1 Elastische Dehnung 3 Punkte

Ein Zugstab aus Stahl mit kreisförmigem Querschnitt, Durchmesser d_0, und der Länge l_0 soll sich unter der Betriebslast F um die Länge Δl elastisch dehnen.

a) Wie gross müssen seine Querschnittsfläche A_0 und sein Durchmesser d_0 sein?

b) Wie gross muss die Streckgrenze R_{eH} mindestens sein, damit mit der auftretenden Spannung σ ein Sicherheitsfaktor S_F nicht unterschritten wird, dass also gilt $S_F \leq R_{eH} / \sigma$?

$l_0 = 3000mm$ $\Delta l = 2.0\,mm$

$F = 5000N$ $E - Modul = 210000N / mm^2$

$S_F = 1.8$

2 Plastische Verformung 4 Punkte

Ein stabförmiges Bauteil zeigte im Zugversuch eine Bruchdehnung von $A_{r1} = 0.19$, obwohl ein Werkstoff verwendet wurde, für den im Normversuch eine Bruchdehnung von $A_{r2} = 0.28$ angegeben war.

a) Erklären Sie die Differenz.
b) Nennen Sie eine zusätzliche Dehnungsgrösse, die anzugeben ist, damit das Resultat des Normzugversuches richtig interpretiert werden kann?
c) Welches ist der Wert dieser Grösse im vorliegenden Fall?

Gegeben
Versuchslänge Bauteil $l_{01} = 700mm$
Versuchslänge Normprobestück $l_{02} = 80mm$

3 Zugstab 5 Punkte

Im Zugversuch wurden an einer Probe der Länge $l_{0P} = 80mm$ die Gleichmassdehnung $A_{gP} = 0.250$ und die Einschnürdehnung $A_{eP} = 0.115$ ermittelt.

- Wie gross ist die gesamte plastische Dehnung bis zum Bruch (Bruchdehnung) eines Stabes der Länge $l = 0.325m$?

4 Zugversuch 5 Punkte

Im Zugversuch wurden an einer Probe der Länge $l_P = 100\,mm$ die Elastizitätsgrenze $R_{P0.01} = 500 N/mm^2$, die Gleichmassdehnung $A_g = 0.3$ und die anschliessende Einschnürdehnung $A_e = 0.1$ ermittelt.

a) Wie gross sind die gesamte plastische Verlängerung bis zum Bruch und die gesamte plastische Dehnung bis zum Bruch eines Stabes der Länge $l = 1.5m$?

b) Wie gross ist die Zugfestigkeit, wenn das Materialverhalten näherungsweise durch die Ludwikgleichung mit den Parametern $n = 0.4$ und $C = 450 N/mm^2$ beschrieben werden kann?

5 Eigenschaften der Werkstoffe

a) Sie wollen ein Objekt der Masse M an einem Zugstab der Länge L aufhängen. Zur Verfügung stehen 2 Stähle
   - Dimensionieren Sie Stäbe für jeden der beiden Werkstoffe auf die Proportionalitätsgrenze bzw. Streckgrenze.

b) Um Schwingungen zu vermeiden, möchten sie die Aufhängung möglichst steif gestalten.
   - Geben Sie die statischen Dehnungen der Stäbe an. Welche Variante wählen Sie?

c) Als Ausnahmezustand tritt eine 1.3-fache Überlast auf.
   - Wie gross sind die elastischen und plastischen Dehnungen bei den beiden Stäben?

Gegeben

Masse	M	=	300 kg
Länge	L	=	10 m

Stahl 1

R_m = 1200 N/mm^2

$R_{p0.01}$ = 900 N/mm^2

Koeffizienten der Ludwik-Gleichung:

C = 2650 N/mm2

n = 1.2

Elastizitätsmodul $213 \cdot 10^3$ N/mm^2

Stahl 2

R_m = 360 N/mm^2

R_e = 235 N/mm^2

A_g = 25 %

Elastizitätsmodul $213 \cdot 10^3$ N/mm^2

1 Elastische Dehnung 3 Punkte

Ein Zugstab aus Stahl mit kreisförmigem Querschnitt, Durchmesser d_0, und der Länge l_0 soll sich unter der Betriebslast F um die Länge Δl elastisch dehnen.

a) Wie gross müssen seine Querschnittsfläche A_0 und sein Durchmesser d_0 sein?

b) Wie gross muss die Streckgrenze R_{eH} mindestens sein, damit mit der auftretenden Spannung σ ein Sicherheitsfaktor S_F nicht unterschritten wird, dass also gilt $S_F \leq R_{eH} / \sigma$?

$l_0 = 3000mm$ $\Delta l = 2.0\,mm$

$F = 5000N$ $E - Modul = 210000N/mm^2$

$S_F = 1.8$

Lösung

a) Querschnittsfläche A_0

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0} \text{ und } \sigma = \frac{F}{A_0} \text{ gleichsetzen:}$$

$$E \cdot \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{F}{A_0} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{A_0}} = \frac{F \cdot l_0}{E \cdot \Delta l} = \frac{5000N \cdot 3000mm}{210000N/mm^2 \cdot 2.0mm} = \underline{\underline{35.7mm^2}}$$

Formel {0.5}0.5 Wert {0.5}1

Durchmesser d_0

$$A_0 = d_0^2 \cdot \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{d_0}} = \sqrt{\frac{4 \cdot A_0}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 35.7mm^2}{3.1416}} = \underline{\underline{6.74mm}}$$

