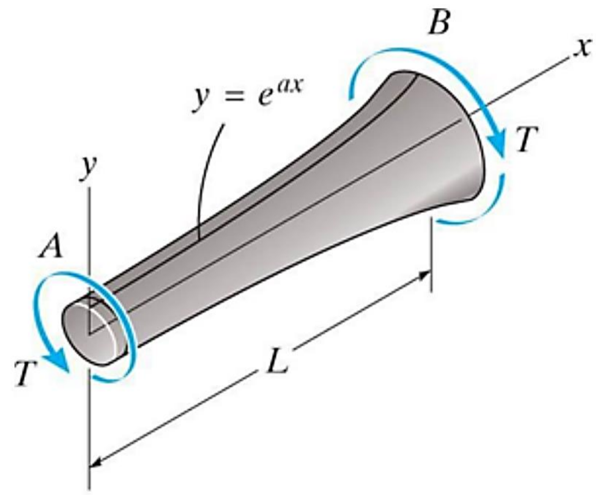
Mechanik II: Deformierbare Körper

für D-BAUG, D-MAVT **Haus- & Schnellübung 9**

Aufgabe S1:

Der abgebildete Balken habe einen Radius von $r = e^{ax}$, wobei a eine Konstante ist. Wie gross ist der Winkelunterschied zwischen dem Punkt A und B, wenn man an beiden Enden des Balkens ein Torsionsmoment T ausübt?



Das Schubmodul G des Balkens sei gegeben.

S1 5 mögliche Antworten	Ⓐ $\vartheta = 0$	Ⓑ $\vartheta = \frac{T}{2\pi a G}(1 - e^{4aL})$	Ⓒ $\vartheta = \frac{T}{2\pi a G}(1 + e^{4aL})$
		Ⓓ $\vartheta = \frac{T}{2\pi a G}(1 - e^{-4aL})$	Ⓔ $\vartheta = \frac{T}{2\pi a G}(1 + e^{-4aL})$

Lösung zu Aufgabe S1:

Der Winkelunterschied zwischen den Punkten A und B ist nichts aderst als der Drehwinkel, der durch das Torsionsmoment entsteht:

$$\vartheta(x) = \int_0^{x'} \vartheta'(x)dx = \int_0^{x'} \frac{T(x)}{I_p(x)G(x)}dx \overset{f\ddot{u}r\ diese\ Aufgabe}{\triangleq} \int_0^{L} \frac{T}{I_p(x)G}dx$$

1. Das polare Flächenträgheitsmoment berechnen

Da unser Querschnitt achsensymmetrisch ist, gilt:

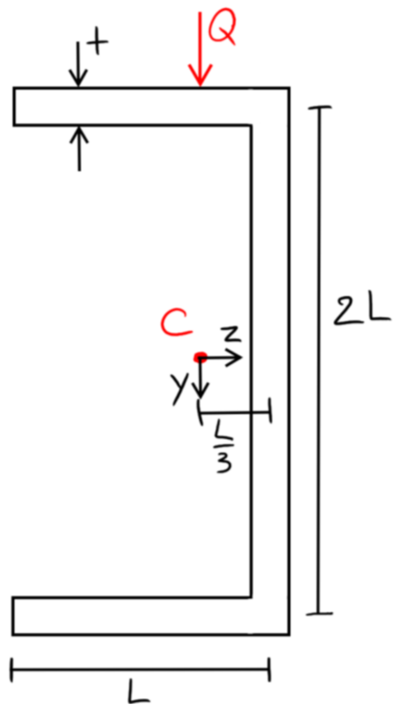
$$I_p = I_x + I_y = 2 \cdot I_x \overset{Kreis}{\triangleq} \frac{\pi}{2}e^{4ax}$$

