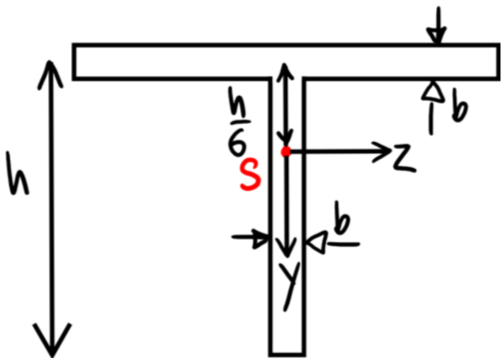
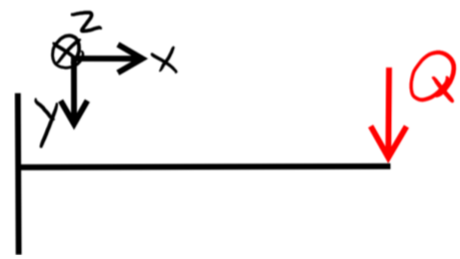
Mechanik II: Deformierbare Körper

für D-BAUG, D-MAVT **Haus- & Schnellübung 8**

Aufgabe S1:

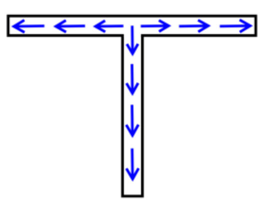
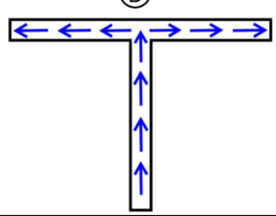
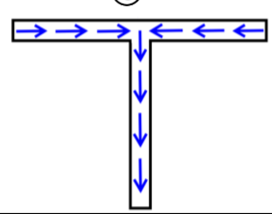
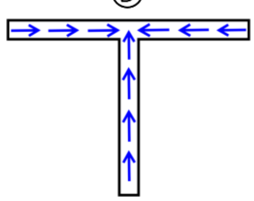
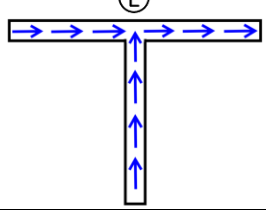
Gegeben sei ein dünnwandiger Balken ($b \ll h$) mit einem T-förmigen Querschnitt. Eine Punktlast mit Betrag Q wirkt entlang der Symmetrielinie in positiver y-Richtung.





Geg.: Q, h, b, I_z

a) Welche der folgenden Skizzen entspricht dem Schubfluss im Querschnitt, wenn man den Balken von rechts schneidet?

S1a). 5 mögliche Antworten	Ⓐ 	Ⓑ 	Ⓒ 
	Ⓓ 	Ⓔ 	

b) Berechnen Sie das statische Moment $H_z(y)$ im unteren Abschnitt des Querschnitts.

S1b). 5 mögliche Antworten	Ⓐ $H_z(y) = 0$	Ⓑ $H_z(y) = b\left(\frac{25}{36}h^2 - y^2\right)$	Ⓒ $H_z(y) = b\left(\frac{25}{36}h^2 + y^2\right)$
		Ⓓ $H_z(y) = \frac{b}{2}\left(\frac{25}{36}h^2 + y^2\right)$	Ⓔ $H_z(y) = \frac{b}{2}(\frac{25}{36}h^2 - y^2)$

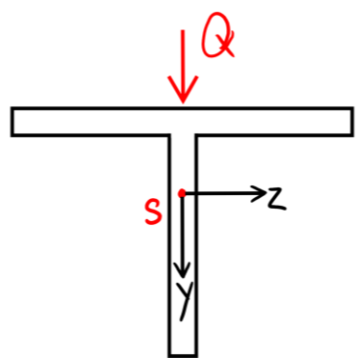
c) Bestimmen Sie die Schubspannungsverteilung von τ_{xy} im Querschnitt.

S1c). 5 mögliche Antworten	A $\tau_{xy} = 0$	B $\tau_{xy} = \frac{Q\left(\frac{25}{36}h^2 + y^2\right)}{2I_z}$	C $\tau_{xy} = \frac{Q\left(\frac{25}{36}h^2 - y^2\right)}{I_z}$
		D $\tau_{xy} = \frac{Q\left(\frac{25}{36}h^2 + y^2\right)}{I_z}$	E $\tau_{xy} = \frac{Q\left(\frac{25}{36}h^2 - y^2\right)}{2I_z}$

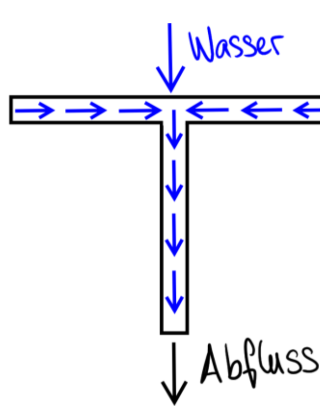
Lösung zu Aufgabe S1:

Aufgabenteil a):

Wenn man den Balken von rechts schneidet sieht man, dass die Querkraft in positiver y-Richtung zeigt und der Schubfluss deshalb von oben nach unten verläuft.

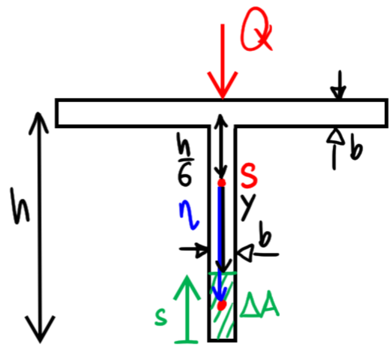


Man kann sich den Schubfluss ähnlich einem Wasserfluss vorstellen, wenn man beim Punkt, wo die Kraft angreift, Wasser in den Querschnitt eingiesst.



