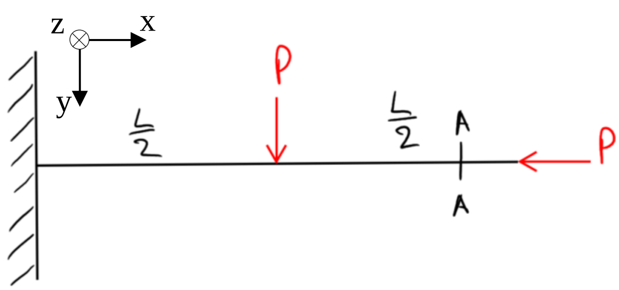
Mechanik II: Deformierbare Körper

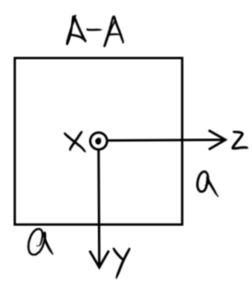
für D-BAUG, D-MAVT

Haus- & Schnellübung 7

Aufgabe S1

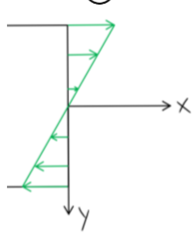
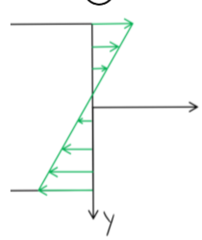
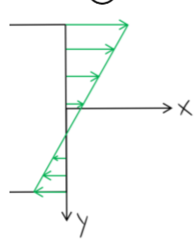
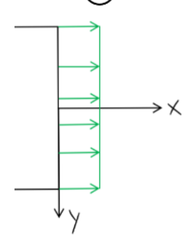
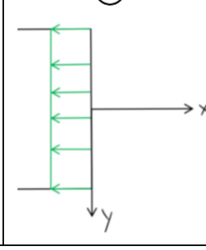
Ein Stab mit Querschnitt A-A wird folgendermasse beansprucht:





Geg: $a = 10cm, P = 10kN, L = 1m$

a) Welches der folgenden Bilder zeigt den korrekten Verlauf der Normalspannung im Querschnitt A-A?

S1. 5 mögliche Antworten	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
					

b) Berechnen Sie die maximale Normalspannung im ganzen Stab.

S1. 5 mögliche Antworten	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ
	$\sigma_{max} = 31MPa$	$\sigma_{max} = -31MPa$	$\sigma_{max} = -61MPa$	$\sigma_{max} = 61MPa$	$\sigma_{max} = -1MPa$

Lösung zu Aufgabe S1:

Aufgabenteil b):

Die richtige Antwort ist aus den folgenden Gründen E:

- Das Biegemoment verläuft vom Lager bis zum Kraftangriffpunkt bei $x = \frac{L}{2}$. Somit existiert beim Querschnitt A-A gar kein Biegemoment, was die Antworten A, B und C ausschliesst.

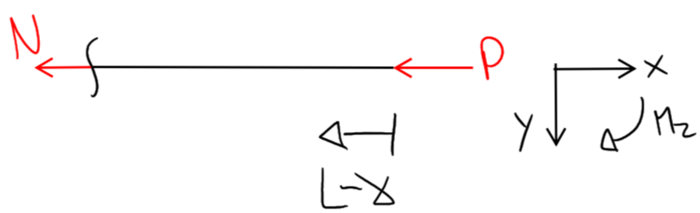
- Da die horizontale Kraft P in negativer x-Richtung zeigt, drückt sie auf der Querschnittsfläche des Balkens.

Aufgabenteil b):

1. Innere Beanspruchung im Stab berechnen

Bemerkung: Es wird in allen Fällen von rechts geschnitten, damit wir nicht zuerst die Lagerreaktionen berechnen müssen.

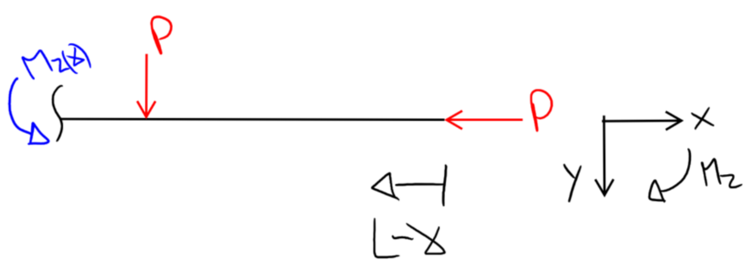
1.1. Normalkraft



$$\sum F_x = 0 \rightarrow N = -P$$

Bemerkung: Da im weiteren Verlauf des Stabes nichts die Normalkraft beeinflusst, ist sie für den ganzen Stab für $0 \leq x \leq L$ gültig

1.2. Biegemoment

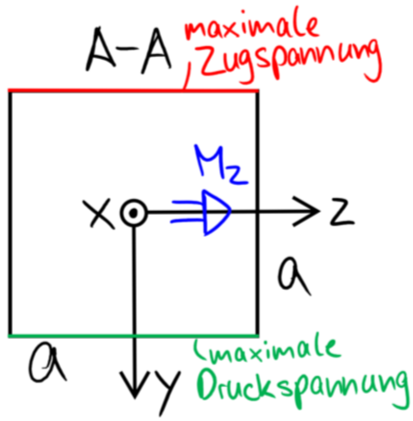


$$\sum M = 0 \rightarrow M_z(x) = -\left((L-x) - \frac{L}{2}\right)P = P\left(x - \frac{L}{2}\right)$$

Bemerkung: Wie schon im Aufgabenteil a) erwähnt, ist das Biegemoment zwischen $\frac{L}{2} \leq x \leq L$ Null.

