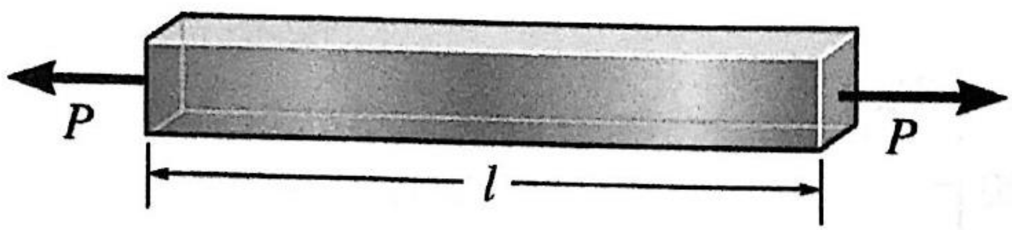
Mechanik II: Deformierbare Körper

für D-BAUG, D-MAVT **Haus- & Schnellübung 5**

Aufgabe S1:

Auf einem Balken der Länge l_0 und der Querschnittsfläche A_0 wirkt eine Axiallast P. Bestimmen Sie das Elastizitätsmodul des Material, wenn dieser sich um Δl ausdehnt. Das Material hat linear-elastisches Verhalten.

Gegeben: $P = 80kN, l_0 = 125mm,\ A_0 = 500mm^2,\ \Delta l = 0.05mm$



S1. 5 mögliche Antworten	Ⓐ $E = 400GPa$	Ⓑ $E = 400MPa$	Ⓒ $E = 400kPa$	Ⓓ $E = 200MPa$	Ⓔ $E = 200GPa$

Um was für ein Material handelt es sich womöglich?

Lösung zu Aufgabe 1:

1. E-Modul berechnen

Hook'sches Gesetz: $\sigma = E\varepsilon$, Normaldehnung: $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$

$$\rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\frac{P}{A_0}}{\frac{\Delta l}{l_0}} = \frac{Pl_0}{A_0 \Delta l} = \boxed{400GPa}$$

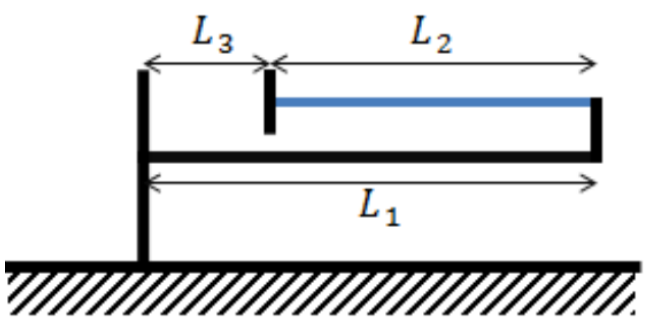
2. Material bestimmen

Als Maschinenbau- oder Bauingenieur/in ist es hilfreich zu wissen, was die Grössenordnug der E-Module verschiedener Materialen ist. In unserem Beispiel handelt es sich sehr wahrscheinlich um ein Siliciumkarbid (SiC). Weitere wichtige Materialen sind Stahl ($E_{Stahl} \approx 200GPa$) und Aluminium ($E_{Alu} \approx 70GPa$).

Aufgabe S2:

Die gegebene Konstruktion besteht aus zwei verschiedene Materialen. Das schwarze Material hat den Wärmeausdehnungskoeffizienten α_1 und derjenige des blauen Materials ist α_2.

Welche Eigenschaft muss die Geometrie der Konstruktion haben, damit die Länge L_3 bei einer Raumerwärmung um ΔT konstant bleibt?