Aufgabenteil b):

1. Skizze



2. η bestimmen

η ist der Abstand vom Schwerpunkt der Querschnittsfläche zum Schwerpunkt der Fläche ΔA. Da ΔA wächst, ändert sich auch η.

$$\eta = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}h + y\right)$$

3. ΔA berechnen

Um ΔA zu berechnen, müssen wir zuerst die Laufvariable s, die die Höhe der Fläche bestimmt, definieren.

$$s = \frac{5}{6}h - y$$

Mit der konstanten Breite b ist ΔA demzufolge

$$\Delta A = b\left(\frac{5}{6}h - y\right)$$

4. H_z bestimmen

Setzt man die gefundenen Werte in die Gleichung $H_z = \eta \cdot \Delta A$ ein, erhält man das folgende Resultat:

$$H_z = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}h + y\right) b \left(\frac{5}{6}h - y\right) = \boxed{\frac{b}{2}\left(\frac{25}{36}h^2 - y^2\right)}$$

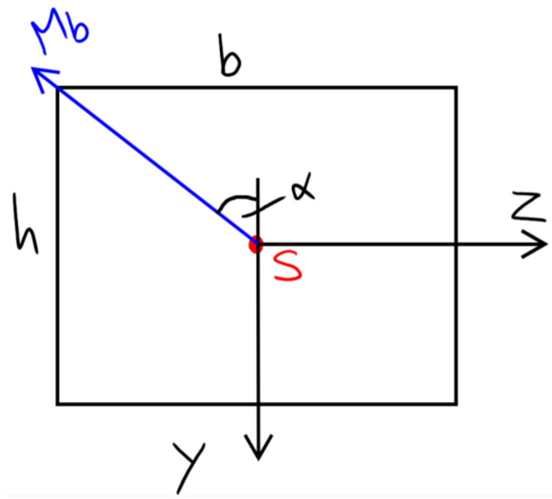
Aufgabenteil b):

Um die Schubspannung zu berechnen, muss man das Resultat aus Aufgabe a) in die Gleichung $\tau_{xy} = \frac{QH_z}{I_z \cdot b}$ einsetzen und bekommt dann

$$\boxed{\tau_{xy} = \frac{Q\left(\frac{25}{36}h^2 - y^2\right)}{2I_z}}$$

Aufgabe S2:

Berechnen Sie die maximale Spannung auf dem Querschnitt mit der gegebenen Belastung und Geometrie.



Lösung zu Aufgabe S2:

1. M_b auf der y- und z-Achse abbilden

$$M_{b,y} = -M_b \cos\alpha = -M_b \frac{h}{\sqrt{b^2+h^2}}, \qquad M_{b,z} = -M_b \frac{b}{\sqrt{b^2+h^2}}$$

2. Trägheitsmomente I_y und I_z berechnen

$$I_y = \frac{1}{12} b^3 h, \qquad I_z = \frac{1}{12} h^3 b$$

3. Maximale Spannung berechnen

Die Spannungsverteilung lautet

$$\sigma_x(y,z) = \frac{M_{b,y} \cdot z}{I_y} - \frac{M_{b,z} \cdot y}{I_z} = \frac{12 M_b}{\sqrt{b^2+h^2}} \left(\frac{y}{h^3} - \frac{z}{b^3} \right)$$

Der Punkt mit der maximalen Spannung ist entweder bei $\left(\frac{h}{2} / -\frac{b}{2}\right)$ oder bei $\left(-\frac{h}{2} / \frac{b}{2}\right)$, denn

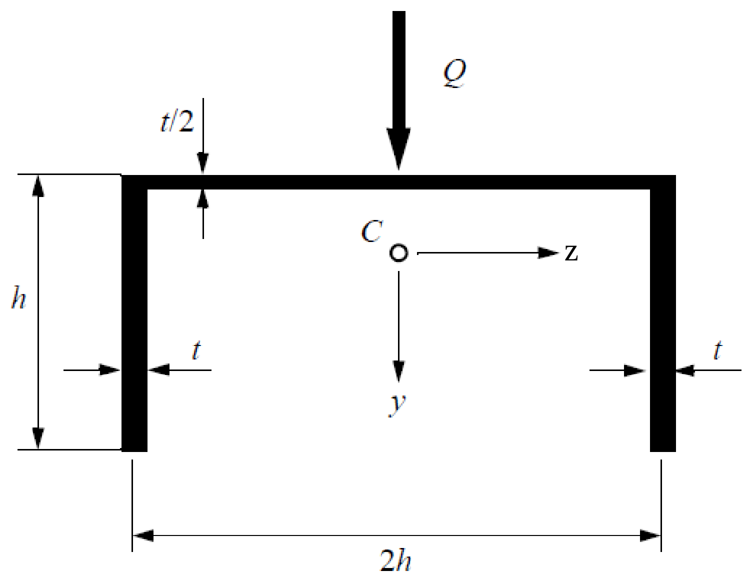
$$|\sigma_x|_{max} = \left| \sigma_x \left(\frac{h}{2} / -\frac{b}{2} \right) \right| = \left| \sigma_x \left(-\frac{h}{2} / \frac{b}{2} \right) \right| = \boxed{\frac{6\sqrt{b^2+h^2} M_b}{b^2 h^2}}$$

Mechanik II: Deformierbare Körper

für D-BAUG, D-MAVT **Haus- & Schnellübung 8**

Aufgabe H1:

Bestimmen Sie und zeichnen Sie den Schubspannungsverlauf für den abgebildeten Querschnitt (dünnwandiges U-Profil) bei gegebener Querkraft Q. Wo tritt die maximale Schubspannung $|\tau|_{max}$ auf und wie gross ist sie?

