Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

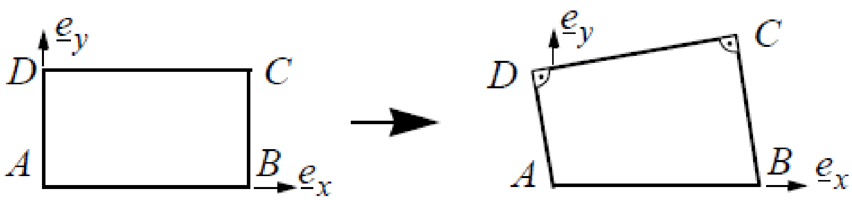
Prof. D. Mohr
FS2018

Mechanik II: Deformierbare Körper

für D-BAUG, D-MAVT **Haus- & Schnellübung 4**

Aufgabe S1:

Der Querschnitt eines langen Stabes deformiert sich im ebenen Verformungszustand gemäss der Skizze (kleine Deformationen). Die Strecke AD, DC und AB bleiben in ihrer Länge unverändert.



Ordnen Sie den vier Ecken die richtigen Verzerrungstensoren zu.

a) Ecke A

A1. 5 mögliche Antworten	Ⓐ $\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 0 & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$	Ⓑ $\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	Ⓒ $\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$	Ⓓ $\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 0 & -k \\ -k & 0 \end{bmatrix}$	Ⓔ $\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$

b) Ecke B

A1. 5 mögliche Antworten	Ⓐ $\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 0 & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$	Ⓑ $\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	Ⓒ $\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$	Ⓓ $\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 0 & -k \\ -k & 0 \end{bmatrix}$	Ⓔ $\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$

c) Ecke C

A1. 5 mögliche Antworten	Ⓐ $\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 0 & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$	Ⓑ $\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	Ⓒ $\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$	Ⓓ $\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 0 & -k \\ -k & 0 \end{bmatrix}$	Ⓔ $\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$

d) Ecke D

A1. 5 mögliche Antworten	Ⓐ $\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 0 & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$	Ⓑ $\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	Ⓒ $\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$	Ⓓ $\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 0 & -k \\ -k & 0 \end{bmatrix}$	Ⓔ $\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$

Lösung zu Aufgabe S1:

Um diese Aufgabe richtig zu lösen müssen drei Zusammenhänge bekannt sein:

1) Keine Längenänderung → keine Axialdehnung → $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$
2) Keine Winkeländerung → keine Schubdehnung → $\varepsilon_{xy} = 2\gamma_{xy} = 0$
3) Respektive der Koordinatenachse positive Winkeländerung → $\gamma_{xy} < 0$

- Punkt A: Die Längen AB und AD bleiben konstant, der Winkel wird resp. der y-Achse grösser.

$$\boxed{\underline{\underline{E_A}} = \begin{bmatrix} 0 & -k \\ -k & 0 \end{bmatrix}}$$

- Punkt B: Die Länge AB bleibt konstant aber die Länge BC wird in positiver y-Richtung gestreckt, der Winkel wird resp. der y-Achse grösser.

$$\boxed{\underline{\underline{E_B}} = \begin{bmatrix} 0 & -k \\ -k & k \end{bmatrix}}$$

- Punkt C: Die Länge DC bleibt konstant aber die Länge BC wird in positiver y-Richtung gestreckt, der Winkel bleibt konstant.

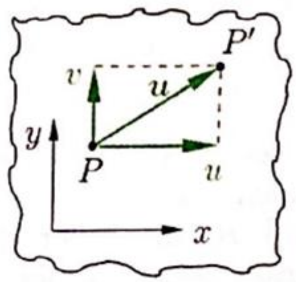
$$\boxed{\underline{\underline{E_C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}}$$

- Punkt D: Die Längen DC und AD bleiben konstant, der Winkel bleibt auch konstant. Deswegen kommen im Punkt D keine Deformationen vor, sondern nur eine Starrkörperdrehung

$$\boxed{\underline{\underline{E_D}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

Aufgabe S2:

Für eine Scheibe wurde aus Messungen das folgende ebene Verschiebungsfeld ermittelt:



$$\underline{u}(x,y) = \begin{pmatrix} u_0 + 7 \cdot 10^{-3}x + 4 \cdot 10^{-3}y \\ v_0 + 2 \cdot 10^{-3}x - 1 \cdot 10^{-3}y \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie den Verzerrungstensor.

b) Wie groß sind die Hauptdehnungen und um wie viel muss das Koordinatensystem gedreht werden, damit man den Hauptdehnungszustand erreicht?

c) Wie groß ist die maximale Winkelverzerrung?

Lösung zu Aufgabe S2:

Aufgabenteil a)

1. Die einzelne Elemente des Verzerrungstensors mit den Verzerrungsableitungen bestimmen

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 7 \cdot 10^{-3}, \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -1 \cdot 10^{-3}, \qquad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 3 \cdot 10^{-3}$$

2. Den Verzerrungstensor aufstellen

$$\boxed{\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}}$$

Aufgabenteil b)

1. Die Hauptdehnungen berechnen

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \varepsilon_{xy}^2} \rightarrow \boxed{\varepsilon_1 = 8 \cdot 10^{-3}}, \qquad \boxed{\varepsilon_2 = -2 \cdot 10^{-3}}$$

2. Den Drehwinkel berechnen

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}\right) = \boxed{18.4°}$$

Aufgabenteil c)

Die maximale Winkelverzerrung ist definiert als

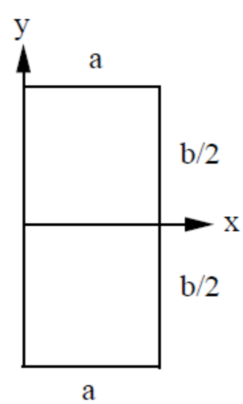
$$\gamma_{max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \boxed{1 \cdot 10^{-2}}$$

Aufgabe S3:

Bei der abgebildeten dünnen Scheibe (Dicke $t \ll a, b$) sind die Schubspannungen an dem Flächenelement mit äusseren Normalen x und y gegeben. Die Volumenkräfte sind vernachlässigbar.

$$\tau_{xy} = \frac{4q}{b^2} y^2, \qquad \underline{f} = 0$$

Es sei bekannt, dass die Normalspannung in x-Richtung entlang der y-Achse Null sei und dass die Normalspannung in y-Richtung für $y = \frac{b}{2}$ auch Null sei.



Ermitteln Sie die Normalspannungsverteilung.

Lösung zu Aufgabe S3:

1. **Aus den GGB für räumlich nicht konstante Spannungen die Differentialgleichungen für die Normalspannungen finden**

$$\sum F_x: \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \qquad \sum F_y: \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0$$

$$\rightarrow \sigma_x = -\int \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dx\,, \qquad \sigma_y = -\int \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dy$$

2. **Die Normalspannungsverteilung berechnen**

2.1. Allgemeine Lösung berechnen

$$\sigma_x = -\frac{8q}{b^2} yx + C(y), \qquad \sigma_y = C(x)$$

2.2. Spezielle Lösung mittels Randbedingungen finden

$$\sigma_x(x=0) = C(y) = 0 \rightarrow \boxed{\sigma_x = -\frac{8q}{b^2} yx}$$

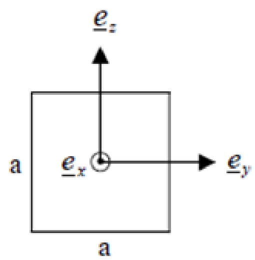
$$\sigma_y\left(y = \frac{b}{2}\right) = C(x) = 0 \rightarrow \boxed{\sigma_y = 0}$$

Mechanik II: Deformierbare Körper

für D-BAUG, D-MAVT **Haus- & Schnellübung 4**

Aufgabe H1:

Gegeben sei ein Verschiebungsfeld eines deformierbaren Stabes mit Querschnittsfläche a^2.



$$\underline{u}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xz \\ -\nu yz \\ \frac{1}{2}(-x^2 + \nu y^2 - \nu z^2) \end{pmatrix} K, \qquad K > 0$$

a) Finden Sie zuerst den Verzerrungstensor und zeichne anschliessend den Mohrscher Dehnungskreis.

b) In welchen Punkten des Stabes und in welchen Richtungen sind die Schubwinkel maximal?