Lösung zu Aufgabe S2:

1. Geometrische Bedingung für ein konstantes L_3 aufstellen

$$\Delta L_3 = \Delta L_1 - \Delta L_2 = 0 \rightarrow \Delta L_1 = \Delta L_2$$

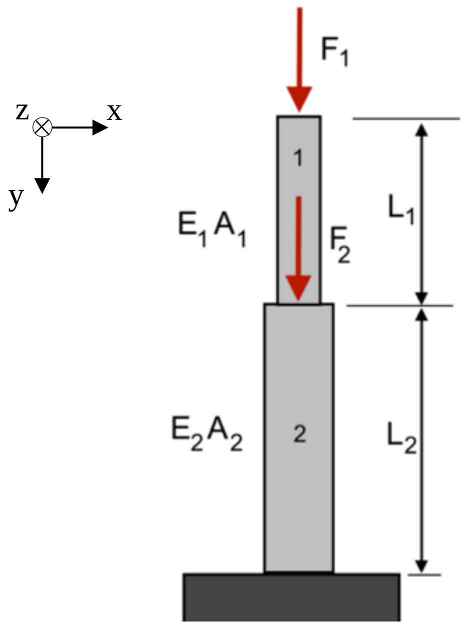
2. Mittels der Wärmedehnungsdefinition die gesuchte Bedingung finden

$$\Delta L = L_0 \alpha \Delta T$$

$$\rightarrow L_1 \alpha_1 \Delta T = L_2 \alpha_2 \Delta T \rightarrow \boxed{\frac{L_1}{L_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}}$$

Aufgabe S3:

Gegeben seien zwei aufeinandergestapelte Säulen mit gleichen Materialeigenschaften. Die Kraft F_1 wirke direkt auf der oberen Säule mit der Querschnittsfläche A_1 und dem E-Modul E_1 und die Kraft F_2 dagegen nur auf der zweiten Säule mit der Querschnittsfläche A_2 und dem E-Modul E_2.



Gegeben: $F_1 = 12kN,\ F_2 = 9kN,\ A_1 = 80cm^2,\ L_1 = 30cm,\ L_2 = 40cm,\ E_2 = 210GPa$

a) Berechnen Sie die Normalspannung in der oberen Säule.

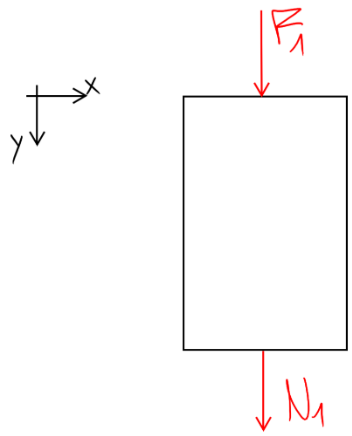
b) Die Normalspannung in der zweiten Säule sollte gleich der in der ersten Säule sein. Wie gross muss A_2 dafür sein?

c) Berechnen Sie die totale Längenänderung des Systems.

Lösung zu Aufgabe S3

Aufgabenteil a):

1. Normalkraft in der oberen Säule berechnen



$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_1 = -F_1$$

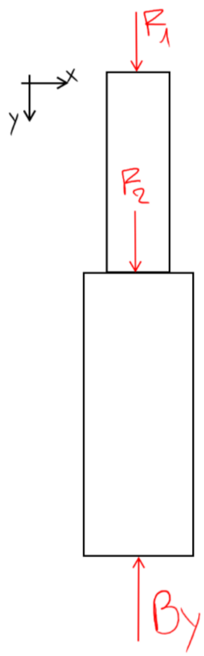
2. Normalspannung berechnen

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \boxed{-1.5MPa}$$

Aufgabenteil b):

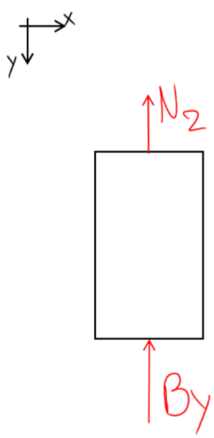
1. Normalspannung in der unteren Säule berechnen