2. Absolut maximale Normalspannung berechnen

2.1. Maximale Biegespannung im Stabquerschnitt berechnen



Die Biegespannung ist folgendermasse definiert: $\sigma_b(x, y) = -\frac{M_z(x) \cdot y}{I_z}$

Das Trägheitsmoment des quadratischen Querschnittes ist $I_z = \frac{1}{12} a^4$

Da $\sigma_b \propto y$, ist $\sigma_{b,max}$ bei $y = \pm \frac{a}{2}$ zu finden

$M_z(x)$ ist maximal bei $x = 0$

Setzt man alle diese Informationen in die ursprüngliche Gleichung erhält man

$$\sigma_{b,max} = \pm \frac{PL}{2} \frac{a}{2} \frac{12}{a^4} = \pm 3 \frac{PL}{a^3} = \pm 30 MPa$$

2.2. Normalspannung im Stabquerschnitt berechnen

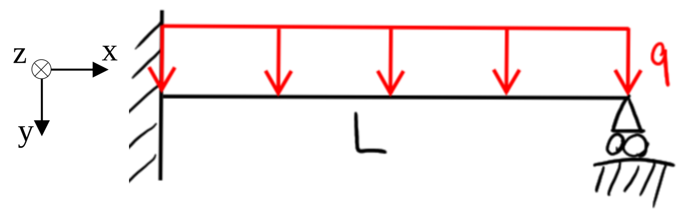
$$\sigma_N = \frac{N}{A} = -\frac{P}{a^2} = -1 MPa$$

2.3. Superpositionsprinzip anwenden

$$|\sigma_{max}| = \left|\sigma_{b,max} + \sigma_N\right|_{max} = 31 MPa \rightarrow \sigma_{max} = \boxed{-31 MPa}$$

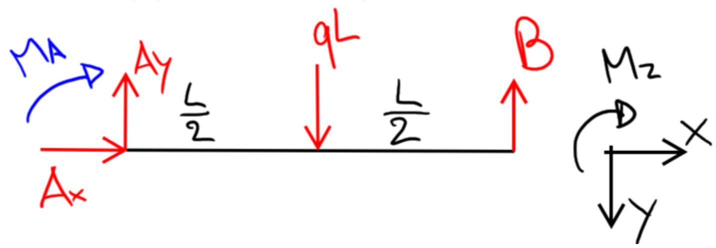
Aufgabe S2:

Berechnen Sie die Lagerreaktionen des gegebenen Systems. Nehmen Sie an, dass das Flächenträgheitsmoment und der E-Modul gegeben sind.



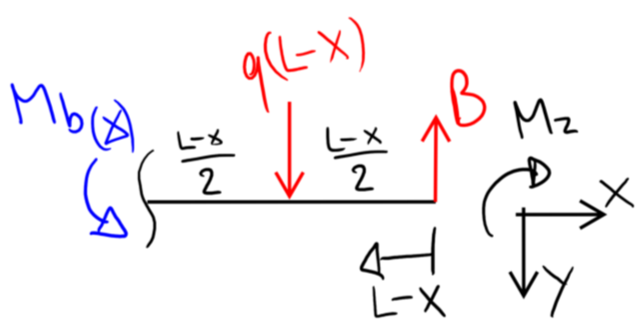
Lösung zu Aufgabe S3:

1. Lagerreaktionen in Abhängigkeit der Auflagerkraft berechnen



$$\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{A_x = 0,} \qquad \sum F_y = 0 \rightarrow A_y + B = qL, \qquad \sum M = 0 \rightarrow M_A = LB - \frac{L^2}{2}q$$

2. Biegemoment berechnen



$$\sum M = 0 \rightarrow M_b(x) = \frac{q}{2}(L-x)^2 - B(L-x) = \frac{q}{2}x^2 + (B - qL)x - BL + \frac{L^2 q}{2}$$

3. Allgemeine Biegelinie berechnen

$$v(x) = \frac{1}{EI_z}\iint M_b(x)dx = \frac{1}{EI_z}\left[\frac{q}{24}x^4 + \frac{(B-qL)}{6}x^3 + \frac{\left(-BL + \frac{L^2 q}{2}\right)}{2}x^2 + C_1 x + C_2\right]$$

4. Randbedingungen aufstellen und die Unbekannten berechnen

4.1. Randbedingungen

$$v(0) = v(L) = 0, \qquad \left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=0} = 0$$

4.2. Unbekannten berechnen

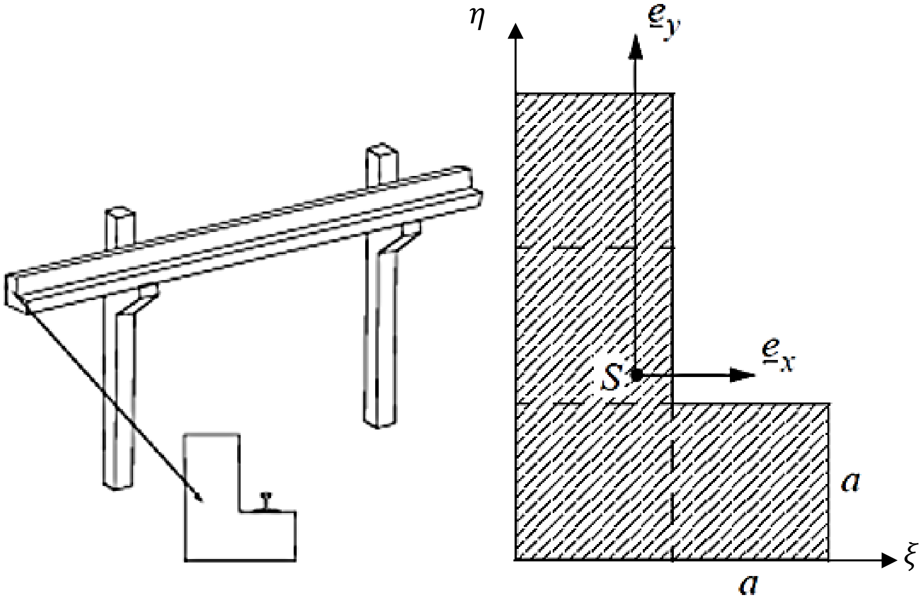
$$C_2 = 0, \qquad C_1 = 0, \qquad B = \boxed{\frac{3}{8}qL}$$

5. Restliche Lgerreaktionen berechnen

$$A_y = \boxed{\frac{5}{8}qL,} \qquad M_A = LB - \frac{L^2}{2}q = \boxed{-\frac{1}{8}qL^2}$$

Aufgabe S3:

Gegeben sei den identischen Querschnitt, in der Aufgabe H3 der Haus- & Schnellübung 6.



Aus der letzten Serie wissen wir, dass $I_x = \frac{37}{12}a^4, I_y = \frac{13}{12}a^4$ und $S(\xi,\eta) = \left(\frac{3}{4}a, \frac{5}{4}a\right)$

a) Finden Sie das gemischte Trägheitsmoment C_{xy}.

b) Bestimmen Sie die Hauptachsen (Drehwinkel) und die dazugehörigen Trägheitsmomente mittels Mohrschem Kreis.

Lösung zu Aufgabe S2:

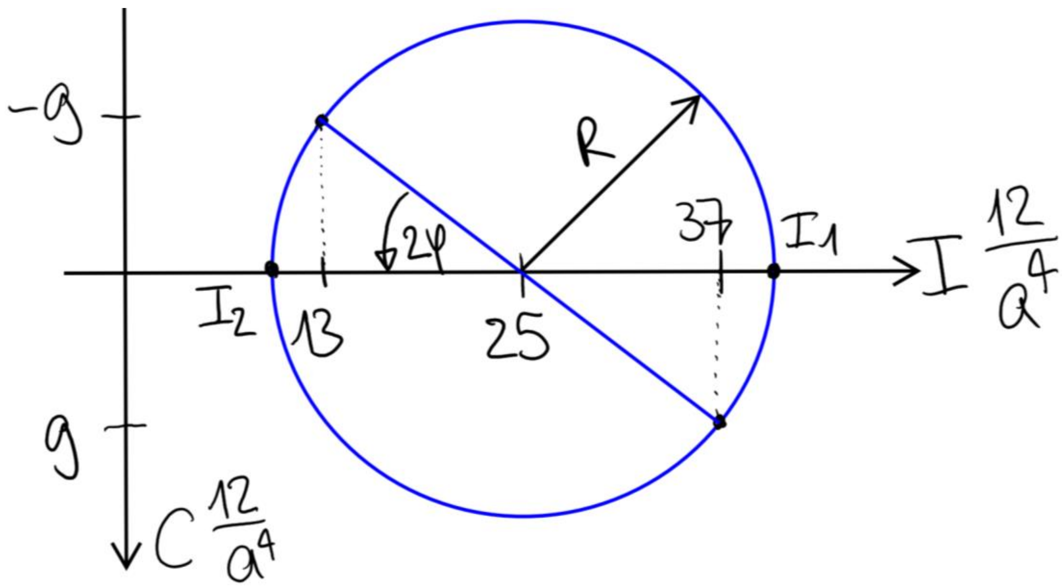
Aufgabenteil a):

Das gemischte Flächenträgheitsmoment ist für die jeweiligen Teilflächen (siehe die Lösung der letzten Serie) 0, da die Schwerpunkte der Teilflächen in deren Mitte liegen. Somit muss man hier nur den Satz von Steiner anwenden und kriegt

$$C_{xy} = \frac{a}{4}\frac{a}{4}3a^2 + \frac{3}{4}\frac{3}{4}a^4 = \frac{9}{12}a^4 = \boxed{\frac{3}{4}a^4}$$

Aufgabenteil b):

1. Mohrscher Kreis zeichnen



2. Hauptträgheitsmomente berechnen

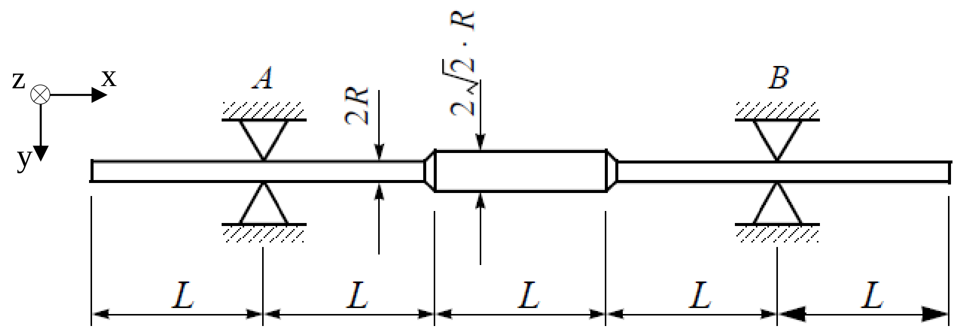
$$I_{1,2} = (25 \pm R)\frac{a^4}{12} \rightarrow \boxed{I_1 = \frac{10}{3}a^4, \qquad I_2 = \frac{5}{6}a^4}$$

3. Hauptachsenrichtung berechnen

$$\tan 2\varphi = \frac{3}{4} \rightarrow \varphi = \boxed{18.4°}$$

Aufgabe H1:

Die abgebildete kreiszylindrische Welle ($R \ll L$) ist in A und B kurz gelagert und nur durch das Eigengewicht belastet. Bestimmen Sie den kleinstmöglichen zulässigen Radius R, wenn die Länge L, das konstante spezifische Gewicht f_G und die zulässige Spannung σ_{zul} gegeben sind.



Geg: $L = 1m,\ \sigma_{zul} = 20\,\frac{kN}{cm^2}, f_G = 80\,\frac{N}{dm^3}$

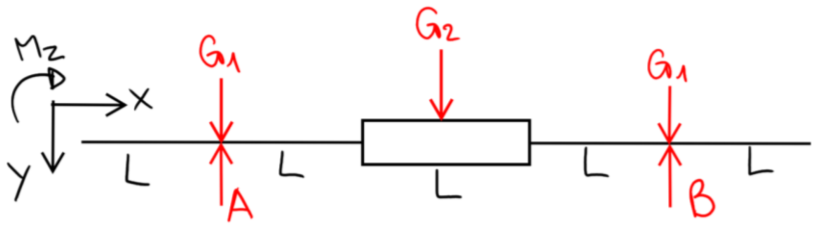
Lösung zu Aufgabe 1:

Bevor man bei dieser Aufgabe losrechnet, sollte man sich Folgendes überlegen:

- Die Geometrie und die Belastung des Systems sind symmetrisch. D.h. alles was auf der einen Hälfte passiert, passiert symmetrisch auch auf der anderen.
- Die Gewichtskraft des Stabes kann als eine linienverteilte Kraft gesehen werden, die aber volumenabhängig ist. Sie wird also im dünneren Bereich anders sein als in der dickeren Mitte.

1. Lagerkräfte berechnen

1.1. Freischnitt



1.2. G_1 und G_2 berechnen

$$G_1 = q_1 2L = 2qL, \qquad G_2 = q_2 L = 2qL$$

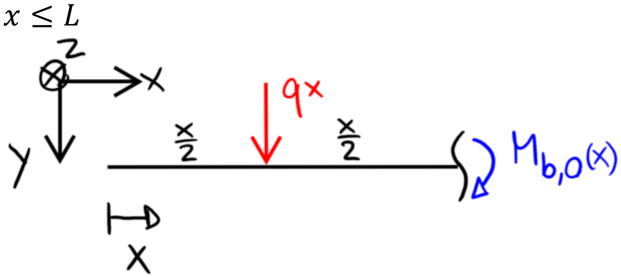
$$q_1 = f_G \cdot S_1 = \underbrace{f_G \cdot \pi R^2}_{q} = q, \qquad q_2 = f_G \cdot S_2 = f_G \cdot 2\pi R^2 = 2q$$

1.3. GGB lösen

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A + B = 6qL, \qquad \underbrace{A = B}_{symm.} = 3qL$$

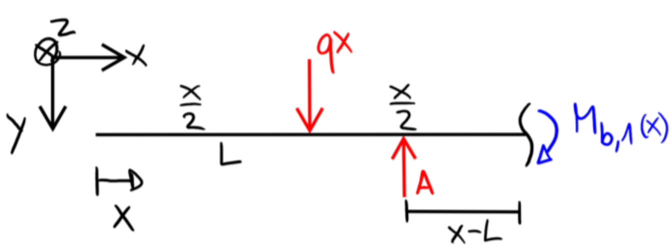
2. Biegemoment berechnen

2.1. Abschnitt 0 für $0 \leq x \leq L$



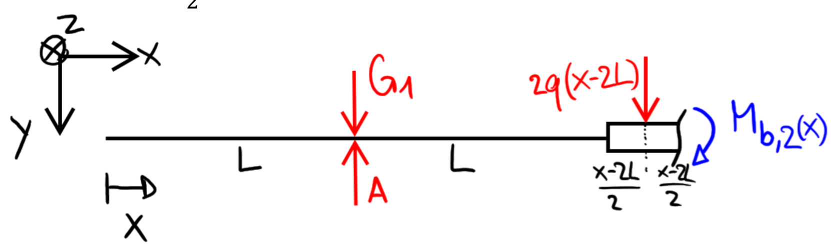
$$\sum M = 0 \rightarrow M_{b,0} = \frac{q}{2}x^2$$

2.2. Abschnitt 1 für $L \leq x \leq 2L$



$$\sum M = 0 \rightarrow M_{b,1} = \frac{q}{2}x^2 - 3qL(x - L)$$

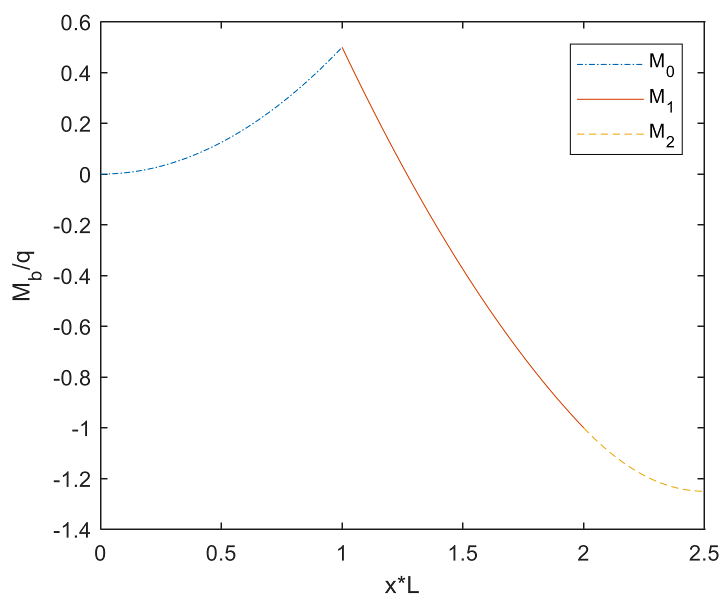
2.3. Abschnitt 2 für $2L \leq x \leq \frac{5}{2}L$



$$\sum M = 0 \to M_{b,2} = q(x-2L)^2 - qL(x-L)$$

3. Kritische Stellen finden

Wenn man den Verlauf des Biegemomentes zeichnet, sieht man, dass das Biegemoment bei $x = \frac{5}{2}L$ am grössten ist.