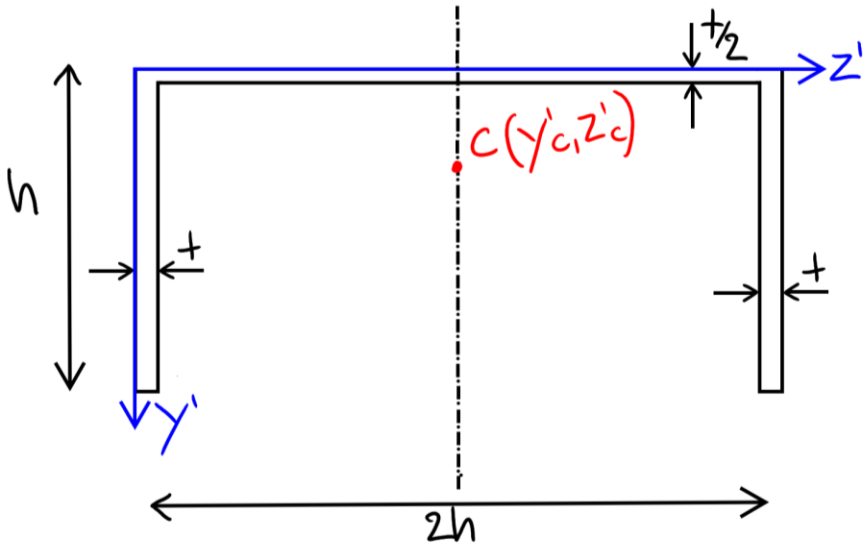


Geg: $q = \frac{Q}{I_z}$

Lösung zu Aufgabe H1:

1. Koordinaten des Schwerpunktes berechnen

Da der Querschnitt symmetrisch ist, liegt der Schwerpunkt auf der Symmetrielinie. Deshalb muss nur die y'-Koordinate berechnet werden.

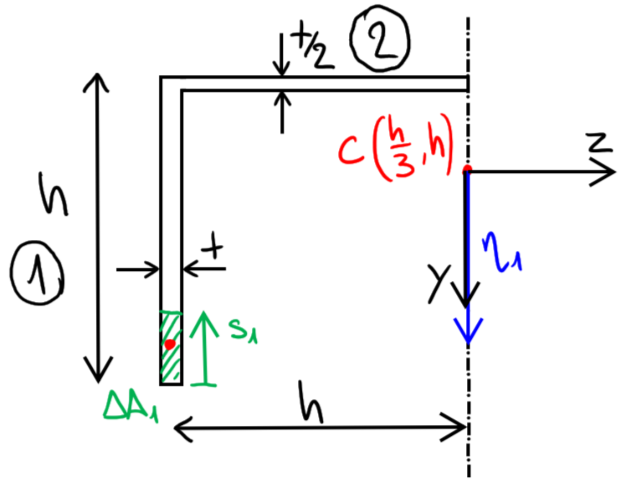


$$y'_S = \frac{\sum y'_i A_i}{\sum A_i} = \frac{\frac{t}{4}ht + 2\cdot\frac{h}{2}ht}{ht + 2ht} = \frac{h}{3} + \frac{t}{12} \overset{t \ll h}{\cong} \frac{h}{3}$$

Bemerkung: Für die Berechnung des Schubspannungsverlaufes wird nur die linke Seite des Querschnittes betrachtet, da der Querschnitt und deshalb auch die Schubspannungsverteilung symmetrisch sind.

2. Schubspannungsverlauf im Abschnitt 1 berechnen

2.1. Statisches Moment bestimmen



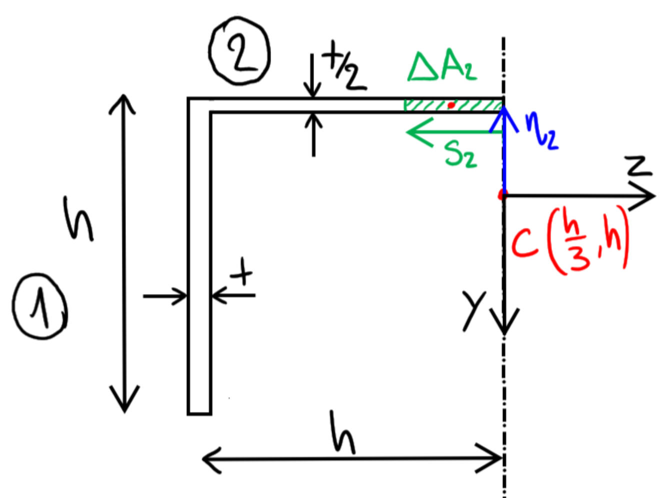
$$H_{z,1}(y) = \underbrace{t\left(\frac{2}{3}h - y\right)}_{\Delta A_1} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}h + y\right)}_{\eta_1} = \frac{t}{2}\left(\frac{4}{9}h^2 - y^2\right)$$

2.2. Schubspannungsverlauf

$$\boxed{\tau_{xy}(y) = \frac{q}{2}\left(\frac{4}{9}h^2 - y^2\right)}$$

3. Schubspannungsverlauf im Abschnitt 2 berechnen

3.1. Statisches Moment bestimmen



$$H_{z,2}(z) = -\underbrace{\frac{t}{2}z}_{\Delta A_2} \cdot \underbrace{\frac{h}{3}}_{\eta_2} = -\frac{htz}{6}$$

3.2. Spannungsverlauf

$$\boxed{\tau_{xz}(z) = -\frac{qhz}{3}}$$

4. $|\tau|_{max}$ finden

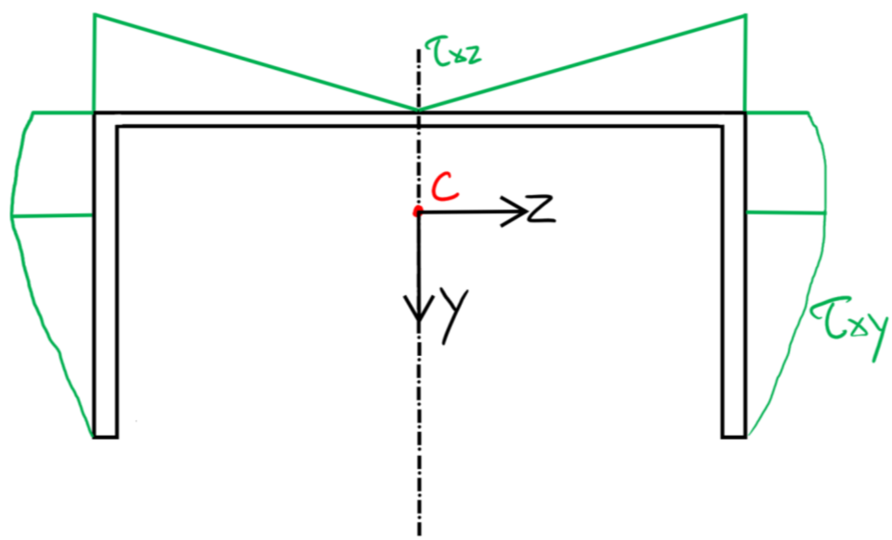
Die maximale Schubspannung ist entweder im Punkt $z = h$ oder im Punkt $y = 0$.

