung 3**

Lösung zur Wiederholungsaufgabe:

Aufgabenteil a)

**1. Kessel längs schneiden**

1.1. Freischnitt



1.2. Vertikale Druckkraft auf der Zylinderinnenfläche berechnen

Im Allgemeinen ist die Kraft-Druck-Beziehung wie folgt definiert:

$$F = \iint p \, dA$$

Auf unserer Aufgabe übersetzt also:

$$F_p = L \cdot \underbrace{R \int_0^\pi p'(\varphi) d\varphi}_\text{Druckverteilung auf dem Umfang} = LR \underbrace{(-p)}_{\text{negativ, da Druck}} \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi = -2LpR$$

1.3. Gleichgewichtsbedingungen aufstellen

$$\sum F_\varphi = 0 = F_p + F_\varphi \rightarrow F_\varphi = 2LpR$$

1.4. Spannung berechnen

$$\sigma_\varphi = \frac{F_\varphi}{2tL} = \boxed{\frac{pR}{t}}$$

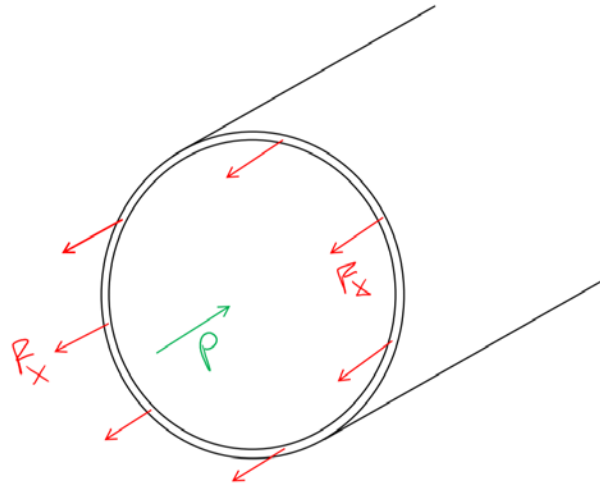
# Mechanik II: Deformierbare Körper

für D-BAUG, D-MAVT

## Haus- & Schnellübung 3

### 2. Kessel quer schneiden

#### 2.1. Freischnitt



#### 2.2. Axiale Druckkraft auf der Zylinderinnenfläche berechnen

$$F_p = -p\pi R^2$$

#### 2.3. Gleichgewichtsbedingungen aufstellen

$$\sum F_x = 0 = F_p + F_x \rightarrow F_x = p\pi R^2$$

#### 2.4. Spannung berechnen

$$\sigma_x = \frac{F_x}{2\pi R t} = \boxed{\frac{pR}{2t}} = \frac{\sigma_\varphi}{2}$$

Lösungsteil b):

### 1. Spannungstensor

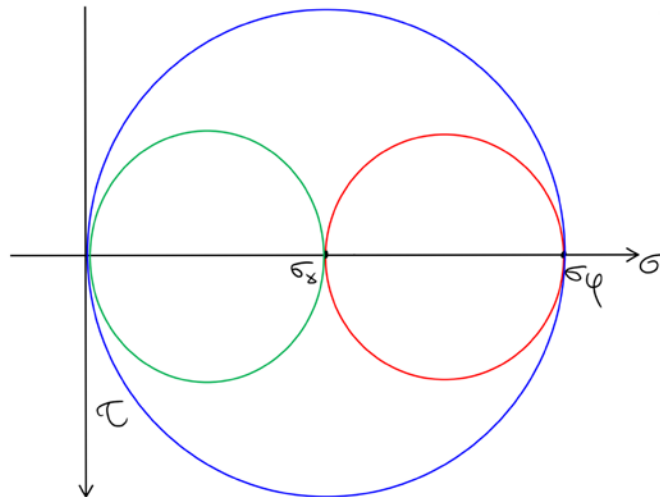
$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & \frac{pR}{t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{pR}{2t} \end{bmatrix} \approx \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{pR}{t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{pR}{2t} \end{bmatrix}}$$

Die Approximation am Schluss ist motiviert von der Tatsache, dass  $t \ll R$ .

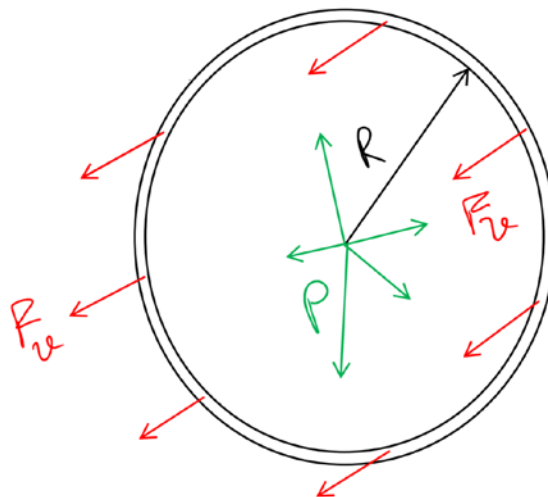
**Mechanik II: Deformierbare Körper**  
 für D-BAUG, D-MAVT

**Haus- & Schnellübung 3**

**2. Mohrscher Kreis**



Lösungsteil c):



Dank der Annahme in der Aufgabenstellung gilt:

$$\sigma_{\theta} = \sigma_x$$



## Mechanik II: Deformierbare Körper

für D-BAUG, D-MAVT

### Haus- & Schnellübung 3

Der Mohrscher Kreis reduziert sich also teilweise zu einem Punkt, da es keinen Unterschied mehr macht, in welcher Richtung man die Kugel in der Mitte schneidet:

