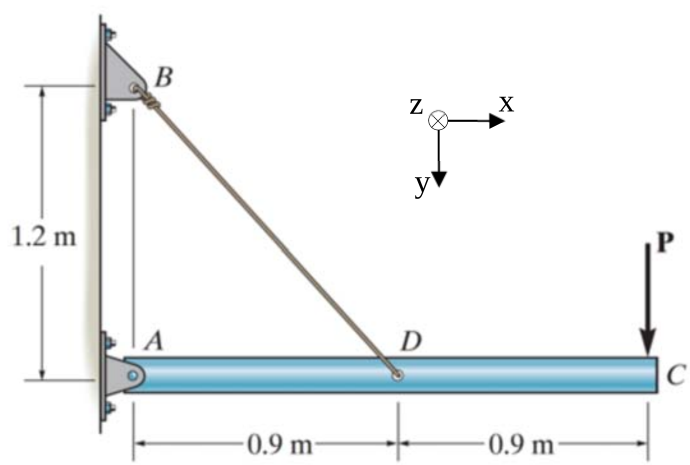
Mechanik II: Deformierbare Körper

für D-BAUG, D-MAVT

Haus- & Schnellübung 6

Aufgabe S1

Gegeben sei ein Stab, der durch einen Stahldraht gehalten wird. Der Stahldraht habe ein Durchmesser von 5mm und ein E-Modul von 200GPa. Eine Kraft P mit einem Betrag von 2.5kN greife am Punkt C in positiver y-Richtung an.



Wie gross ist die Verschiebung des Punktes D?

Es wird angenommen, dass im Stab AC keine Dehnungen stattfinden, dass sich der Punkt D approximiert nur in y-Richtung bewegt und dass $\pi \approx 3$.

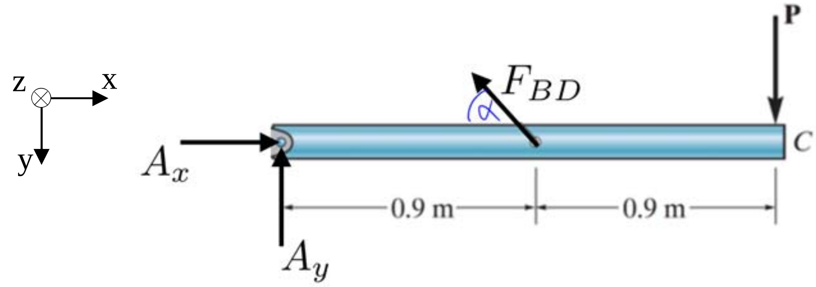
Zugspannungen sind positiv und Druckspannungen sind negativ definiert.

S1. 5 mögliche Antworten	Ⓐ $v = -8.33\overline{3}mm$	Ⓑ $v = -3.33\overline{3}mm$	Ⓒ $v = 3.33\overline{3}mm$	Ⓓ $v = 8.33\overline{3}mm$	Ⓔ $v = 9.99\overline{9}mm$

Lösung zu Aufgabe S1

1. Verlängerung des Drahtes berechnen

1.1. Drahtkraft berechnen



$$\sum M_A = 0 \rightarrow F_{BD} = P \cdot \frac{1.8m}{0.9m} \frac{1}{\underbrace{\sin\alpha}_{\sin\alpha = \frac{\frac{6}{5}m}{\sqrt{\left(\frac{6}{5}m\right)^2 + \left(\frac{9}{10}m\right)^2}} = \frac{4}{5}}} = 6.25kN$$

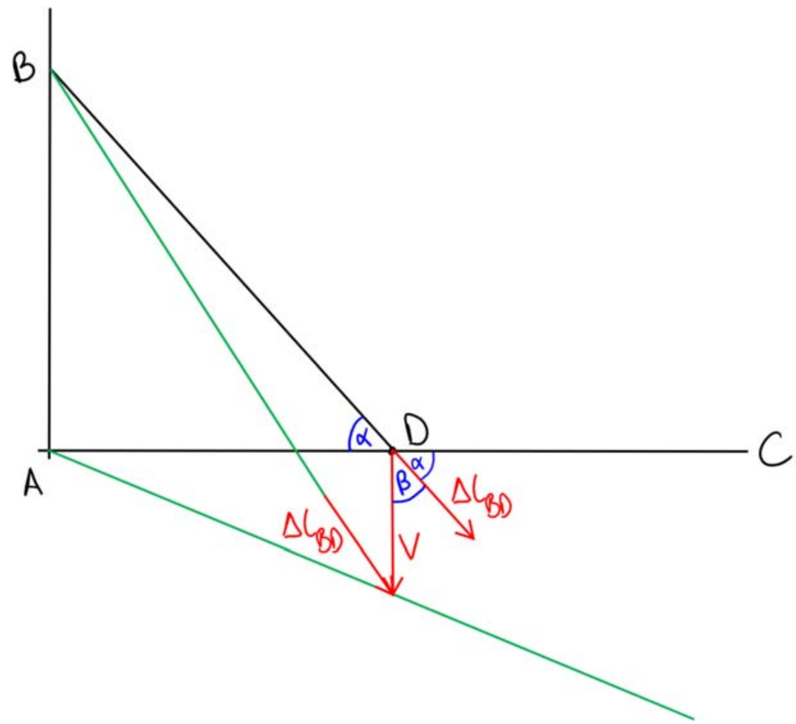
1.2. Verlängerung berechnen

Erinnerung: $\Delta l = \frac{F_\perp l_0}{AE}$

$$\rightarrow \Delta l_{BD} = \frac{F_{BD} l_0}{\frac{\pi}{4} d^2 E} = 2.5mm$$

2. Verschiebung des Punktes D

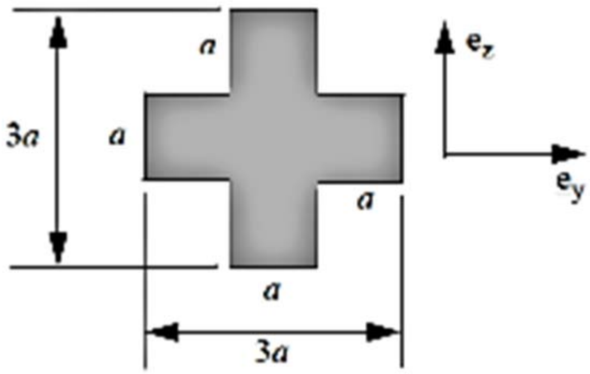
Um diese Aufgabe richtig zu lösen, muss man zuerst realisieren, dass der Draht gedehnt wird, weil der Punkt D sich verschiebt. Die Ursache der Dehnung des Drahtes ist also die Verschiebung des Punktes. Somit ist die Verlängerung des Drahtes eine Abbildung der Verschiebung von D.



$$v = \frac{\Delta l_{BD}}{\cos\beta} \overset{\beta=90°-\alpha}{\triangleq} \frac{\Delta l_{BD}}{\sin\alpha} = \boxed{3.125mm}$$

Aufgabe S2:

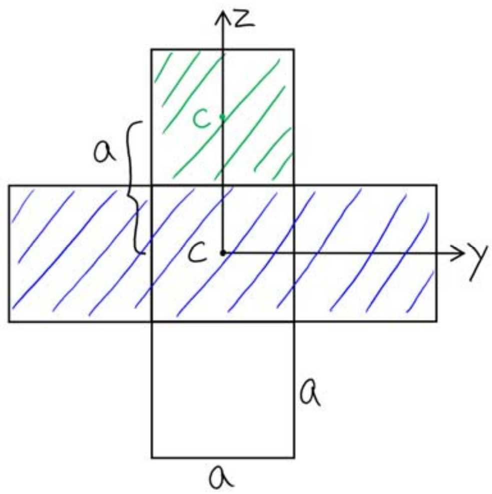
Berechnen Sie die Flächenträgheitsmomente (I_y, I_z) des gezeichneten Querschnittes bezüglich des Flächenmittelpunktes.



Lösung zu Aufgabe S2:

1. **Schwerpunkt der Fläche bestimmen**
   Da die Fläche respektive der z-und y-Achse symmetrisch ist, ist der Schwerpunkt der Flächenmittelpunkt.

2. **Einzelne Flächenträgheitsmomente bestimmen**
   Die gesamte Fläche kann einer blauen und grünen Elementarfläche geteilt werden. Die Flächenträgheitsmomente dieser Elementarflächen, bezüglich des Schwerpunktes der gesamten Fläche, ergeben superponiert das gesamte Flächenträgheitsmoment.



2.1. Flächenträgheitsmoment der blauen Elementarfläche

$$I_{blau} = \frac{3}{12} a^4$$

2.2. Flächenträgheitsmoment der grünen Elementarfläche
Da die Schwerpunkte der gesamten und der grünen Fläche nicht übereinstimmen, müssen wir den Satz von Steiner anwenden:

$$I_{grün} = I'_{grün} + d^2 \cdot A = \frac{13}{12} a^4$$

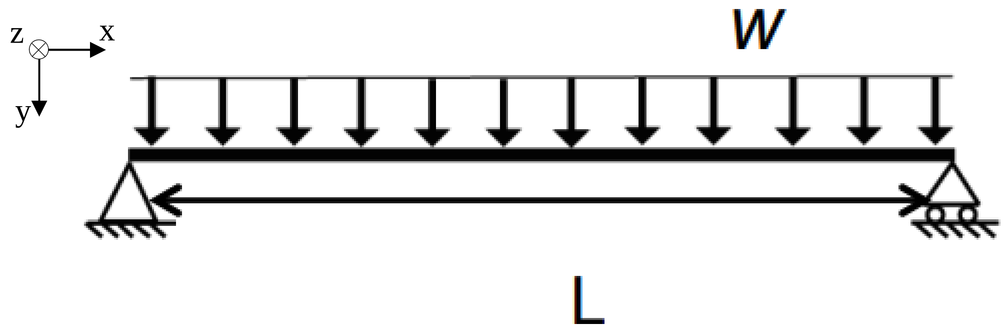
Wobei $I'_{grün} = \frac{1}{12} a^4,\ d = a,\ A = a^2$

3. **Einzelne Flächenträgheitsmomente zum gesamten Flächenträgheitsmoment superponieren**

$$\underbrace{I_y = I_z}_{aus\ Symmetriegründe} = I_{blau} + 2 I_{grün} = \boxed{\frac{29}{12} a^4}$$

Aufgabe S3:

Auf einem Balken greife eine linienverteilte Last w an.



Der Biegemoment $M_b(x)$ sei $M_b(x) = \frac{1}{2} wx(x-L)$. Berechnen Sie die Biegelinie $v(x)$.

Lösung zu Aufgabe S3:

1. Allgemeine Lösung der Biegelinie

$$v(x) = \frac{1}{EI} \iint M_b(x)dx = \frac{1}{EI}\left(\frac{w}{24}x^4 - \frac{wL}{12}x^3 + C_1 x + C_2\right)$$

2. Spezielle Lösung der Biegelinie

Mit den Lagerbedingungen erhält man die Randbedingungen

$$v(0) = v(L) = 0$$

Setzt man die Randbedingungen in die allgemeine Gleichung ergibt sich für die Konstanten

$$C_2 = 0, \qquad C_1 = \frac{wL^3}{24}$$

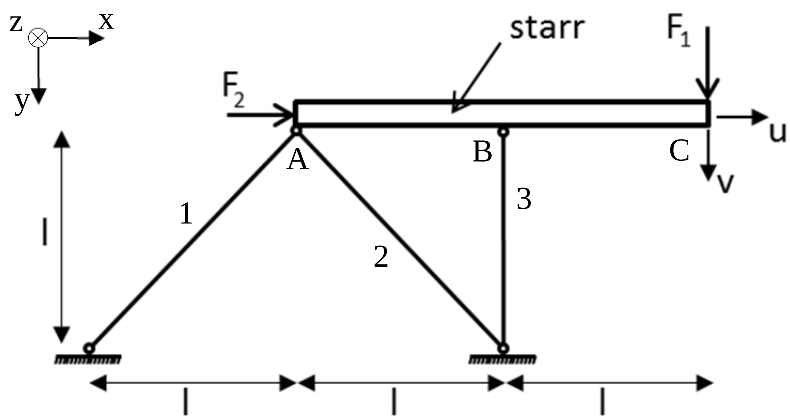
Für die Biegelinie erhält man also:

$$\boxed{v(x) = \frac{w}{12EI}\left(\frac{1}{2}x^4 - Lx^3 + \frac{L^3}{2}x\right)}$$

Aufgabe H1:

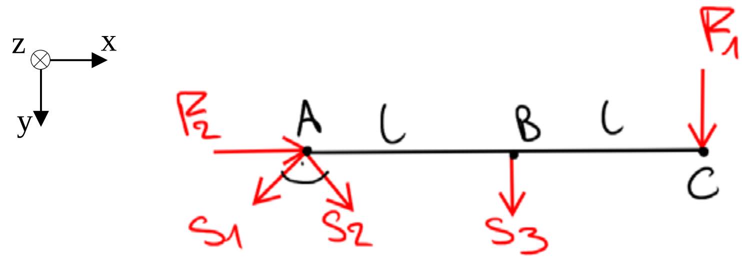
Ein starrer Balken ist auf drei elastischen Pendelstützen gelagert und wird durch die Kräfte F_1 und F_2 belastet. Bestimmen Sie die gekennzeichnete Verschiebungen u und v.

Gegeben: F_1, F_2, l, EA (für alle Stäbe gleich)



Lösung zu Aufgabe H1:

1. Stabkräfte mit dem Dreikräfteschnitt bestimmen



$$\sum M_A = 0 \rightarrow S_3 = -2F_1,$$

$$\sum F_x = 0 \;\&\; \sum F_y = 0 \rightarrow S_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(F_2 + F_1), \qquad S_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(F_1 - F_2)$$

2. Verlängerungen der Stäbe berechnen

Allgemein gilt:

$$\Delta l = \varepsilon l_0 = \frac{\sigma}{E} l_0 = \frac{F_\perp l_0}{EA}$$

$$\rightarrow \Delta l_{1,x} = \Delta l_{1,y} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(F_2 + F_1)l}{EA}, \qquad \Delta l_{2,x} = \Delta l_{2,y} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(F_1 - F_2)l}{EA}, \qquad \Delta l_3 = -\frac{2F_1 l}{EA}$$

3. Verschiebungen $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$ berechnen

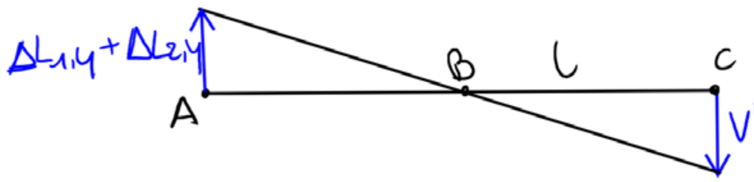
3.1. Verschiebung u

$$u = \Delta l_{1,x} - \Delta l_{2,x} = \boxed{\frac{\sqrt{2}F_2 l}{EA}}$$

3.2. Verschiebung v

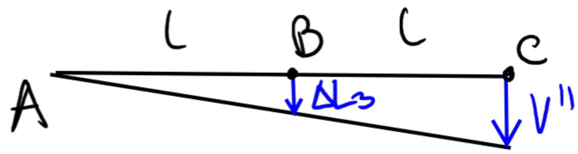
Die Verschiebung in y-Richtung hat zwei Ursachen: die Drehung um den Punkt B und die Stauchung des Stabes Nummer 3.

3.2.1. Verschiebung wegen der Drehung (falls der Stab 3 starr wäre)



$$v' = \Delta l_{1,y} + \Delta l_{2,y} = \frac{\sqrt{2}F_1 l}{EA}$$

3.2.2. Verschiebung wegen der Stauchung (falls die Stäbe 1 und 2 starr sind)



Wegen des Strahlensatzes gilt:

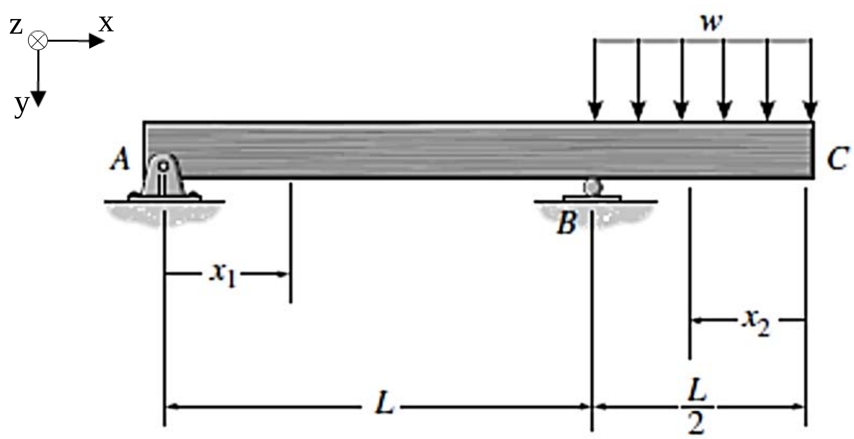
$$v'' = -2\Delta l_3 = \frac{4F_1 l}{EA}$$

Da man die zwei Verschiebungen superponieren kann, erhält man für die totale Verschiebung v:

$$v = v' + v'' = \boxed{\frac{(4+\sqrt{2})F_1 l}{EA}}$$

Aufgabe H2:

Gegeben sei ein Stab der an einem Ende durch eine linienverteilte Last w belastet wird.



a) Finden Sie die Biegelinie im Bereich $0 \leq x_1 \leq L$ in Abhängigkeit von x_1 und im Bereich $0 \leq x_2 \leq \frac{L}{2}$ in Abhängigkeit von x_2.

b) Berechnen Sie die Verschiebung des Punktes C unter der Annahme, dass E und I_z des Balkens gegeben sind und nicht von x abhängen.

Lösung zu Aufgabe H2:

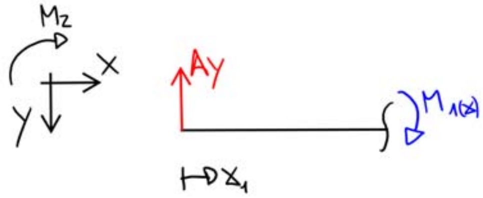
Aufgabenteil a):

1. Biegemoment bestimmen

1.1. Lagerkräfte berechnen

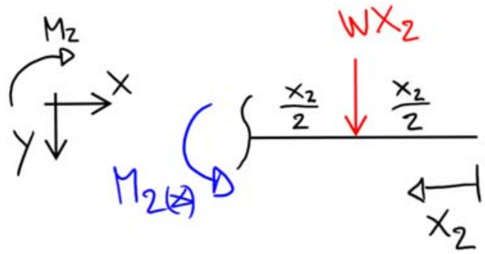
$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0, \qquad \sum M_A = 0 \rightarrow B_y = \frac{5wL}{8}, \qquad \sum F_y = 0 \rightarrow A_y = -\frac{wL}{8}$$

1.2. Beanspruchung im Bereich $0 \leq x_1 \leq L$



$$\sum M = 0 \rightarrow M_1(x) = \frac{wL}{8} x_1$$

1.3. Beanspruchung im Bereich $0 \leq x_2 \leq \frac{L}{2}$



$$\sum M = 0 \rightarrow M_2(x) = \frac{w}{2} x_2^2$$

---

2. Biegelinie berechnen

2.1. Allgemeine Lösung von $v_1(x)$ und $v_2(x)$

$$v_1(x) = \frac{1}{EI}\iint M_1(x)dx = \frac{1}{EI}\left(\frac{wL}{48}x_1^3 + C_1x_1 + C_2\right),$$

$$v_2(x) = \frac{1}{EI}\iint M_2(x)dx = \frac{1}{EI}\left(\frac{w}{24}x_2^4 + C_3x_2 + C_4\right)$$

2.2. Randbedingungen aufstellen

Da wir aus den Integrationen vier unbekannte Konstanten erhalten haben, brauchen wir vier Randbedingungen, um $v_1(x)$ und $v_2(x)$ eindeutig zu bestimmen.

Drei Randbedingungen erhalten wir aus den Lagerbedingungen:

$$v_1(x_1 = 0) = 0, \qquad \underbrace{v_1(x_1 = L) = v_2\left(x_2 = \frac{L}{2}\right)}_{ist\ auch\ eine\ \text{Übergangsbedingung}} = 0$$

Eine Randbedingung erhalten wir aus den Übergangsbedingungen:

$$\left.\frac{dv_1(x_1)}{dx_1}\right|_{x_1=L} = \left.\frac{dv_2(x_2)}{dx_2}\right|_{x_2=\frac{L}{2}}$$

2.3. Spezielle Lösung der Biegungslinien bestimmen

Nachdem man die Randbedingungen eingesetzt hat, erhält man für die Konstanten:

$$C_1 = -\frac{wL^3}{48}, \qquad C_2 = 0, \qquad C_3 = \frac{wL^3}{48}, \qquad C_4 = -\frac{5wL^4}{384}$$

Somit ist die Biegungslinie

$$\boxed{\begin{gathered} v_1(x_1) = \frac{wLx_1}{48EI}(x_1^2 - L^2) \text{ für } 0 \leq x_1 \leq L, \\ v_2(x_2) = \frac{w}{24EI}\left(x_2^4 + \frac{L^3x_2}{2} - \frac{5L^4}{16}\right) \text{ für } 0 \leq x_2 \leq \frac{L}{2} \end{gathered}}$$

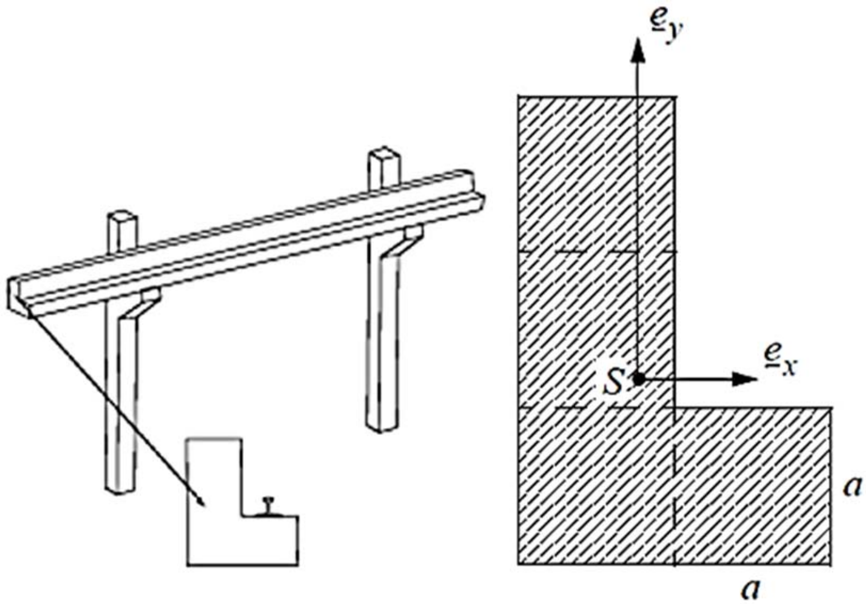
<u>Aufgabenteil b):</u>

Die Verschiebung des Punktes C ist gegeben durch:

$$v_C = v_2(x_2 = 0) = \boxed{\frac{11wL^4}{384EI}}$$

Aufgabe H3:

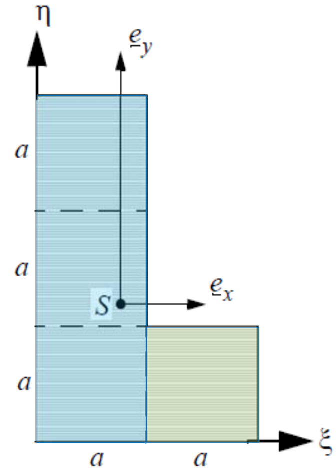
Die L-förmige Querschnittsfläche eines Kranträgers ist gemäss Figur aus vier Quadraten der Seitenlänge a zusammengesetzt. Bestimmen Sie I_x und I_y für den Schwerpunkt S.



Lösung zu Aufgabe H3:

1. Schwerpunkt bestimmen

Um den Schwerpunkt zu bestimmen, wird ein neues Koordinatensystem $\eta\ \xi$ eingeführt.



Allgemein gilt für die Koordinaten des Schwerpunkts:

$$x_i = \frac{\sum_i x_i A_i}{\sum_i A_i}$$

Somit kriegen wir für die ξ −Koordinate:

$$\xi_s = \frac{3a^2 \frac{a}{2} + \frac{3}{2} a a^2}{3a^2 + a^2} = \frac{3}{4} a$$

Und für die η −Koordinate:

$$\eta_s = \frac{\frac{3}{2} a 3a^2 + \frac{a}{2} a^2}{3a^2 + a^2} = \frac{5}{4} a$$

2. Trägheitsmomente

2.1. I_x berechnen

Mit dem Satz von Stokes erhält man folgende Gleichung:

$$I_x = \frac{1}{12} a 27 a^3 + \frac{1}{16} a^2 3a^2 + \frac{1}{12} a^4 + \frac{9}{16} a^4 = \boxed{\frac{37}{12} a^4}$$

2.2. I_y berechnen

Das Gleiche gilt für I_y:

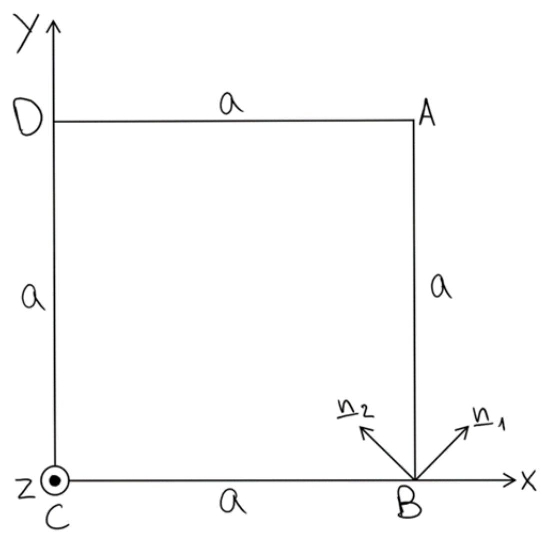
$$I_y = \frac{1}{12} 3a^4 + \frac{1}{16} a^2 3a^2 + \frac{1}{12} a^4 + \frac{9}{16} a^4 = \boxed{\frac{13}{12} a^4}$$

Mechanik II: Deformierbare Körper

für D-BAUG, D-MAVT **Haus- & Schnellübung 6**

Wiederholungsaufgabe:

Gegeben sein eine quadratische Platte mit Seitenlänge a, Elastizitätsmodul E und Querkontraktionszahl $\nu = 0$. Die Platte mit den Wärmeausdehnungskoeffizienten α wird zuerst durch äusseren Kräften gedehnt, die das Verschiebungsfeld $\underline{u}(x, y, z)$ verursachen und anschliessend um ΔT erwärmt.



$$\underline{u}(x, y, z) = \begin{pmatrix} (x+y)^2 \cdot \frac{k}{a} \\ (x-y)^2 \cdot \frac{k}{a} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie nun:

a) Den kompletten Verzerrungstensor $\underline{\underline{E}}_{xyz}$.

b) Die Winkeländerung zwischen den zwei Linienelementen mit den Richtungen

$$\underline{n}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{n}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

im Punkt B analytisch, d.h. nicht mit dem Mohr‘schen Kreis.

c) Den Spannungstensor $\underline{\underline{T}}_A$ im Punkt A für die gegebenen Materialeigenschaften.

d) Das Material der Platte sei spröd und habe die Bruchspannung σ_0. Bei welchem k bricht die Platte im Punkt A? Verwenden Sie in diesem Abschnitt den Mohr'scher Kreis.