$$|\tau_{xz}|_{max} = \frac{qh^2}{3}, \qquad |\tau_{xy}|_{max} = \frac{2qh^2}{9}$$

Die von Betrag grösste Schubspannung im Querschnitt ist dementsprechend im Punkt $z = h$.

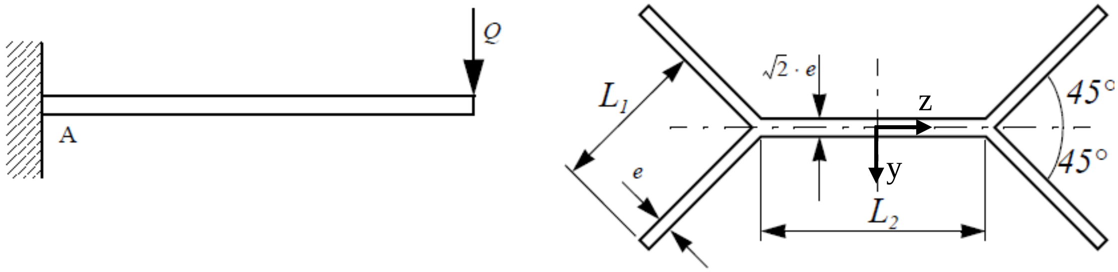
$$|\tau|_{max} = |\tau_{xz}|_{max} = \boxed{\frac{qh^2}{3}}$$

5. Spannungsverlauf zeichnen



Aufgabe H2:

Ermitteln Sie die Ortsabhängigkeit des Schubflusses am Träger mit dünnwandigem Querschnitt, welcher in der Figur dargestellt ist.

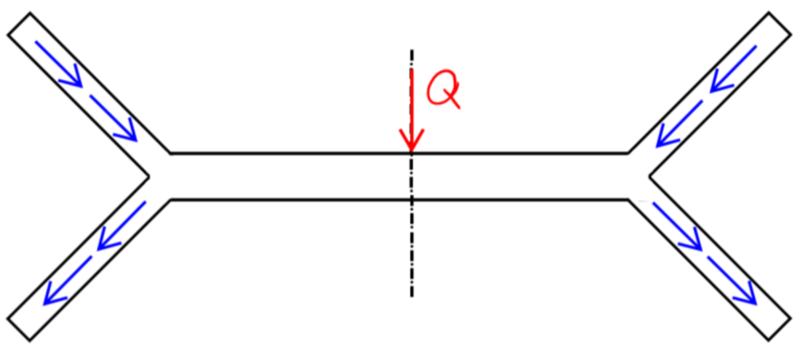


Geg.: $I_z = \frac{e}{6}\left(e^2 L_1 + 4L_1^3 + e^2 L_2\sqrt{2}\right)$

Lösung zu Aufgabe H2:

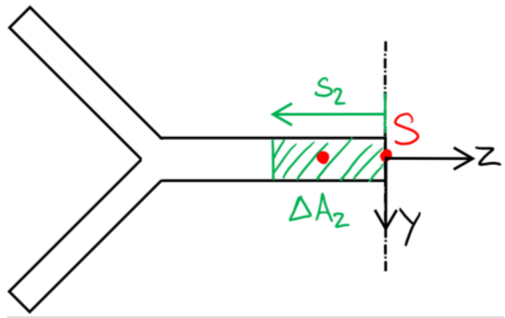
1. Schubflussverlauf

Bevor man losrechnet ist bei komplizierteren Querschnitten hilfreich, wenn man zuerst den Verlauf des Schubflusses untersucht.



Bemerkung: Wie in der Aufgabe H2 wird wegen der Symmetrie nur eine Seite des Systems betrachtet. Wie man im folgendem Schritt sieht, gibt es keinen Schubfluss im mittleren Bereich.

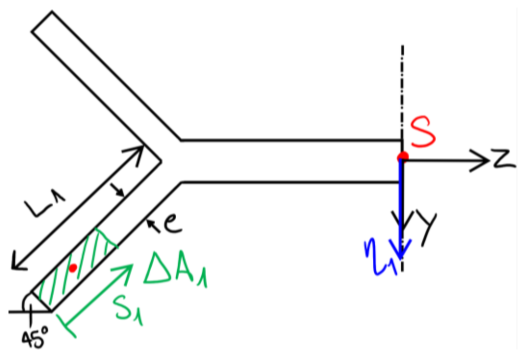
2. Schubfluss im Abschnitt 2



Da die zwei Schwerpunkte auf gleicher Höhe liegen, ist $\eta_2 = 0$ und somit $H_{z,2} = 0$ und auch $q_2 = 0$.