1.1. Lagerkraft berechnen



$$\sum F_y = 0 \rightarrow B_y = F_1 + F_2$$

1.2. Beanspruchung in der unteren Säule berechnen



$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_2 = -B_y$$

1.3. Normalspannung berechnen

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2}$$

2. Fläche A_2 berechnen

$$\sigma_1 = \sigma_2 \rightarrow A_2 = \frac{N_2}{\sigma_1} = \boxed{140mm^2}$$

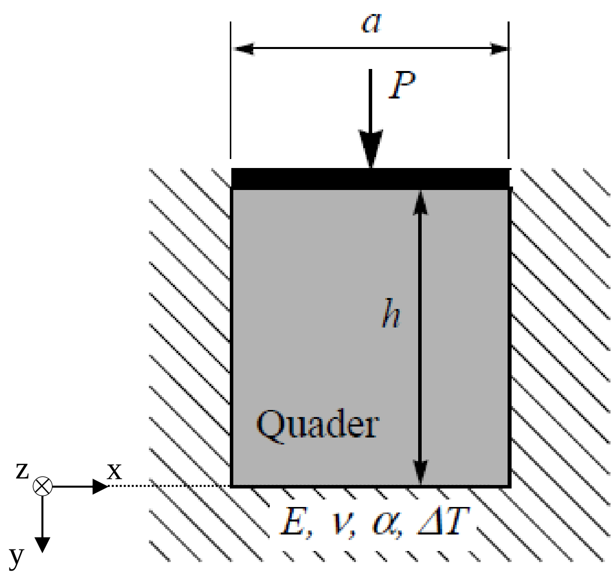
Aufgabenteil c):

$$\Delta L_{tot} = \Delta L_1 + \Delta L_2 = \varepsilon_1 L_1 + \varepsilon_2 L_2 = \frac{\sigma_1}{E_1} L_1 + \frac{\sigma_2}{E_2} L_2 = \boxed{-5\mu m}$$

Bemerkung: Da die beiden Säulen die gleichen Materialeigenschaften haben, muss $E_1 = E_2$ gelten.

Aufgabe H1:

Ein elastischer Quader der Höhe h, Breite a und Tiefe b wird durch die Kraft P in einen Hohlraum derselben Querschnittsfläche $A = ab$ gepresst und dann um ΔT erwärmt. Sowohl der Stempel wie auch die Wände können als starr angenommen werden (Die Reibung mit der Wand ist zu vernachlässigen).



a) Wie gross sind die auftretenden Spannungen?

b) Welche Verschiebung erfolgt in Richtung der Kraft?

Lösung zu Aufgabe H1

Aufgabenteil a):

1. Welche Bedingungen gelten?

Da die Wände starr sind, hat der Quader keine Möglichkeit sich seitwärts in die x-und z-Richtung auszudehnen. Deshalb gilt $\varepsilon_z = \varepsilon_x = 0$.

Da bei homogener Temperaturänderung die Wärmedehnung in allen Richtungen gleich ist, sind die Spannungen, die von dieser Wärmedehnung versursacht werden, in jede Richtung gleich: $\sigma_z = \sigma_x$. Da σ_y auch einen Beitrag von der Kraft P hat, ist sie verschieden.

Bemerkung: Wegen des Hook'sches Gesetz $\sigma = E\varepsilon$ könnte es verwirrend sein, wenn Spannungen auftreten, ohne dass eine Dehnung stattfindet. Man muss sich die Schritte aber ohne Wände so vorstellen:

1. Der Quader wird erwärmt und dehnt sich deshalb aus.
2. Auf dem Quader wirken Kräfte, die in der Realität bei uns durch die starren Wände verursacht werden, die den Quader in die ursprüngliche Form zusammendrücken.
3. Wenn man jetzt den Anfangs- und Endzustand vergleicht und sich an die Definition der Normaldehnung $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ erinnert, ist die Dehnung schlussendlich Null. Die Spannungen aber nicht, da der Quader zurückgedehnt wurde.

Dies gilt aber nicht für σ_y, da sich der Quader in diese Richtung ausdehnen kann.