Da die Biegespannung $\sigma_b(x,y) = -\frac{M_b(x)\cdot y}{I_z}$ nicht nur vom Biegemoment abhängt, sondern auch vom Flächenträgheitsmoment I_z, muss man zwei Punkte in Betracht ziehen:

- Dort wo das Biegemoment beim kleinerem Flächenträgheitsmoment maximal ist. ($x = 2L$)
- Dort wo zwar das Biegemoment am grössten ist, das Flächenträgheitsmoment aber auch. ($x = \frac{5}{2}L$)

4. Maximale Biegespannung für die kritischen Stellen berechnen

4.1. Kritische Stelle bei $x = 2L$

$$\sigma_{max}(2L, R) = -\frac{M_b(2L) \cdot R}{\underbrace{I_z(2L)}_{\frac{1}{4}\pi R^4}} = \frac{4qL^2}{\pi R^3}$$

4.2. Kritische Stelle bei $x = \frac{5}{2}L$

$$\sigma_{max}\left(\frac{5}{2}L, \sqrt{2}R\right) = -\frac{M_b\left(\frac{5}{2}L\right) \cdot \sqrt{2}R}{\underbrace{I_z\left(\frac{5}{2}L\right)}_{\pi R^4}} = \frac{\sqrt{2}\,5qL^2}{4\pi R^3}$$

5. Zulässigen Radius der kritischen Stelle berechnen

5.1. Kritische Stelle finden

Vergleicht man die maximale Biegespannung für die kritischen Stellen merkt man, dass $|\sigma_{max}(2L, R)| > \left|\sigma_{max}\left(\frac{5}{2}L, \sqrt{2}R\right)\right|$. Somit ist die kritischste Stelle bei $x = 2L$.

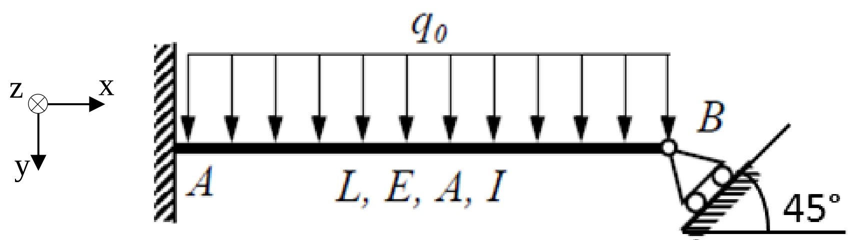
5.2. Zulässigen Radius berechnen

Damit unsere Welle wegen ihres Eigengewichts nicht versagt, muss die maximal vorhandene Biegespannung maximal so gross sein, wie die zulässige Spannung.

$$|\sigma_{max}(2L, R)| = \frac{4qL^2}{\pi R^3} \leq \sigma_{zul} \underbrace{\rightarrow}_{q = f_G \cdot \pi R^2} R \geq \frac{4 f_G L^2}{\sigma_{zul}} = \boxed{1.6mm}$$

Aufgabe H2:

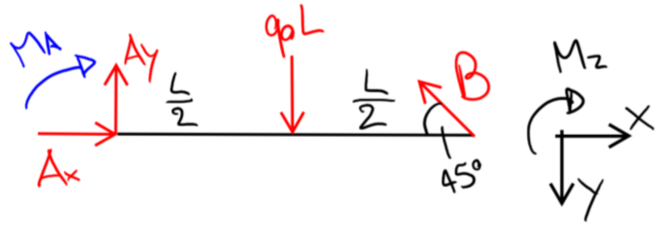
Ein Biegebalken (Länge L, E-Modul E, Querschnittsfläche A, Flächenträgheitsmoment I_z) ist im Punkt A eingespannt und in B gemäss der Zeichnung schräg gelagert. Auf den Balken wirkt sein Eigengewicht als verteilte Last q_0.



Berechnen Sie die Verschiebungen in *B*.

Lösung zu Aufgabe 3:

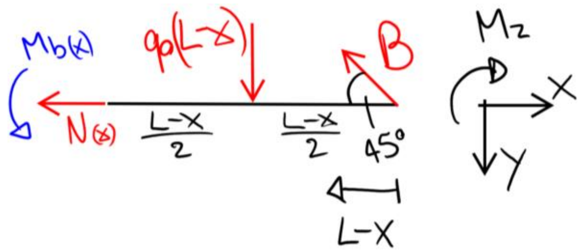
1. Lagerreaktionen in Abhängigkeit von B berechnen



$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x = \frac{\sqrt{2}}{2}B, \qquad \sum F_y = 0 \rightarrow A_y = q_0 L - \frac{\sqrt{2}}{2}B,$$

$$\sum M = 0 \rightarrow M_A = \frac{\sqrt{2}}{2}BL - \frac{L^2}{2}q_0$$

2. Beanspruchung im Balken berechnen



$$\sum F_x = 0 \rightarrow N(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}B, \qquad \sum M = 0 \rightarrow M_b(x) = \frac{q_0}{2}(L-x)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}B(L-x)$$

3. Kraft B mittels Biegelinie berechnen

3.1. Allgemeine Biegelinie berechnen

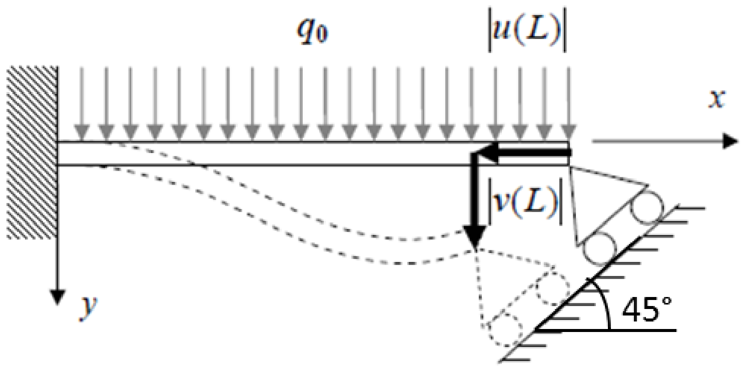
$$v(x) = \frac{1}{I_z E}\iint M_b dx = \frac{1}{I_z E}\left[\frac{q_0}{24}x^4 + \frac{\sqrt{2}B - 2Lq_0}{12}x^3 - \frac{\sqrt{2}B - Lq_0}{4}Lx^2 + C_1 x + C_2\right]$$