3. Schubfluss im Abschnitt 1

3.1. Statisches Moment berechnen



$$H_{z,1} = \underbrace{s_1 e}_{\Delta A_1} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(L_1 - \frac{s_1}{2}\right)}_{\eta_1}$$

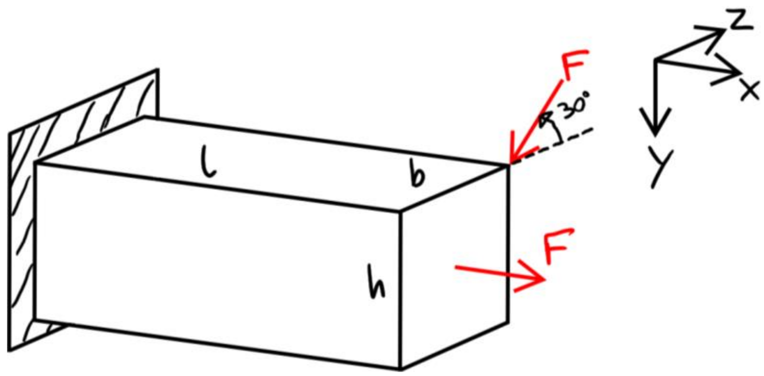
3.2. Schubfluss bestimmen

Der gesuchte Schubfluss $q = \frac{QH_z}{I_z}$ ist mit dem gegebenen I_z:

$$q_1 = \frac{Qs_1 e\frac{\sqrt{2}}{2}\left(L_1 - \frac{s_1}{2}\right)}{\frac{e}{6}\left(e^2 L_1 + 4L_1^3 + e^2 L_2\sqrt{2}\right)} = \boxed{\frac{3\sqrt{2}Qs_1\left(L_1 - \frac{s_1}{2}\right)}{\left(e^2 L_1 + 4L_1^3 + e^2 L_2\sqrt{2}\right)}}$$

Aufgabe H3:

Gegeben sei ein Balken, dessen Belastung und Geometrie in der Skizze gegeben sind.



a) Geben Sie den maximalen Betrag der Kraft F an, so dass σ_{zul} im Querschnitt nicht überschritten wird.

b) Man nehme an, dass die Kraft F und die Länge l als unveränderliche Grössen gegeben sind und dass im momentanen Zustand die Spannung im Innern σ_{zul} überschreitet. Was würden Sie ihrem Chef vorschlagen, damit die innere Spannung σ_{zul} nicht mehr überschreitet?

Lösung zu Aufgabe H3:

Aufgabenteil a):

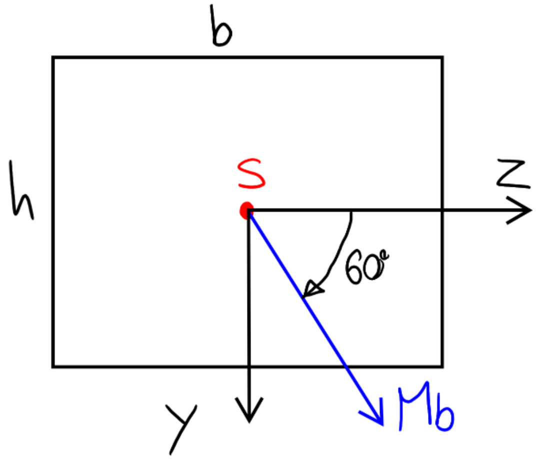
1. Betrag und Richtung des maximalen Biegemomentes berechnen

1.1. Betrag

Aus Erfahrung kann man direkt wissen, dass der maximale Biegemoment bei der Einspannung ist, da der Abstand zur Kraft F am grössten ist. Der Betrag des maximalen Biegemomentes ist dementsprechend $M_b = l \cdot F$.

1.2. Richtung

Die Richtung des Momentes ist immer senkrecht zur Kraft, die ihn provoziert. Wichtig ist, dass jede Biegung immer durch den Schwerpunkt geht.



2. Spannungsverteilung im Querschnitt untersuchen

Die Spannungsverteilung in einem Querschnitt ist allgemein definiert als

$$\sigma_x(y,z) = \frac{M_y \cdot z}{I_y} - \frac{M_z \cdot y}{I_z} + \frac{N}{A}$$

2.1. Momente in y-und z-Richtung bestimmen

Wenn man M_b auf die y- und z-Richtung abbildet, sieht man, dass

$$M_{b,y} = \frac{\sqrt{3}}{2} lF, \qquad M_{b,z} = \frac{1}{2} lF$$

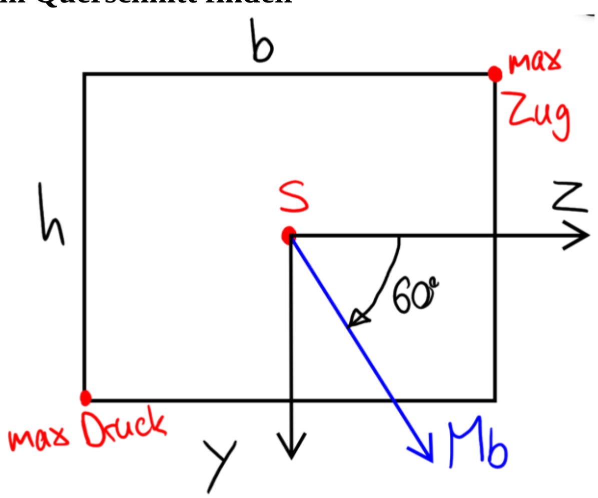
2.2. Trägheitsmomente bestimmen

$$I_y = \frac{1}{12} b^3 h, \qquad I_z = \frac{1}{12} h^3 b$$

2.3. Spannungsverteilung berechnen

$$\sigma_x(y,z) = \frac{6lF}{bh}\left(\frac{\sqrt{3}\cdot z}{b^2} - \frac{y}{h^2}\right) + \frac{F}{bh}$$

3. Maximale Spannung im Querschnitt finden



Zwei Punkte kommen in Frage, wenn man von maximale Spannung spricht: der Punkt, wo die Zugspannung am höchsten ist und der Punkt, an dem die Druckspannung maximal ist. Wäre die Beanspruchung nur durch das Beigemoment gegeben, wären die Beträge in den zwei Fällen äquivalent. Da aber noch eine axiale Zugspannung vorliegt, wird der Betrag der maximalen Zugspannung grösser als den Betrag der Druckspannung sein.
Die maximale Spannung im Balken ist also

$$\sigma_{x,max} = \sigma_x\left(-\frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right) = \frac{3lF}{bh}\left(\frac{\sqrt{3}\cdot h}{b^2} + \frac{b}{h^2}\right) + \frac{F}{bh}$$