2. $\boldsymbol{\sigma_y}$ berechnen

$$\sigma_y = \frac{N_y}{A} = \boxed{-\frac{P}{ab}}$$

3. $\boldsymbol{\sigma_x}$ und $\boldsymbol{\sigma_z}$ berechnen

Setzt man die Bedingungen aus dem ersten Schritt in die folgenden Gleichungen ein:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] + \alpha\Delta T, \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] + \alpha\Delta T,$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_y + \sigma_x\right)\right] + \alpha\Delta T$$

erhält man nach auflösen:

$$\sigma_x = \sigma_z = \boxed{-\frac{1}{1-\nu}\left[\frac{\nu P}{ab} + E\alpha\Delta T\right]}$$

Aufgabenteil b):

1. Dehnung $\boldsymbol{\varepsilon_y}$ berechnen

Setzt man die Spannungen in die Gleichung $\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)\right] + \alpha\Delta T$ bekommt man

$$\varepsilon_y = -\frac{P}{abE}\left(1 - \frac{2\nu^2}{1-\nu}\right) + \left(1 + \frac{2\nu}{1-\nu}\right)\alpha\Delta T$$

2. Verschiebung $\boldsymbol{u_y}$ berechnen

2.1. Verhältnis Dehnung-Verschiebung aus der Verschiebungsableitung aufstellen

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varepsilon_y \rightarrow u_y = \int \varepsilon_y dy$$

2.2. Allgemeine Lösung

$$u_y = \left[-\frac{P}{abE}\left(1 - \frac{2\nu^2}{1-\nu}\right) + \left(1 + \frac{2\nu}{1-\nu}\right)\alpha\Delta T\right] y + C$$

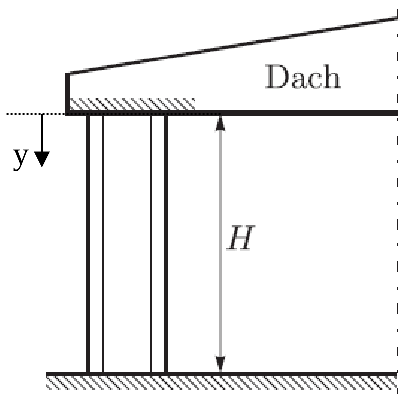
2.3. Spezielle Lösung

Randbedingungen: $u_y(0) = 0$

$$\rightarrow C = 0 \rightarrow \boxed{u_y = \left[-\frac{P}{abE}\left(1 - \frac{2\nu^2}{1-\nu}\right) + \left(1 + \frac{2\nu}{1-\nu}\right)\alpha\Delta T\right] y}$$

Aufgabe H2:

Die Abstützung eines Daches besteht aus einem Stahlträger (E-Modul E_1 und Querschnittsfläche A_1) und einem Betonmantel (E-Modul E_2 und Querschnittsfläche A_2). Das Dach übt auf die Stütze eine Gesamtkraft K aus.



a) Welche Kräfte müssen die Teilquerschnitte A_1 und A_2 übernehmen?

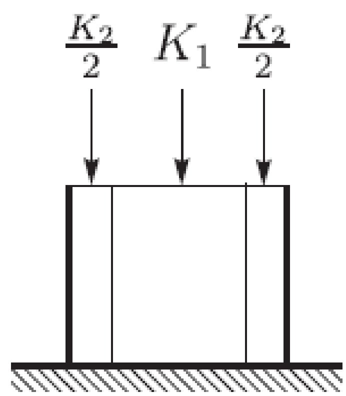
b) Welche Längenänderung erfährt die Abstützung?

c) Berechnen Sie das Verschiebungsfeld für die beiden Materialien entlang der Säulenachse.

Lösung zu Aufgabe H2:

Aufgabenteil a):

1. **Kraftverteilungsanalyse durch den Säulenquerschnitt**
   Von der Kraft K wird ein Teil durch den Stahlträger (K_1) und ein Teil durch den Betonmantel (K_2) aufgenommen. Dabei wird die Kraft auf den Betonmantel wiederum in zwei identische Teile (links und rechts vom Stahlträger) gespaltet.