3.2. Randbedingungen aufstellen und Konstanten berechnen

$$v(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0, \qquad \left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=0} = 0 \rightarrow C_1 = 0, \qquad v(L) = v_B$$

3.3. v_B berechnen

Da sich das Auflager nur in 45° geneigter Richtung bewegen kann, sind die Verschiebungen in x- und y-Richtung identisch.



$$|v(L)| = |u(L)|$$

Deshalb gilt

$$v_B = -u_B = \frac{NL}{EA} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}BL}{EA}$$

3.4. Lagerkraft B berechnen

Setzt man v_B in die Randbedingung $v(L) = v_B$ ein, kriegt man für B

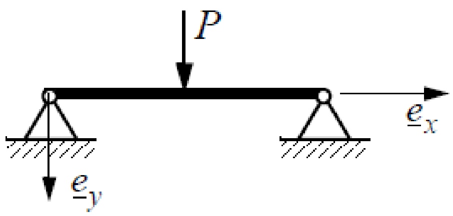
$$B = \frac{\sqrt{2}3AL^3 q_0}{8(AL^2 + 3I_z)}$$

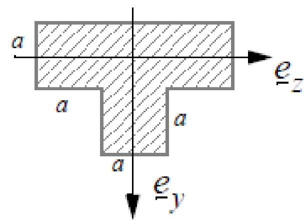
4. Verschiebungen v_B und u_B berechnen

$$v_B = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}BL}{EA} = \boxed{\frac{3L^4 q_0}{8E(AL^2 + 3I_z)}}, \qquad u_B = -v_B = \boxed{-\frac{3L^4 q_0}{8E(AL^2 + 3I_z)}}$$

Aufgabe H3:

Ein gewichtsloser Biegebalken (Länge L, E-Modul E) mit dem gezeichneten Querschnitt ist im Punkt A und B jeweils gelenkig gelagert. Der Balken wird in der Mitte durch eine Einzelkraft vom Betrag P belastet.





Die Lagerkräfte in x-Richtung sind vernachlässigbar, da keine äusseren Kräfte in x-Richtung wirken.

a) Berechnen Sie die Biegelinie als Funktion von x.

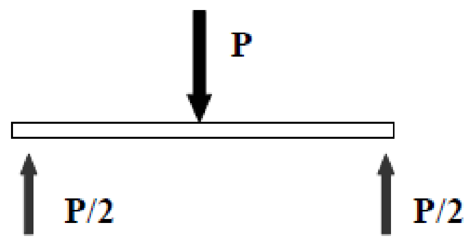
b) Bestimmen Sie Ort und Betrag der maximalen Zugspannung und der maximalen Druckspannung.

c) Betrachten Sie nun den beidseitig gelenkig gelagerten Balken unter Einzellast mit einem Rechteckquerschnitt der Höhe $h(x)$ und der Breite b. Wie muss der Verlauf der Querschnittshöhe $h(x)$ sein, damit die Normalspannung am Rande überall den Wert σ_0 hat?

Lösung zu Aufgabe H3:

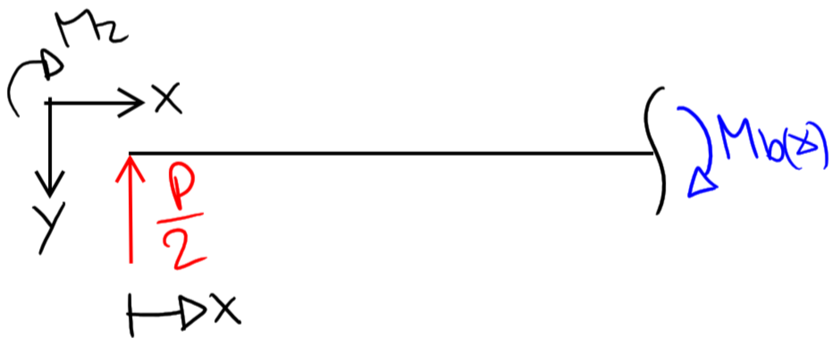
Aufgabenteil a):

1. **Lagerkräfte berechnen**
   Aus Symmetriegründe sind die Lagerkräfte ersichtlich:



$$A = B = \frac{P}{2}$$

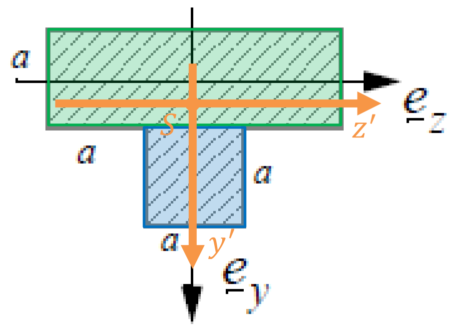
2. **Biegemoment berechnen**
   Da unser Problem symmetrisch ist, reicht es, wenn wir nur den Abschnitt von $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$ betrachten.



$$\sum M = 0 \rightarrow M_b(x) = -\frac{P}{2}x$$

3. **Flächenträgheitsmoment in z'-Richtung berechnen**
   In der gegebenen Skizze verläuft die z-Achse in der Mitte des oberen Rechtecks. D.h. sie geht nicht durch den Schwerpunkt der Querschnittsfläche. Korrekt wäre aber die Berechnungen mit den Koordinaten zu machen, die durch den Schwerpunkt der Fläche gehen.