4. Die maximal mögliche Kraft *F* bestimmen

Damit der Balken nicht versagt gilt $\sigma_{x,max} < \sigma_{zul}$. Also

$$\frac{3lF}{bh}\left(\frac{\sqrt{3}\cdot h}{b^2}+\frac{b}{h^2}\right)+\frac{F}{bh}<\sigma_{zul} \rightarrow \boxed{F<\frac{\sigma_{zul}\cdot bh}{3l\left(\frac{\sqrt{3}\cdot h}{b^2}+\frac{b}{h^2}\right)+1}}$$

Aufgabenteil b):

$$\sigma_x(y,z)=\frac{6lF}{bh}\left(\frac{\sqrt{3}\cdot z}{b^2}-\frac{y}{h^2}\right)+\frac{F}{bh}$$

Wenn man die Spannungsverteilung analysiert, merkt man, dass die z-Koordinate einen grösseren Einfluss auf die Spannung hat als die y-Koordinate, da sie mit einem Koeffizienten von $\sqrt{3}$ multipliziert wird.

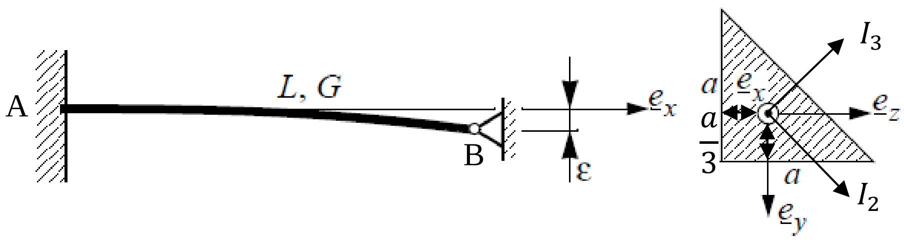
Der Chef ist vor allem daran interessiert, Material (d.h. Geld) zu sparen. Das heisst, dass man die Dimensionen so wenig wie möglich vergrössern soll. Um die innere Spannung so effizient wie möglich zu unterdrücken, wäre der beste Weg die Breite b zu erhöhen und die Höhe h zu verkleinern, ohne die Querschnittsfläche zu vergrössern.

Wiederholungsaufgabe 1:

Ein schlanker Balken (Länge L, Gewichtskraft G, Elastizitätsmodul E) mit dem skizzierten Dreiecksquerschnitt sei links eingespannt und rechts reibungsfrei gelenkig gelagert. Das rechte Ende habe sich im Laufe der Zeit um die Länge ε vertikal nach unten verschoben.

Gesucht ist die absolut maximal auftretende Spannung im Querschnitt des Balkens.

Hinweis: Die Kräfte in x-Richtung sind vernachlässigbar (ε<<L).

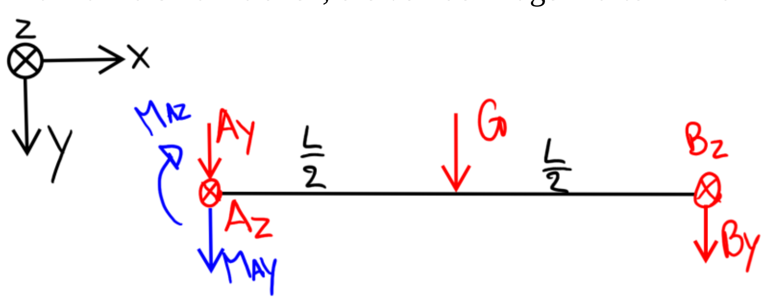


Geg.: $I_2 = \frac{a^4}{72}, I_3 = \frac{a^4}{24}, E, L, G$

Lösung zur Widerholungsaufgabe:

1. Gleichgewichtsbedingungen

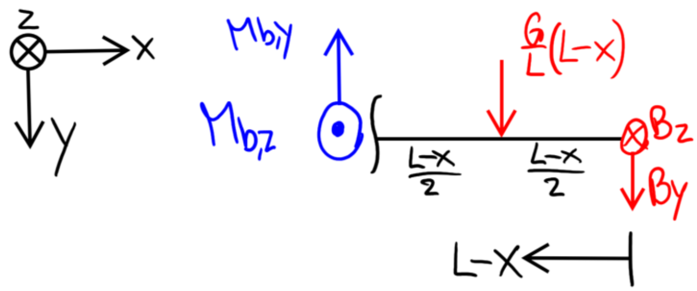
Da das System 2-fach statisch unbestimmt ist (5 Gleichungen, 7 Unbekannten), drücken wir die Lagerkräfte in Punkt A als Funktionen, die von den Lagerkräften in Punkt B abhängen.



$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y = -G - B_y, \qquad \sum F_z = 0 \rightarrow A_z = -B_z,$$

$$\sum M_{y,A} = 0 \rightarrow M_{A,y} = LB_z, \qquad \sum M_{z,A} = 0 \rightarrow M_{A,z} = -\frac{L}{2}G - LB_y$$

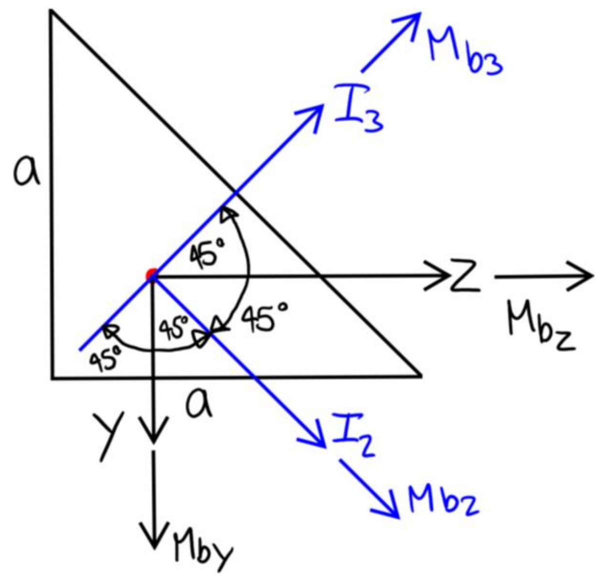
2. Biegemomente



$$\sum M_y = 0 \rightarrow M_{b,y} = (x-L)B_z, \qquad \sum M_z = 0 \rightarrow M_{b,z} = (L-x)B_y + \frac{G}{2L}(L-x)^2$$