Lösung zur Wiederholungsaufgabe:

Aufgabenteil a):

1. **Den durch die äusseren Kräften verursachten Verzerrungstensors berechnen**

Durch die Verschiebungsableitungen erhalten wir

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = 2(x+y)\frac{k}{a}, \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 2(y-x)\frac{k}{a}, \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) = 2x\frac{k}{a}, \qquad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) = 0$$

Und somit:

$$\underline{\underline{E}}_0 = \begin{bmatrix} 2(x+y) & 2x & 0 \\ 2x & 2(y-x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{k}{a}$$

2. **Den durch die thermische Dehnung verursachten Verzerrungstensor finden**

Die thermische Dehnung ist charakterisiert als eine reine Normaldehnung in allen Richtungen. Demzufolge sieht dieser Verzerrungstensor so aus:

$$\underline{\underline{E}}_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \alpha \Delta T$$

3. **Kompletter Verzerrungstensor**

$$\underline{\underline{E}}_{xyz} = \underline{\underline{E}}_0 + \underline{\underline{E}}_T = \boxed{\begin{bmatrix} 2(x+y)\frac{k}{a} + \alpha\Delta T & 2x\frac{k}{a} & 0 \\ 2x\frac{k}{a} & 2(y-x)\frac{k}{a} + \alpha\Delta T & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\Delta T \end{bmatrix}}$$

Aufgabenteil b):

Analog zu den Spannungen erhält man:

$$\varepsilon_{12} = \underline{n}_2^T \cdot \underline{\underline{E}}_{(a,0,0)} \cdot \underline{n}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2k+\alpha\Delta T & 2k & 0 \\ 2k & -2k+\alpha\Delta T & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\Delta T \end{bmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = -2k$$

$$\gamma_{12} = 2 \cdot \varepsilon_{12} = \boxed{-4k}$$

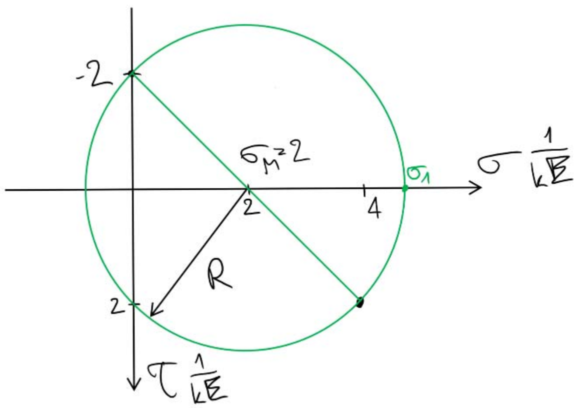
Aufgabenteil c):

Es ist wichtig zu bemerken, dass keine Spannungen durch die thermische Dehnung verursacht werden, da sich die Platte thermisch frei ausdehnen kann. Deshalb wird bei der Transformation des Verzerrungstensors in den Spannungstensor nur den Verzerrungstensor genommen, der durch die äusseren Kräfte hervorgerufen wird.

$$\underline{\underline{T}}_{(a,a,0)} = \frac{E}{1+\nu}\left(\underline{\underline{E}}_{0,(a,a,0)} + \frac{\nu\varepsilon_I}{1-2\nu}\underline{\underline{I}}\right) = \boxed{\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} kE}$$

Aufgabenteil d):

Die Platte bricht, falls $\sigma_{max} = \sigma_0$. Dabei muss man wissen, dass ein sprödes Material bei grossen Normalspannungen bricht. Also gilt für diese Aufgabe: $\sigma_{max} = \sigma_0 = \sigma_1$. Man muss deshalb die grösste Hauptspannung berechnen.



$$\sigma_1 = \sigma_M + R = 2\left(1+\sqrt{2}\right)kE = \sigma_0$$

$$\rightarrow k = \frac{\sigma_0}{2\left(1+\sqrt{2}\right)E}$$