$$K = K_1 + K_2$$

2. **Durch die Längenänderungsbedingung der Säule den Zusammenhang zwischen K_1 und K_2 finden**
   Da das Dach immer gleichzeitig auf beide Teile der Säule drückt, müssen sich der Betonmantel und der Stahlträger gleichmässig verschieben: $\Delta l_1 = \Delta l_2$. Mit der Formel $\Delta l = \varepsilon l_0 = \frac{\sigma}{E} H = -\frac{F_\perp}{AE} H$ (negativ, da Druck) erhält man den Zusammenhang:

$$K_1 = \frac{E_1 A_1}{E_2 A_2} K_2$$

3. **K_1 und K_2 berechnen**
   Aus den Gleichungen $K_1 + K_2 = K$ und $K_1 = \frac{E_1 A_1}{E_2 A_2} K_2$ findet man

$$\boxed{K_1 = \frac{E_1 A_1}{E_1 A_1 + E_2 A_2} K,} \qquad \boxed{K_2 = \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2} K}$$

Aufgabenteil b):

Man kann eine der berechneten Kräfte K_1 oder K_2 in die Gleichung $\Delta l = -\frac{F_\perp}{AE} H$ einsetzen und bekommt:

$$\boxed{\Delta l = -\frac{KH}{E_1 A_1 + E_2 A_2}}$$

Aufgabenteil c):

1. Dehnung entlang der Säulenachse berechnen

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta l}{l_0} = -\frac{K}{E_1 A_1 + E_2 A_2}$$

2. Verschiebungsfeld in y-Richtung berechnen

2.1. Allgemeine Lösung

$$u_y = \int \varepsilon_y dy = -\frac{K}{E_1 A_1 + E_2 A_2} y + C$$

2.2. Spezielle Lösung berechnen

Randbedingungen: $u_y(H) = 0 \rightarrow C = \frac{KH}{E_1 A_1 + E_2 A_2}$

$$\boxed{u_y = \frac{K}{E_1 A_1 + E_2 A_2}(H - y)}$$

Aufgabe H3:

Im Punkt P eines elastischen Körpers habe der Verzerrungstensor im xyz-Koordinatensystem die folgende Gestalt:

$$\underline{\underline{E}} = \frac{k}{E}\begin{bmatrix} 4 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

wobei E das gegebene Elastizitätsmodul ist.

Berechnen Sie unter Annahme eines linearelastischen Stoffverhaltens mit $\nu = \frac{1}{3}$ die Hauptspannungen.

Lösung zu Aufgabe H3:

1. **$\underline{\underline{E}}$ in den Hauptdehnungszustand bringen**

   1.1. Eigenwerte des Dehnungstensors bestimmen

$$\det\left(\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{I}} \cdot \varepsilon_i\right) = 0 \rightarrow \varepsilon_1 = \frac{5k}{E}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{k}{E}, \qquad \varepsilon_3 = 0$$

   1.2. Der Tensor im Hauptdehnungszustand ist somit

$$\underline{\underline{E}} = \frac{k}{E}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3}$$

2. **Den Dehnungstensor im Hauptdehnungszustand in einen Spannungstensor im Hauptspannungszustand umwandeln und Hauptspannungen finden**

   Schreibt man die Gleichung $\underline{\underline{T}} = \frac{E}{1+\nu}\left[\underline{\underline{E}} + \frac{\nu\varepsilon_I}{1-2\nu} \cdot \underline{\underline{I}}\right]$ aus, erhält man

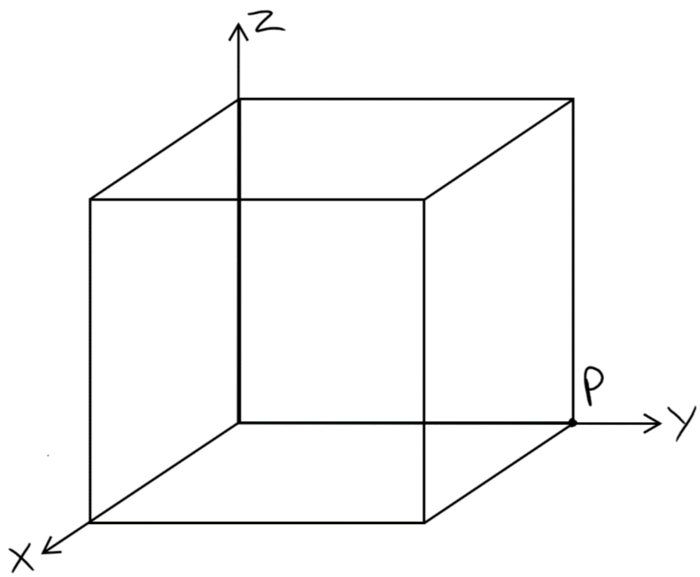
$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \frac{E}{1+\nu}\left[\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} + \frac{\nu(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{1-2\nu} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right] = \frac{3}{4}k\begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