3. Querschnittsanalyse

Der Balken biegt sich um die Hauptachsen des Querschnittes, welche aber nicht mit unserem Koordinatensystem übereinstimmen. Aus diesem Grund muss man eine Koordinatentransformation durchführen, um die Biegemomente in Hauptachsenrichtung zu berechnen.



$$M_{b,3} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(M_{b,z} - M_{b,y}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left((L-x)(B_y + B_z) + \frac{G}{2L}(L-x)^2\right)$$

$$M_{b,2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(M_{b,z} + M_{b,y}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left((L-x)(B_y - B_z) + \frac{G}{2L}(L-x)^2\right)$$

4. Biegelinie in Hauptachsenrichtung und Lagerkräfte im Punkt B berechnen

4.1. Biegelinie in Hauptachsenrichtung berechnen

$$v_2(x) = \frac{1}{EI_3}\iint M_{b3}dx = \frac{12\sqrt{2}}{Ea^4}\left(\frac{G}{24L}(L-x)^4 + \left(B_y + B_z\right)\frac{(L-x)^3}{6} + C_1x + C_2\right)$$

$$v_3(x) = -\frac{1}{EI_2}\iint M_{b2}dx = -\frac{36\sqrt{2}}{Ea^4}\left(\frac{G}{24L}(L-x)^4 + \left(B_y - B_z\right)\frac{(L-x)^3}{6} + C_3x + C_4\right)$$

Mit den Randbedingungen $v_2(0) = v_3(0) = v_2'(0) = v_3'(0) = 0$ erhält man für die Integrationskonstanten:

$$C_1 = L^2\left(\frac{G}{6} + \frac{B_y + B_z}{2}\right), \qquad C_2 = -L^3\left(\frac{G}{24} + \frac{B_y + B_z}{6}\right)$$

$$C_3 = L^2\left(\frac{G}{6} + \frac{B_y, -B_z}{2}\right), \qquad C_4 = -L^3\left(\frac{G}{24} + \frac{B_y - B_z}{6}\right)$$

4.2. Die Lagerkräfte im Punkt B bestimmen

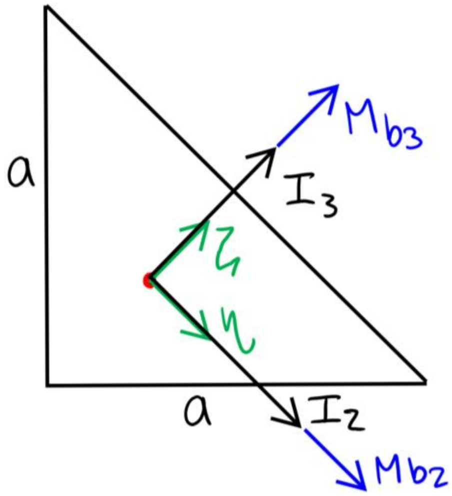
Da der Punkt B nur in y-Richtung um ε verschoben ist, kann man die Randbedingungen $v_y(L) = \frac{v_2(L)-v_3(L)}{\sqrt{2}} = \varepsilon$ und $v_z(L) = \frac{v_2(L)+v_3(L)}{\sqrt{2}} = 0$ aufstellen. Damit hat man genügend Informationen, um die Lagerkräfte in B zu berechnen:

$$B_y = \frac{Ea^4\varepsilon}{24L^3}, \qquad B_z = -\frac{3}{8}G + \frac{Ea^4\varepsilon}{12L^3}$$

5. Absolut maximale Spannung im Querschnitt berechnen

5.1. Spannungsverteilung im Querschnitt

Die Spannungsverteilung im Querschnitt lautet $\sigma(\eta,\zeta) = \frac{M_{b,2}\cdot\zeta}{I_2} - \frac{M_{b,3}\cdot\eta}{I_3}$. Setzt man die Lagerkräfte in den Biegemomenten ein erhält man $M_{b,2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left((L-x)\left(\frac{3}{8}G - \frac{Ea^4\varepsilon}{24L^3}\right) + \frac{G}{2L}(L-x)^2\right)$ und $M_{b,3} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left((L-x)(-\frac{3}{8}G + \frac{Ea^4\varepsilon}{8L^3}) + \frac{G}{2L}(L-x)^2\right)$.

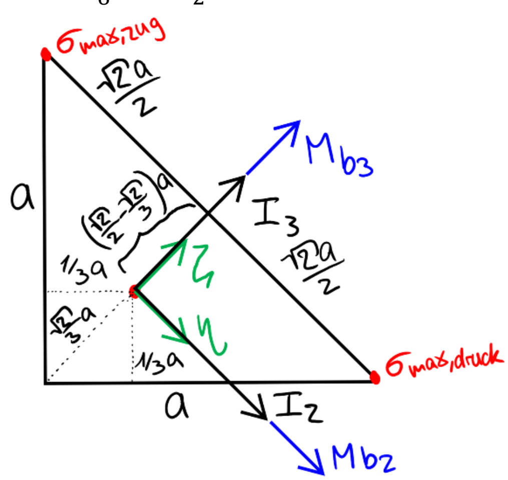


Die Spannungsverteilung ist somit

$$\sigma(\eta,\zeta) = \frac{36\sqrt{2}\left((L-x)\left(\frac{3}{8}G - \frac{Ea^4\varepsilon}{24L^3}\right) + \frac{G}{2L}(L-x)^2\right)\cdot\zeta}{a^4} - \frac{12\sqrt{2}\left((L-x)(-\frac{3}{8}G + \frac{Ea^4\varepsilon}{8L^3}) + \frac{G}{2L}(L-x)^2\right)\cdot\eta}{a^4}$$

5.2. Absolut maximale Spannung bestimmen

Die maximale Belastung durch die Momente ergibt sich bei $x = 0$. Im Querschnitt ist der am meisten belastete Punkt bei $\sigma_{max,Zug}$ bei $(\eta = -\frac{\sqrt{2}}{6}/\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2})$ oder $\sigma_{max,Druck}$ bei $(\eta = \frac{\sqrt{2}}{6}/\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2})$.