2. Den Drehwinkel bestimmen

$$\vartheta(x) = \int_0^{L} \frac{T}{I_p(x)G}dx = \frac{T}{G}\frac{2}{\pi}\int_0^{L} e^{-4ax}dx = \boxed{\frac{T}{2\pi aG}(1 - e^{-4aL})}$$

Aufgabe S2:

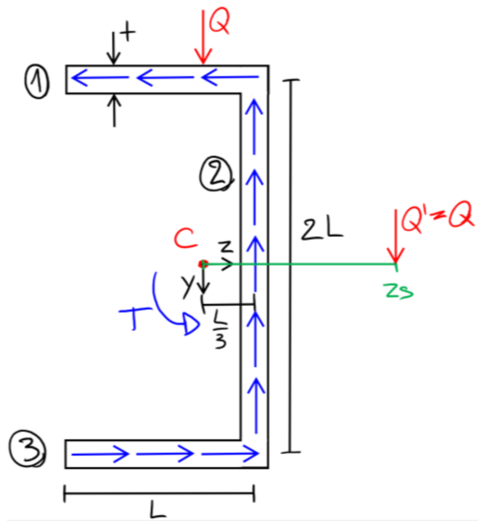
Gegeben sei ein Balken mit einem dünnwandigen Querschnitt ($t \ll L$) wie in der Skizze beschrieben. Von oben wirkt eine Kraft Q in positiver y-Richtung auf den Balken. Das Flächenträgheitsmoment $I_z = \frac{8}{3} L^3 t$ sei gegeben.



Finden Sie den Schubmittelpunkt.

Lösung zu Aufgabe S2:

Um das durch den Schubfluss resultierende Torsionsmoment zu kompensieren, muss man den Angriffspunkt der Querkraft Q auf einen um z_s entfernten Punkt verschieben.

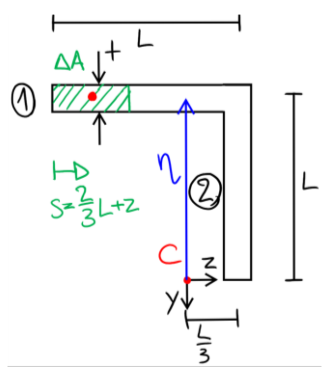


Damit das System die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt, muss $T = z_S \cdot Q$ gelten; also $z_S = \frac{T}{Q}$.

Bemerkung: Um das innere Torsionsmoment zu berechnen, muss man die aus dem Schubfluss resultierenden Kräfte berechnen. Da sich die Abschnitte 1 und 3 nur wegen dem Vorzeichen unterschieden und die resultierende Kraft im Abschnitt 2 wegen den Gleichgewichtsbedingungen gleich der Querkraft ist, reicht es, wenn nur der Schubfluss des ersten Abschnittes berechnet wird.

1. Schubfluss im Abschnitt 1 berechnen

1.1. $H_{z,1}(z)$ bestimmen



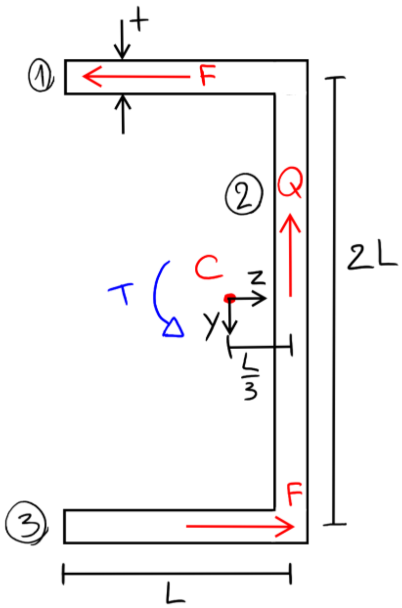
$$H_{z,1}(z) = \eta \cdot \Delta A = t\left(\frac{2}{3}L + z\right)L$$