3.1. Schwerpunkt der Querschnittsfläche berechnen



Aus Symmetriegründen muss man hier nur die y-Koordinate des Schwerpunktes berechnen, da der Schwerpunkt auf der y-Achse liegen muss.

$$y_S = \frac{a^2 \cdot a}{3a^2 + a^2} = \frac{1}{4}a$$

3.2. Flächenträgheitsmoment $I_{z'}$ berechnen

Mit dem Satz von Steiner erhalten wir

$$I_{z'} = 3\left(\frac{a^4}{12} + \frac{1}{16}a^2 \cdot a^2\right) + \frac{a^4}{12} + \frac{9}{16}a^2 \cdot a^2 = \frac{13}{12}a^4$$

4. Biegelinie berechnen

$$v(x) = \frac{1}{EI_{z'}} \iint M_b(x)dx = \frac{12}{13Ea^4}\left(-\frac{P}{12}x^3 + C_1 x + C_2\right)$$

Mit den Randbedingungen

$$v(0) = 0, \qquad \left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=\frac{L}{2}} = 0$$

erhält man die Konstanten

$$C_2 = 0, \qquad C_1 = \frac{L^2 P}{16}$$

Die Biegelinie ist somit

$$\boxed{v(x) = \frac{3Px}{13Ea^4}\left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{L^2}{4}\right), \qquad 0 \le x \le \frac{L}{2}}$$

Aufgabenteil b):

1. **$\boldsymbol{\sigma_{x,max}(y')}$ bestimmen**

   Das Biegemoment ist maximal bei $x = \frac{L}{2}$.

   Also kriegen wir

$$\sigma_{x,max}(y') = -\frac{M\left(\frac{L}{2}\right) \cdot y'}{I_{z'}} = \frac{3 \cdot PL}{13a^4} \cdot y'$$

2. **Maximale Zugspannung bestimmen**

   Je positiver y' ist, desto grösser ist die Zugspannung. Aus dieser Bemerkung ist unsere Zugspannung bei $y' = \frac{5}{4}a$ maximal.

$$\boxed{\sigma_{zug,max}\left(\frac{5}{4}a\right) = \frac{15 \cdot PL}{52a^3}}$$

3. **Maximale Zugspannung bestimmen**

   Je negativer y' ist, desto grösser ist die Druckspannung. Aus dieser Bemerkung ist unsere Druckspannung bei $y' = -\frac{3}{4}a$ maximal.

$$\boxed{\sigma_{druck,max}\left(-\frac{3}{4}a\right) = -\frac{9 \cdot PL}{52a^3}}$$

Aufgabenteil c):

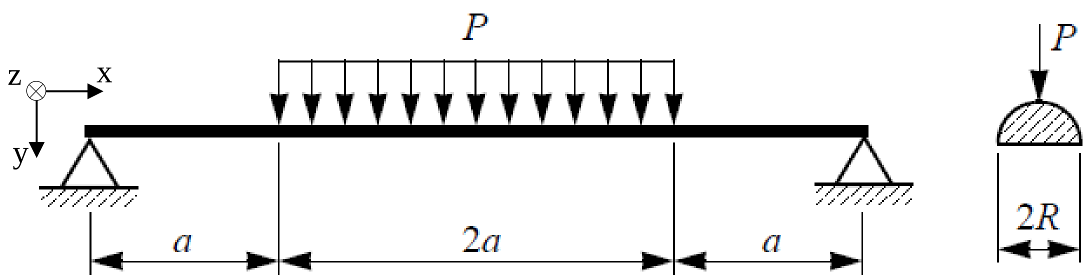
$$\sigma_x = -\frac{M_b(x) \cdot y_{Rand}}{I_z} = \underbrace{\frac{P}{2}x}_{-M_b(x)} \cdot \underbrace{\frac{h(x)}{2}}_{y_{Rand}} \cdot \underbrace{\frac{12}{b \cdot h^3(x)}}_{\frac{1}{I_z}} = \frac{3Px}{b \cdot h^2(x)} = \sigma_0 \rightarrow \boxed{h(x) = \sqrt{\frac{3Px}{b \cdot \sigma_0}}}$$

Mechanik II: Deformierbare Körper

für D-BAUG, D-MAVT **Haus- & Schnellübung 7**

Wiederholungsaufgabe:

Gegeben sei ein kurzgelagerter Balken mit halbkreisförmigen Querschnitt. Neben dem Eigengewicht wirkt als Belastung eine verteilte Last des Gesamtbetrags P gemäss Skizze. Wie gross muss R mindestens sein, damit die grösste Durchbiegung höchstens $\frac{R}{10}$ beträgt?



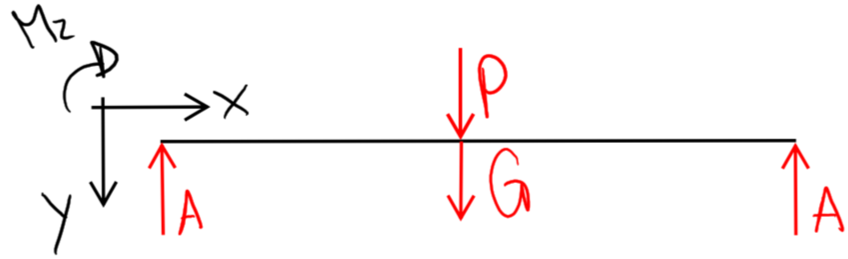
Geg: $P = 5kN, E = 210GPa, a = 50cm, \rho = 7{,}85\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}, g = 9.81\,\frac{m}{s^2}$

Tipp: Lösen Sie die Aufgabe mit dem Taschenrechner.

Lösung zur Wiederholungsaufgabe:

Da das System in dieser Aufgabe symmetrisch wir nur die linke Hälfte betrachtet.