Wenn man die zwei Punkte einsetzt erhält man:

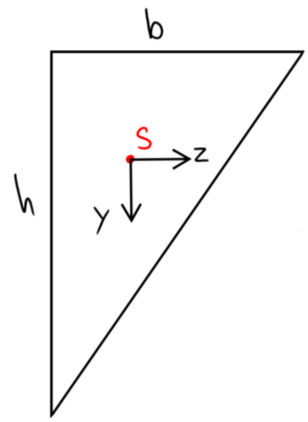
$$\sigma_{max,Zug} = \frac{32}{a^4}GL - \frac{E\varepsilon}{L^2}$$

$$\sigma_{max,Druck} = \frac{31}{a^4}GL - 2\frac{E\varepsilon}{L^2}$$

$$\rightarrow \boxed{\sigma_{max,abs} = \sigma_{max,Zug} = \frac{32}{a^4}GL - \frac{E\varepsilon}{L^2}}$$

Wiederholungsaufgabe 2:

Ein rechtwinkliger Dreiecksquerschnitt mit Schwerpunktachsen y und z sei gegeben. Er besitze die Breite b und die Höhe h wie es in der Skizze dargestellt ist.



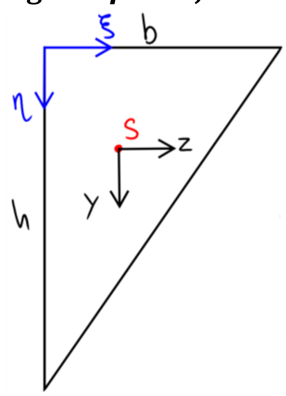
a) Berechnen Sie die axialen Flächenträgheitsmomente I_y und I_z und das Deviationsmoment I_{yz}.

b) Finden Sie die Hauptträgheitsmomente I_1 und I_2 und die Lage der Hauptachsen für das Seitenverhältnis $\frac{h}{b} = 2$.

Lösung zur Wiederholungsaufgabe 2:

Aufgabenteil a):

1. Die Flächenträgheitsmomente bezüglich η und ξ berechnen



Die Funktion der Hypotenuse ist gegeben durch: $\eta(\xi) = -\frac{h}{b}\xi + h,\ \xi(\eta) = -\frac{b}{h}\eta + b$

$$I_\xi = \iint \eta^2 dA = \int_0^b \int_0^{-\frac{h}{b}\xi+h} \eta^2 d\eta d\xi = -\frac{h^3}{3b^3}\int_0^b (\eta - b)^3 d\xi = \frac{1}{12}bh^3$$

$$I_\eta = \iint \xi^2 dA = \int_0^h \int_0^{-\frac{b}{h}\eta+b} \xi^2 d\xi d\eta = -\frac{b^3}{3h}\int_0^b (\xi - h)^3 d\eta = \frac{1}{12}b^3 h$$

$$I_{\eta\xi} = \iint \eta\xi dA = \begin{cases} \int_0^b \int_0^{-\frac{h}{b}\xi+h} \eta\xi d\eta d\xi = \frac{h^2}{2b^2}\int_0^b \xi(\xi - b)^2 d\xi = \frac{1}{24}b^2h^2 \\ \int_0^h \int_0^{-\frac{b}{h}\eta+b} \eta\xi d\xi d\eta = \frac{b^2}{2h^2}\int_0^h \eta(\eta - h)^2 d\xi = \frac{1}{24}b^2h^2 \end{cases}$$

2. Den Schwerpunkt bestimmen

$$\eta_S = \frac{1}{A}\iint \eta dA = \frac{2}{bh}\int_0^b \int_0^{-\frac{h}{b}\xi+h} \eta d\eta d\xi = \frac{h}{b^3}\int_0^b (\xi - b)^2 d\xi = \frac{h}{3}$$

$$\xi_S = \frac{1}{A}\iint \xi dA = \frac{2}{bh}\int_0^h \int_0^{-\frac{b}{h}\eta+b} \xi d\xi d\eta = \frac{b}{h^3}\int_0^h (\eta-h)^2 d\xi = \frac{b}{3}$$

3. I_y, I_z und I_{yz} finden

Um die Flächenträgheitsmomente bezüglich des Schwerpunktes zu finden, wendet man den Satz von Steiner an.

$$I_y = I_\eta - \xi_S^2 \cdot A = \frac{b^3 h}{12} - \frac{b^2}{9}\frac{bh}{2} = \boxed{\frac{1}{36}b^3 h,} \qquad I_z = I_\xi - \eta_S^2 \cdot A = \frac{bh^3}{12} - \frac{h^2}{9}\frac{bh}{2} = \boxed{\frac{1}{36}bh^3}$$

$$I_{yz} = I_{\eta\xi} - \eta_S \xi_S \cdot A = \frac{b^2 h^2}{24} - \frac{bh}{9}\frac{bh}{2} = \boxed{-\frac{1}{72}b^2 h^2}$$

<u>Aufgabenteil b):</u>

1. I_1 und I_2 berechnen

Mit $b = \frac{h}{2}$ kriegt man $I_y = \frac{h^4}{288}, I_z = \frac{h^4}{72}$ und $I_{yz} = -\frac{h^4}{288}$

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{576}h^4$$

$$\rightarrow \boxed{I_1 = \frac{5+\sqrt{13}}{576}h^4, \qquad I_2 = \frac{5-\sqrt{13}}{576}h^4}$$

2. Hauptachsen bestimmen

$$\tan(2\theta) = \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y} \rightarrow \boxed{\theta_1 = -16.845°,} \qquad \theta_2 = 90° + \theta_1 = \boxed{73.155°}$$

<u>Bemerkung:</u> Der Aufgabenteil b) ist auch mit dem Mohrschen Kreis lösbar.