1.2. Schubfluss ausrechnen

$$\tau_{xz}(z) = \frac{QH_{z,1}(z)}{I_z t} = \frac{Qt\left(\frac{2}{3}L + z\right)L}{\frac{8}{3}L^3 t^2} = \frac{3}{8}\frac{Q}{L^2 t}\left(\frac{2}{3}L + z\right)$$

2. Das Torsionsmoment *T* finden

2.1. Schubkräfte berechnen



$$F = t\int_{-\frac{2}{3}L}^{\frac{1}{3}L} \tau_{xz}(z)dz = \frac{3}{8}\frac{Q}{L^2}\underbrace{\int_{-\frac{2}{3}L}^{\frac{1}{3}L}\left(\frac{2}{3}L + z\right)dz}_{\frac{L^2}{2}}$$

$$= \frac{3Q}{16}$$

2.2. Torsionsmoment bestimmen

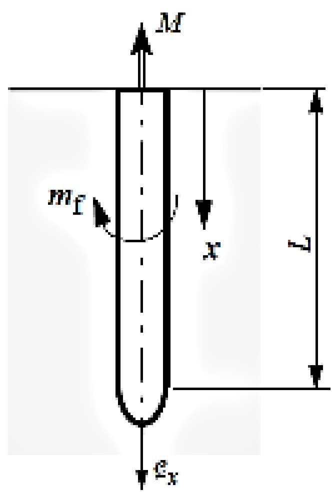
$$T = 2 \cdot LF + \frac{L}{3}Q = \frac{17}{24}QL$$

3. Den Schubmittelpunkt berechnen

$$z_S = \frac{T}{Q} = \boxed{\frac{17}{24}L}$$

Aufgabe H1:

An einem elastischen, gleichförmig rotierenden Erdbohrer in Form einer Stahlwelle (Länge L, Radius $R \ll L$, Schubmodul G) greift am oberen Ende ein gegebenes, konstantes Antriebsmoment M an. Infolge Reibung an der Bohrlochwand entsteht am Bohrer ein entgegengesetztes Reibungsmoment pro Längeneinheit $m_f = kx$. (Die Reibung des Bohrkopfes sowie Biegung infolge Beulung wird in diesem Modell nicht betrachtet.)



a) Bestimmen Sie die Grösse des Reibungsmoments pro Längeneinheit m_f (d.h. die Konstante k)
b) Berechnen Sie die totale Verdrehung des Bohrers zwischen Bohrkopf und Oberfläche ϑ_{max}.
c) Welches ist der höchste zulässige Wert M_{zul}, wenn ϑ_{max} den vorgeschriebenen Betrag ϑ_0 nicht überschreiten soll?

Lösung zu Aufgabe H1:

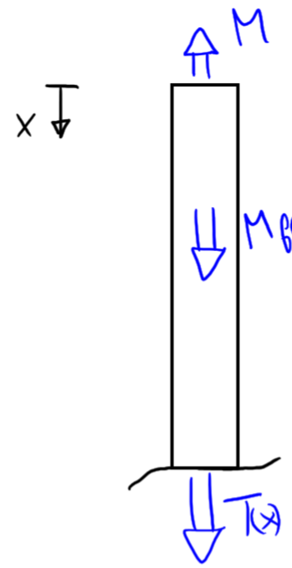
Aufgabenteil a):

Momentengleichgewicht am Balken in Axialrichtung:

$$\sum M_x = 0 \rightarrow M = M_f = \int_0^L m_f dx = \frac{1}{2} kL^2 \rightarrow \boxed{k = \frac{2M}{L^2}}$$

Aufgabenteil b):

1. Inneres Torsionsmoment bestimmen



$$M_f(x) = \int_0^x m_f dx = \frac{M}{L^2}x^2, \qquad \sum M_x = 0 \rightarrow T(x) = M\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right)$$

2. $\boldsymbol{\vartheta_{max}}$ berechnen

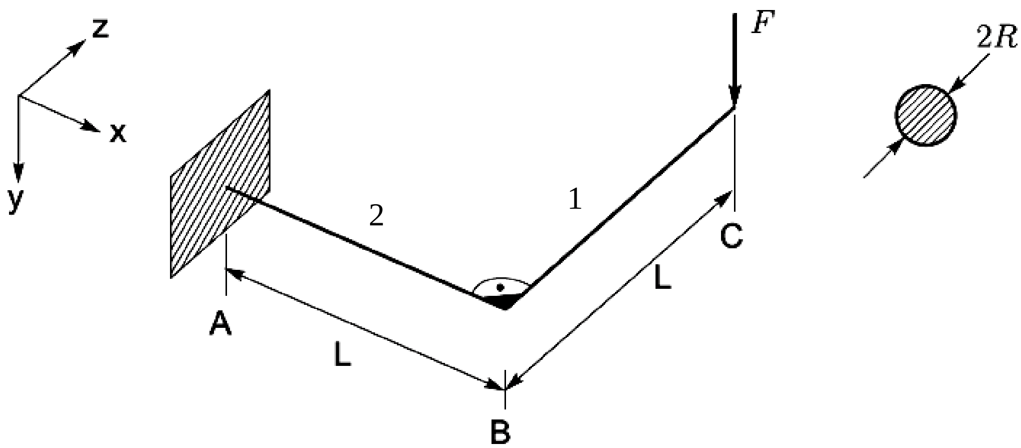
$$\vartheta(L) = \frac{1}{I_p G}\int_0^L T(x)dx \overset{I_p=\frac{\pi}{2}R^4}{\cong} \frac{2}{\pi R^4 G}\int_0^L M\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right)dx = \frac{2M}{\pi R^4 G}\frac{2}{3}L = \boxed{\frac{4ML}{3\pi R^4 G}}$$

Aufgabenteil c):

$$\vartheta_{max} \leq \vartheta_0 \rightarrow \frac{4M_{zul}L}{3\pi R^4 G} = \vartheta_0 \rightarrow \boxed{M_{zul} = \frac{3\pi R^4 G\vartheta_0}{4L}}$$

Aufgabe H2:

Auf den L-Träger (Elastizitätsmodul E, Schubmodul G) wirkt, wie in der Skizze dargestellt, im Punkt C die Kraft F in positive y-Richtung. Der Querschnitt des L-Trägers ist ein Kreis mit Radius R.

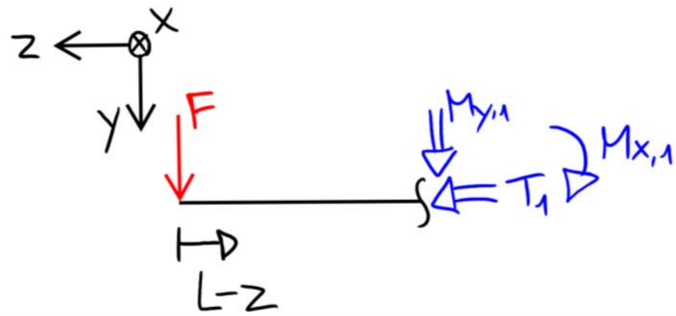


Gesucht wird die vertikale Verschiebung im Punkt C.

<u>Lösung zu Aufgabe H2:</u>

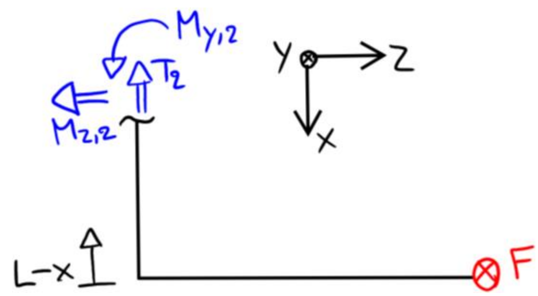
1. Innere Momente im Träger berechnen

1.1. Abschnitt 1 $0 \leq z \leq L$



$$\sum M_y = 0 \rightarrow M_{y,1} = 0, \qquad \sum M_z = 0 \rightarrow T_1 = 0, \qquad \sum M_x = 0 \rightarrow M_{x,1} = F(L - z)$$