1. Lagerkräfte berechnen

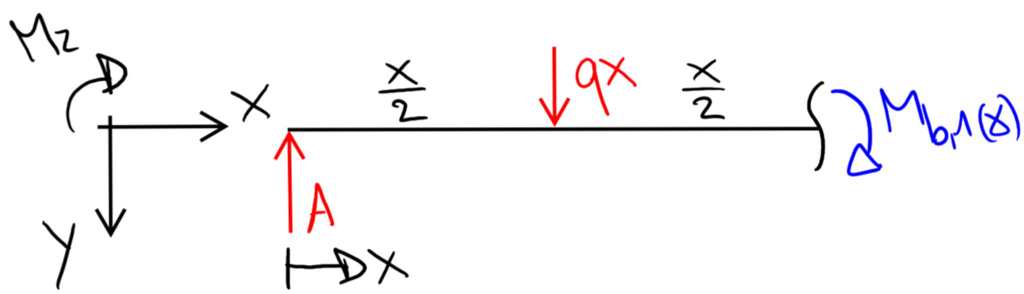


$$G = g\rho S \cdot 4a = \underbrace{g\rho \cdot \frac{1}{2}\pi R^2}_{q} \cdot 4a = q \cdot 4a$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A = \frac{P + q \cdot 4a}{2}$$

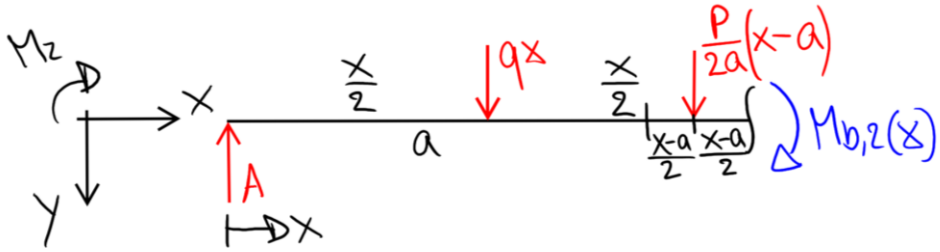
2. Biegemoment berechnen

2.1. Für $0 \leq x \leq a$



$$\sum M = 0 \rightarrow M_{b,1}(x) = \frac{1}{2} q x^2 - Ax$$

2.2. Für $a \leq x \leq 2a$

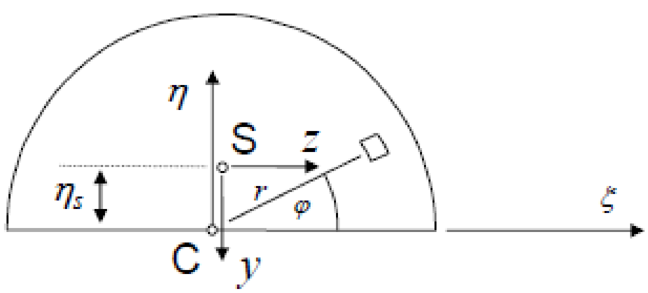


$$\sum M = 0 \rightarrow M_{b,2} = \frac{1}{2}qx^2 + \frac{P}{4a}(x-a)^2 - Ax$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{P}{2a} + q\right)x^2 - \left(A + \frac{P}{2}\right)x + \frac{aP}{4}$$

3. Trägheitsmoment I_z bestimmen

3.1. Schwerpunkt finden



$$\eta_S = \frac{\iint \eta \, dA}{A} = \frac{\int_0^R \int_0^\pi r^2 \sin\varphi \, d\varphi dr}{\frac{1}{2}\pi R^2} = \frac{4R}{3\pi}, \qquad \zeta_S = 0$$

3.2. I_z berechnen

$$I_z = I_\zeta - \eta_S^2 A = R^4\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)$$

4. Biegelinie berechnen

4.1. Allgemein für $0 \leq x \leq a$

$$v_1(x) = \frac{1}{EI_z}\iint M_{b,1}(x)dx = \frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{24}qx^4 - \frac{A}{6}x^3 + C_1x + C_2\right]$$

4.2. Allgemein für $a \leq x \leq 2a$

$$v_2(x) = \frac{1}{EI_z}\iint M_{b,2}(x)dx$$

$$= \frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{24}\left(\frac{P}{2a} + q\right)x^4 - \frac{A + \frac{P}{2}}{6}x^3 + \frac{aP}{8}x^2 + C_3x + C_4\right]$$

4.3. Randbedingungen aufstellen

$$v_1(0) = 0, \qquad v_1'(a) = v_2'(a), \qquad v_1(a) = v_2(a), \qquad v_2'(2a) = 0$$

4.4. Integrationskonstanten berechnen

$$C_2 = 0, \qquad C_3 = \frac{a^2}{6}(12A - P - 8aq), \qquad C_1 = \frac{a^2}{12}(24A - 16aq - P),$$

$$C_4 = \frac{a^3P}{48}$$

$$\rightarrow v_1(x) = \frac{q}{24}x^4 - \frac{A}{6}x^3 + \frac{a^2}{12}(24A - 16aq - P)x$$

$$\rightarrow v_2(x) =$$

$$\frac{1}{EI_z}\left[\frac{1}{24}\left(\frac{P}{2a} + q\right)x^4 - \frac{A + \frac{P}{2}}{6}x^3 + \frac{aP}{8}x^2 + \frac{a^2}{6}(12A - P - 8aq)x + \frac{a^3P}{48}\right]$$

5. Radius R so wählen, dass Durchbiegung maximal $\frac{R}{10}$ wird

Die maximale Durchbiegung im Stab ist bei $x = 2a$.

Also gilt

$$v_2(2a) \leq \frac{R}{10}$$

Setzt man $A = \frac{P+q\cdot 4a}{2}, I_z = R^4\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)$ und $q = g\rho\cdot\frac{1}{2}\pi R^2$ in $v_2(2a)$ ein kriegt man

$$v_2(2a) = \frac{3a^3\pi(80a\rho g\pi R^2 + 57P)}{2E(9\pi^2 - 64)R^4} \leq \frac{R}{10}$$

Löst man die Ungleichung nach R auf und setzt die Zahlenwerte ein, erhält man

$$\boxed{R \geq 51.165mm}$$