   Demzufolge sind die Hauptspannungen:

$$\boxed{\sigma_1 = \frac{33}{4}k, \qquad \sigma_2 = \frac{21}{4}k, \qquad \sigma_3 = \frac{9}{2}k}$$

Wiederholungsaufgabe:

Für einen Einheitswürfel ist das Verschiebungsfeld $\underline{u}(x,y,z)$ gegeben.



$$\underline{u}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3ay^2 + bx + cz \\ 3ay^2 + bx + cz \\ 3az^2 - c(y+z) \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie für den Punkt $P = (0,1,0)$, $a = 1 \cdot 10^{-3}$, $b = -6 \cdot 10^{-3}$ und $c = 2 \cdot 10^{-3}$

a) Die Hauptdehnungen.

b) Den Betrag des grössten Schubwinkels.

c) Wie gross ist der absolut maximale und absolut minimale Betrag der spezifischen Volumendehnung?

Lösung zur Wiederholungsaufgabe:

Aufgabenteila):

1. Dehnungstensor mit den Verschiebungsableitungen berechnen

1.1. Einzelne Elemente berechnen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = b, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 6ay, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = c, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = b, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 6ay, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = c$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -c, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 6az - c$$

1.2. Tensor aufstellen

Zur Erinnerung:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\rightarrow \underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} b & \frac{1}{2}(6ay + b) & \frac{1}{2}c \\ \frac{1}{2}(6ay + b) & 6ay & 0 \\ \frac{1}{2}c & 0 & 6az - c \end{bmatrix}$$

1.3. P, a, b und c einsetzen

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

2. Hauptdehnungen berechnen

$$\boxed{\varepsilon_1 = 6 \cdot 10^{-3}, \quad \varepsilon_2 = \left(-4 + \sqrt{5}\right) \cdot 10^{-3}, \quad \varepsilon_3 = -\left(4 + \sqrt{5}\right) \cdot 10^{-3}}$$

Aufgabenteil b):

$$\gamma_{max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 = \boxed{\left(10 + \sqrt{5}\right) \cdot 10^{-3}}$$

Aufgabenteil c):

1. **Allgemeine Gleichung für die spezifische Volumendehnung**
   Da im 2D-Fall der Schub per Definition die Fläche einer Figur nicht ändert, gilt dies im 3D-Fall auch, indem sich das Volumen nicht ändert. Deshalb müssen wir nur die Normaldehnungen betrachten, wenn wir die spezifische Volumendehnung berechnen möchten.

   Also ergibt sich für unseren Fall die folgende allgemeine Gleichung:
   $$\varepsilon_V = \varepsilon_I = spur\left(\underline{\underline{E}}\right) = (-6 + 6y + 6z - 2) \cdot 10^{-3}$$

2. **Extremwerte berechnen**
   2.1. Absolut maximal für $y = z = 0$
   $$\rightarrow \boxed{|\varepsilon_V|_{max} = 8 \cdot 10^{-3}}$$

   2.2. Absolut minimal für $6y + 6z = 8$
   $$\rightarrow \boxed{|\varepsilon_V|_{min} = 0}$$

Bemerkung: Die Voraussetzung für keine Volumendehnung ($|\varepsilon_V|_{min} = 0$) ist durch die Ebene $y + z = \frac{4}{3}$ gegeben. Man merkt also, dass es unendlich viele Punkte gibt, bei denen keine Volumendehnung vorkommt.