1.2. Abschnitt 2 $0 \leq x \leq L$



$$\sum M_y = 0 \rightarrow M_{y,2} = 0, \qquad \sum M_z = 0 \rightarrow M_{z,2} = F(L - x), \qquad \sum M_x = 0 \rightarrow T_2 = -FL$$

2. Biegelinie mittels Verdrehung im Punkt B bestimmen

2.1. Allgemeine Lösung berechnen

$$v_1(z) = \frac{1}{EI_{x,1}} \iint M_{x,1} dz = \frac{F}{EI_{x,1}} \left(-\frac{1}{6} z^3 + \frac{L}{2} z^2 + C_1 z + C_2 \right)$$

$$v_2(x) = \frac{1}{EI_{z,2}} \iint M_{z,2} dx = \frac{F}{EI_{z,2}} \left(-\frac{1}{6} x^3 + \frac{L}{2} x^2 + C_3 x + C_4 \right)$$

2.2. Randbedingungen aufstellten

Lagerbedingung in A:

$$v_2(0) = v_2'(0) = 0$$

Übergangbedingung Abschnitt 2→1:

$$v_2(L) = v_1(0)$$

Verdrehung durch Torsion:

$$\vartheta(L) = v_1'(0) = \frac{T_2}{GI_{p,2}} L = -\frac{FL^2}{GI_{p,2}}$$

2.3. Spezielle Lösung berechnen

$$v_2(0) = v_2'(0) = 0 \rightarrow C_4 = C_3 = 0, \qquad v_2(L) = v_1(0) \rightarrow C_2 = \frac{1}{3}L^3$$

$$v_1'(0) = -\frac{FL^2}{GI_{p,2}} \rightarrow C_1 = \frac{L^2E}{G}\frac{I_{x,1}}{I_{p,2}}$$

$$v_1(z) = \frac{F}{EI_{x,1}}\left(-\frac{1}{6}z^3 + \frac{L}{2}z^2 + \frac{L^2E}{G}\frac{I_{x,1}}{I_{p,2}}z + \frac{1}{3}L^3\right), \qquad v_2(x) = \frac{F}{EI_{z,2}}\left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{L}{2}x^2\right)$$

3. $\boldsymbol{I_{z,2}, I_{x,1}, I_{p,2}}$ bestimmen

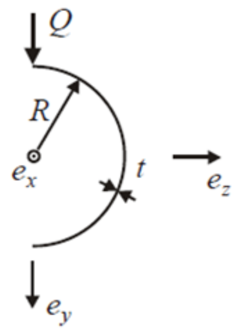
$$I_{x,1} = I_{z,2} = \frac{\pi}{4}(2R)^4 = 4\pi R^4, \qquad I_{p,2} = 2I_{x,1}$$

4. Verschiebung im Punkt C bestimmen

$$v_1(L) = \frac{F}{E4\pi R^4}\left(-\frac{L^3}{6} + \frac{L^3}{2} + \frac{L^3E}{2G} + \frac{L^3}{3}\right) = \boxed{\frac{L^3F}{E4\pi R^4}\left(\frac{2}{3} + \frac{E}{2G}\right)}$$

Aufgabe H3:

Ein Balken mit dünnwandigem Querschnitt ($t \ll R$) gemäss Skizze wird mit einer Querkraft Q belastet.