Lösung zu Aufgabe H1:

Aufgabenteil a)

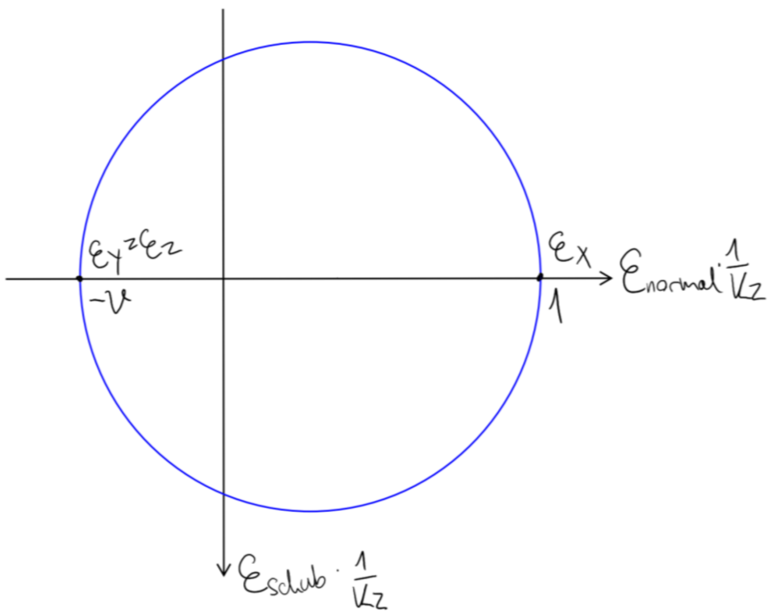
1. Elemente des Tensors einzeln mittels Verschiebungsableitungen berechnen

$$\varepsilon_x = Kz, \qquad \varepsilon_y = -K\upsilon z, \qquad \varepsilon_z = -K\upsilon z, \qquad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$$

2. Tensor aufstellen

$$\boxed{\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\upsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\upsilon \end{bmatrix} \cdot Kz}$$

3. Mohrschen Dehnungskreis zeichnen



Aufgabenteil b)

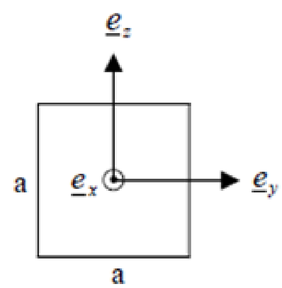
1. Maximalen Schubwinkel berechnen

1.1. Allgemein

$$\varepsilon_{max} = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} = \frac{1}{2}Kz(1+\upsilon) \rightarrow \varepsilon_{max} \propto z$$

1.2. ε_{max} mittels geometrischer Beobachtung bestimmen

Aus der Beziehung $\varepsilon_{max} \propto z$ wissen wir, dass unsere Schubdehnung dort maximal ist, wo z maximal ist.



Falls man den gegebenen Querschnitt betrachtet ist es klar, dass $z_{max} = \frac{a}{2}$ und somit

$$\boxed{\varepsilon_{max} = \frac{1}{4}aK(1+\upsilon)}$$

2. Richtungen der maximalen Schubwinkel

Um die maximalen Schubdehnung zu berechnen, benötigen wir die maximale Schubspannung. Deshalb gilt hier genau das gleiche wie bei den Spannungen: Dreht man den Hauptdehnungszustand um $\pm 45°$ in der Realität, erhält man die maximale Schubdehnung.

$$\underline{e}_y = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \rightarrow \underline{a}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix}, \underline{b}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$\underline{e}_z = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \rightarrow \underline{a}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\-\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix}, \underline{b}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

Aufgabe H2:

Gegeben sei ein Verzerrungstensor.