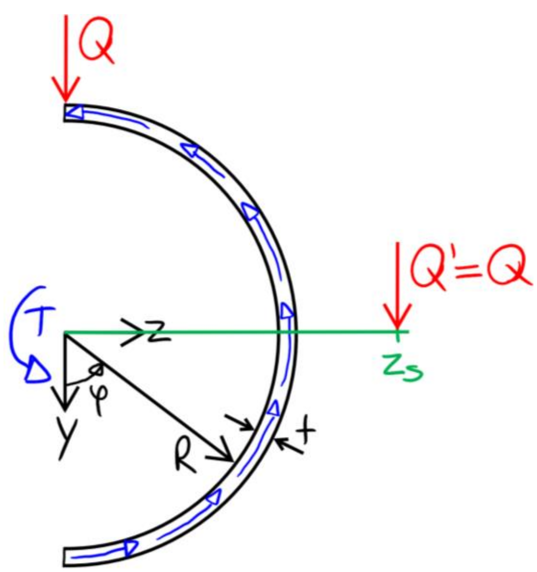


Wo liegt der Schubmittelpunkt?

Kontrollieren Sie, ob Sie mittels Gleichgewicht und Flächenmoment erster Ordnung auf die gleiche Lösung kommen.

Lösung zu Aufgabe H3:

Analog zur Aufgabe S2 lässt sich das Schubzentrum mit der Gleichung $z_S = \frac{T}{Q}$ bestimmen.



1. Schubfluss mittels Gleichgewicht berechnen

1.1. Gleichgewicht aufstellen

Auf der x-Fläche muss die folgende Bedingung erfüllt sein:

$$\sum F_x = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial \tau_{xr}}{\partial r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{x\varphi}}{\partial \varphi} + \cancel{f_x} = 0$$

Wenn wir die Gleichung nach $\tau_{x\varphi}$ auf lösen ergibt sich

$$\tau_{x\varphi} = -r \int \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} d\varphi$$

1.2. $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$ definieren

Die einzigen Normalspannungen, die auftreten sind durch das Biegemoment $M_{b,z}(x)$ in z-Richtung verursacht:

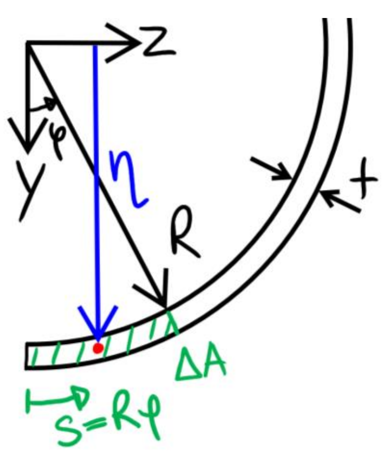
$$\sigma_x = \frac{M_{b,z}(x) \cdot y}{I_z} \rightarrow \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{M'_{b,z}(x) \cdot y}{I_z} \overset{\substack{Differenzial- \\ beziehung}}{\triangleq} \frac{-Q_y(x) \cdot y}{I_z} = -\frac{Qy}{I_z} = \frac{-QR\cos\varphi}{I_z}$$

1.3. $\tau_{x\varphi}$ bestimmen

$$\tau_{x\varphi} = -r \int \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} d\varphi = \frac{QR^2}{I_z} \int_0^{\varphi} \cos\varphi'\, d\varphi' = \frac{QR^2}{I_z} \sin\varphi$$

2. Schubfluss mittel H_z berechnen

2.1. $H_z(\varphi)$ berechnen



$$H_z(\varphi) = \eta \cdot \Delta A \approx R\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot Rt\varphi = R^2 t\varphi \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Also entweder:

$$\Delta S(\varphi) \approx R \cdot \varphi \cdot t$$
$$y'_C \approx cos\frac{\varphi}{2} \cdot R$$

oder:

$$H_z(\varphi) \approx t\int_0^{\varphi} y \cdot R d\varphi \approx R^2 t \int_0^{\varphi} \cos\varphi \cdot d\varphi$$
$$= R^2 t \sin\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\tau_{x\varphi}(\varphi) = \frac{Q \cdot R^2}{I_z} \cdot \sin\varphi}$$

Schubspannung einsetzten

$$T(x) = \frac{QR^3 t}{I_z} \cdot R \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi = \frac{2QR^4 t}{I_z}$$

mit $I_z = \frac{\pi R^3 t}{2}$

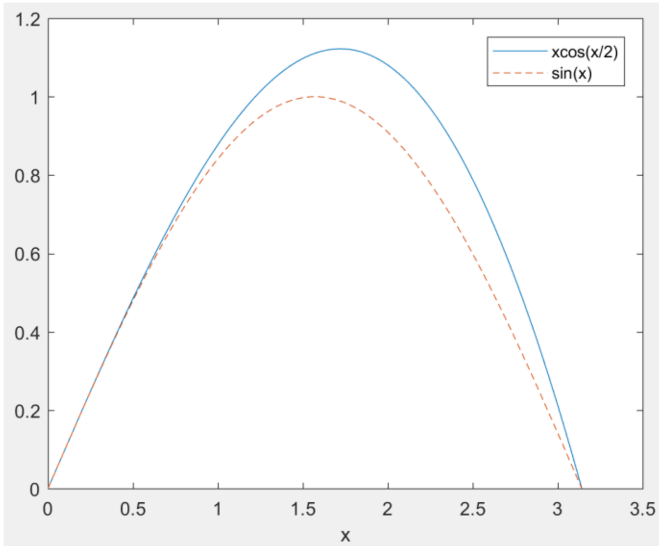
$$\underline{\underline{z_S = \frac{T}{Q} = \frac{4R}{\pi}}}$$

2.2. Schubfluss bestimmen

$$\tau_{x\varphi} = \frac{QH_z(\varphi)}{I_z} = \frac{QR^2}{I_z}\varphi\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

3. Beide $\tau_{x\varphi}$ vergleichen

Praktisch ist ja nicht daran zu zweifeln, dass $\tau_{x\varphi} = \tau_{x\varphi}$. Damit dies aber erfüllt ist, müsste $\varphi\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \approx \sin\varphi$ sein. Wenn man die zwei Funktionen auf dem Computer zeichnet, sieht man, dass es eine akzeptable Approximation ist.



4. Den Torsionsmoment berechnen

$$T = R \cdot F = R \cdot \iint \tau_{x\varphi} dA = R^2 t \int_0^\pi \tau_{x\varphi} d\varphi = \frac{QR^4 t}{I_z} \underbrace{\int_0^\pi \sin\varphi \, d\varphi}_{2} = \frac{2QR^4 t}{I_z}$$

5. Das Flächenträgheitsmoment I_z bestimmen

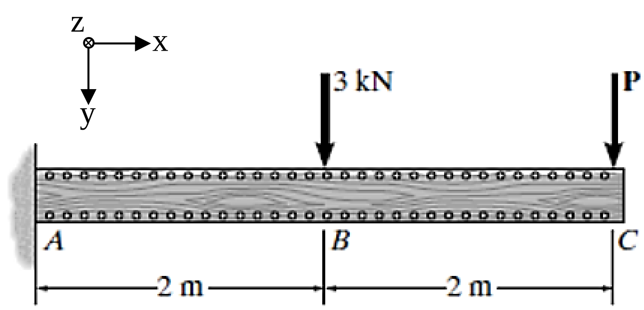
$$I_z = \frac{\pi}{8}(R^4 - (R+t)^4) = \frac{\pi}{8}(R^4 - R^4 + 4R^3 t + 6R^2 t^2 + 4Rt^3 + t^4) = \frac{\pi}{2} R^3 t$$

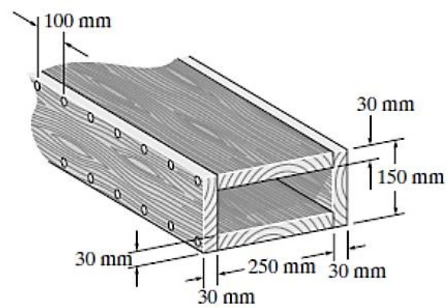
6. Den Schubmittelpunkt berechnen

$$z_S = \frac{T}{Q} = \frac{2R^4 t}{I_z} = \boxed{\frac{4R}{\pi}}$$

Wiederholungsaufgabe:

Es sei ein in A eingespannter Balken wie in der Skizze gegeben. In der Mitte wirke eine Kraft in y-Richtung mit dem Betrag 3kN. Der Balken besteht aus vier zusammengenagelten Brettern. Jeder Nagel hat einen Durchmesser von 1.5cm und kann maximal eine Schubspannung von 30MPa aushalten.

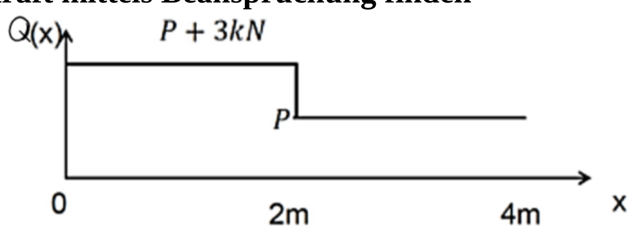




Da der Balken als Stütze dienen sollte, ist man an der maximalen Kraft P interessiert, die die Nägel aushalten würden. Berechnen Sie diese.

Lösung zu Wiederholungsaufgabe:

1. Die maximale Querkraft mittels Beanspruchung finden



Wenn man das Querkraftdiagramm zeichnet, sieht man sofort, dass

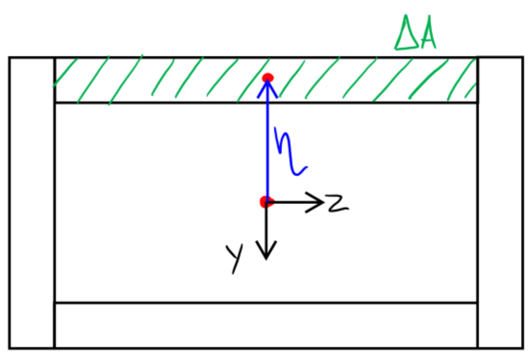
$$Q_{max} = 3kN + P$$

2. Das Flächenträgheitsmoment I_z bestimmen

$$I_z = \frac{1}{12} 310mm(150mm)^3 - \frac{1}{12} 250mm(90mm)^3 = 72 \cdot 10^6 mm^4$$

3. H_z bestimmen

Da unser Querschnitt symmetrisch ist und es oben und unten Nägel hat, reicht es, wenn wir nur den oberen Abschnitt betrachten.



$$H_z = \eta \cdot \Delta A = 60mm \cdot 30mm \cdot 250mm = 45 \cdot 10^4 mm^3$$

4. Maximale Kraft pro Balkenlänge berechnen

$$q = \frac{Q_{max} H_z}{I_z} = \frac{(3kN + P) \cdot 45 \cdot 10^4 mm^3}{72 \cdot 10^6 mm^4} = \frac{(3kN + P) \cdot 45}{72 \cdot 10^2 mm}$$

5. Maximale Kraft pro Balkenlänge, die ein Nagel aushalten würde berechnen

Maximale Kraft die ein Nagel aushalten kann:

$$F_{zul} = 30MPa \cdot \frac{\pi}{4}(15mm)^2 = 5.301kN$$

Da es oben zwei Nagelreihen hat und einen Nagel 100mm Balkenlänge aushalten muss:

$$q_{zul} = 2 \cdot \frac{5.301kN}{100mm} = 0.106 \frac{kN}{mm}$$

6. Kraft P bestimmen

$$q = q_{zul} \rightarrow \frac{(3kN + P) \cdot 45}{72 \cdot 10^2 mm} = 0.106 \frac{kN}{mm} \rightarrow \boxed{P = 13.96kN}$$