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 11 & 5\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 1 & -6 \\ 2\sqrt{3} & -6 & -12 \end{bmatrix} \frac{1}{16} \cdot 10^{-3}$$

Berechnen Sie die Hauptdehnungen und die Hauptdehnungsachsen mit der charakteristischen Gleichung mit den Grundinvarianten.

Lösung zu Aufgabe H2:

Aufgabenteil a):

1. Hauptdehnungen berechnen

1.1. Grundinvarianten des Tensors berechnen

$$\varepsilon_I = spur\left(\underline{\underline{E}}\right) = 0, \qquad \varepsilon_{III} = \det\left(\underline{\underline{E}}\right) = 0$$

$$\varepsilon_{II} = -\varepsilon_x\varepsilon_y - \varepsilon_x\varepsilon_z - \varepsilon_z\varepsilon_y + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = 1 \cdot 10^{-6}$$

1.2. Grundinvarianten in die charakteristische Gleichung einsetzen und die Hauptdehnungen ausrechnen

$$\varepsilon_i^3 - 1 \cdot 10^{-6}\varepsilon_i = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\varepsilon_1 = 1 \cdot 10^{-3}, \qquad \varepsilon_2 = 0, \qquad \varepsilon_3 = -1 \cdot 10^{-3}}$$

2. Hauptdehnungsachsen berechnen

Eigenvektoren mit der Gleichung $\left(\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{I}} \cdot \varepsilon_i\right) \cdot \underline{e}_i = 0$ berechnen:

$$\rightarrow \boxed{\underline{e}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{e}_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \underline{e}_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}}$$

Wiederholungsaufgabe:

Von dem Spannungszustand in einem materiellen Punkt P sei folgendes bekannt:

$$\underline{s}(\underline{e}_x) = 3k\underline{e}_x + k\underline{e}_y, \qquad \underline{s}(\underline{e}_y) = ?\,\underline{e}_x + ?\,\underline{e}_y, \qquad \underline{s}(\underline{e}_z) = ?\,\underline{e}_x + ?\,\underline{e}_y + ?\,\underline{e}_z$$

- Am Flächenelement mit dem Normalenvektor $\underline{n}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ verschwindet die Normalspannung.
- Am Flächenelement mit dem Normalenvektor $\underline{n}_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ist der Vektor der Schubspannung $\underline{\tau} = \frac{\sqrt{3}}{9}k\begin{pmatrix}5\\11\\-16\end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie die Komponente des Spannungstensors $\underline{\underline{T}}_{xyz}$.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Mohr'schen Kreises

  i. Die Hauptspannungen.
  ii. Die absolut grösste Schubspannung.
  iii. Die Hauptrichtungen.

Lösung zur Wiederholungsaufgabe:

Aufgabenteil a):

1. Spannungstensor mit den gegebenen Daten aufstellen

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 3k & k & 0 \\ k & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

2. Gegebenen Gleichungen konkret schreiben

Mit $\underline{s}(\underline{n}) = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{n}$, $\sigma = \underline{s}(\underline{n}) \cdot \underline{n}$ und $\underline{\tau} = \underline{s}(\underline{n}) - \sigma \cdot \underline{n}$ bekommt man die Gleichungen:

$$\sigma_1 = \left(\underline{\underline{T}} \cdot \underline{n}_1\right) \cdot \underline{n}_1 = 0 \ (1), \qquad \underline{\tau} = \left(\underline{\underline{T}} \cdot \underline{n}_2\right) - \left[\left(\underline{\underline{T}} \cdot \underline{n}_2\right) \cdot \underline{n}_2\right] \cdot \underline{n}_2 = \frac{\sqrt{3}}{9} k \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -16 \end{pmatrix} (2)$$

3. Gleichungen nach $\boldsymbol{\sigma_x}$ und $\boldsymbol{\sigma_y}$ auflösen

Aus Gleichung (1) erhält man:

$$\sigma_z = -3k$$

Aus der Gleichung (2) erhält man:

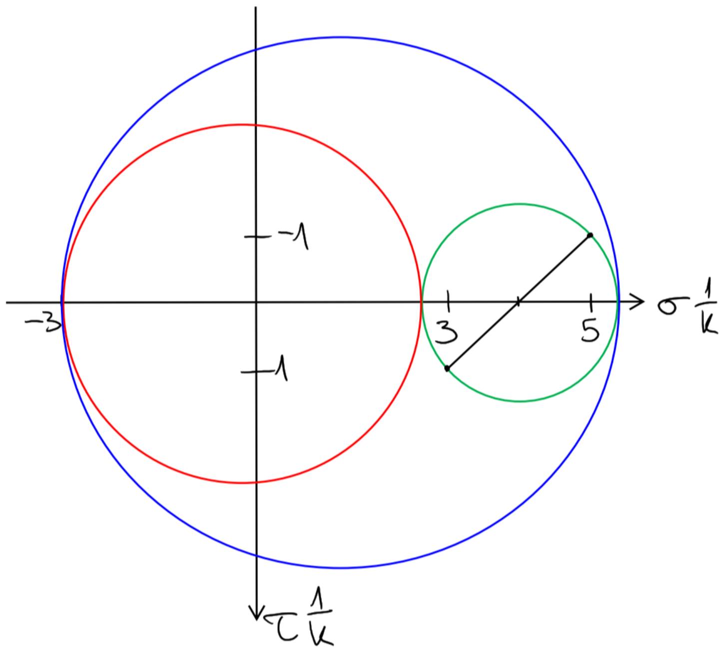
$$\sigma_y = 5k$$

Der richtige Spannungstensor für den gegebenen Zustand ist demzufolge:

$$\boxed{\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 3k & k & 0 \\ k & 5k & 0 \\ 0 & 0 & -3k \end{bmatrix}}$$

Aufgabenteil b):

1. Mohrscher Kreis zeichnen



2. Hauptspannungen berechnen

$$\sigma_{1,2} = \sigma_M \pm r = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \rightarrow \boxed{\sigma_1 = (4+\sqrt{2})k,} \quad \boxed{\sigma_2 = (4-\sqrt{2})k}$$

3. Absolut maximale Schubspannung berechnen

$$\tau_{abs} = R = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \boxed{\frac{1}{2}(7+\sqrt{2})k}$$

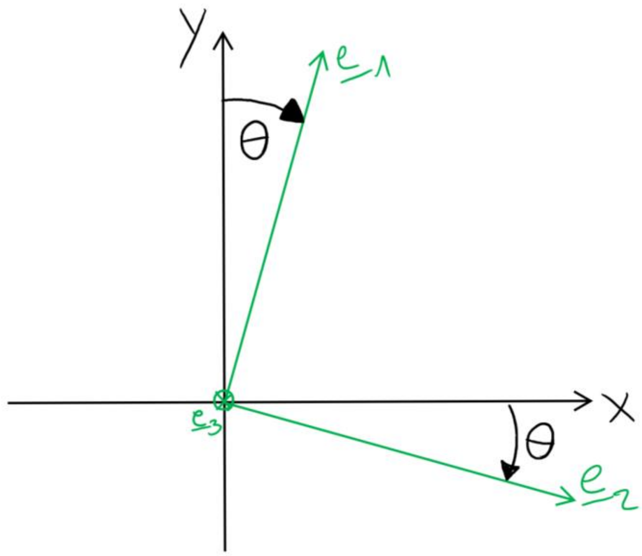
4. Hauptrichtungen berechnen

4.1. Drehwinkel bestimmen

$$\theta = \frac{45°}{2} = 22.5°$$

Der Winkel ist direkt aus der Geometrie des grünen Kreises ersichtlich.

4.2. Hauptrichtungsvektoren bestimmen



$$\boxed{\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} \sin 22.5° \\ \cos 22.5° \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} \cos 22.5° \\ -\sin 22.5° \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{e}_3 = -\underline{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$$