Formel {0.5}1.5 Wert {0.5}2

b) Aus $S_F \leq R_{eH} / \sigma$ *folgt:*

$$\underline{\underline{R_{eH}}} \geq R_{eH\min} = S_F \cdot \sigma = S_F \cdot \frac{F}{A_0} = 1.8 \cdot \frac{5000N}{35.7mm^2} = \underline{\underline{252N/mm^2}}$$

Formel {0.5}2.5 Wert {0.5}3

2 Plastische Verformung 4 Punkte

Ein stabförmiges Bauteil zeigte im Zugversuch eine Bruchdehnung von $A_{r1} = 0.19$, obwohl ein Werkstoff verwendet wurde, für den im Normversuch eine Bruchdehnung von $A_{r2} = 0.28$ angegeben war.

a) Erklären Sie die Differenz.
b) Nennen Sie eine zusätzliche Dehnungsgrösse, die anzugeben ist, damit das Resultat des Normzugversuches richtig interpretiert werden kann?
c) Welches ist der Wert dieser Grösse im vorliegenden Fall?

Gegeben
Versuchslänge Bauteil $l_{01} = 700mm$
Versuchslänge Normprobestück $l_{02} = 80mm$

Lösung

a) *Die Einschnürverlängerung Δl_e ist unabhängig von der Werkstück-/Probelänge gleich gross. Bezogen auf die Länge ist der Dehnungsanteil bei der kurzen Probe grösser als bei der langen.* {1}$_1$

b) *Zusätzlich anzugeben ist die Gleichmassdehnung A_g (oder Einschnürdehnung A_{e2})* {1}$_2$

c) *Wert von A_g (oder A_{e2}) : Es gilt mit $\Delta l_{e1} = \Delta l_{e2} = \Delta l_e$ und $A_{g1} = A_{g2} = A_g$*

$$\Delta l_{e1} + \Delta l_{g1} = \Delta l_{r1} \Rightarrow \Delta l_e + A_g \cdot l_{01} = A_{r1} \cdot l_{01}$$

$$\Delta l_{e2} + \Delta l_{g2} = \Delta l_{r2} \Rightarrow \Delta l_e + A_g \cdot l_{02} = A_{r2} \cdot l_{02}$$

Subtraktion ergibt: $$A_g = \frac{A_{r1} \cdot l_{01} - A_{r2} \cdot l_{02}}{l_{01} - l_{02}} = \frac{0.19 \cdot 700mm - 0.28 \cdot 80mm}{700mm - 80mm} = 0.178 = 0.18$$

Formeln {1.5}$_{3.5}$ Wert {0.5}$_4$

(Variante Einschnürdehnung

$$\Delta l_{e1} + \Delta l_{g1} = \Delta l_{r1} \Rightarrow \frac{\Delta l_e}{l_{01}} + A_g \cdot = A_{r1}$$

$$\Delta l_{e2} + \Delta l_{g2} = \Delta l_{r2} \Rightarrow \frac{\Delta l_e}{l_{02}} + A_g \cdot = A_{r2}$$

Subtraktion ergibt: $$A_{e2} = \frac{\Delta l_e}{l_{02}} = \frac{A_{r1} - A_{r2}}{\frac{l_{02}}{l_{01}} - 1} = \frac{0.19 - 0.28}{\frac{80mm}{700mm} - 1} = 0.102 = 0.10$$ *)*

(Variante: Formeln {1.5}$_{3.5}$ Wert {0.5}$_4$)

3 Zugstab 5 Punkte

Im Zugversuch wurden an einer Probe der Länge $l_{0P} = 80mm$ die Gleichmassdehnung $A_{gP} = 0.250$ und die Einschnürdehnung $A_{eP} = 0.115$ ermittelt.

- Wie gross ist die gesamte plastische Dehnung bis zum Bruch (Bruchdehnung) eines Stabes der Länge $l = 0.325m$?

Lösung
Einschnürverlängerungen und Gleichmassdehnungen sind je gleich gross beim Stab wie bei der Probe.

Aussage, auch implizit $\{1\}_1$

Einschnürdehnung des Stabes

Formel $\{1\}_2$ Wert $\{1\}_3$

$$A_e = \frac{\Delta l_e}{l_0} = \frac{A_{eP} \cdot l_{0P}}{l_0} = \frac{0.115 \cdot 80mm}{325mm} = 0.0283$$

Bruchdehnung des Stabes $A_r = A_g + A_e = 0.250 + 0.028 = 0.278$ Formel $\{1\}_4$ Wert $\{1\}_5$

4 Zugversuch 5 Punkte

Im Zugversuch wurden an einer Probe der Länge $l_P = 100\,mm$ die Elastizitätsgrenze $R_{P0.01} = 500N/mm^2$, die Gleichmassdehnung $A_g = 0.3$ und die anschliessende Einschnürdehnung $A_e = 0.1$ ermittelt.

a) Wie gross sind die gesamte plastische Verlängerung bis zum Bruch und die gesamte plastische Dehnung bis zum Bruch eines Stabes der Länge $l = 1.5m$?

b) Wie gross ist die Zugfestigkeit, wenn das Materialverhalten näherungsweise durch die Ludwikgleichung mit den Parametern n=0.4 und C= 450 N/mm^2 beschrieben werden kann?

Lösung

a) Gesamte plastische Dehnung bis zum Bruch und Verlängerung

Die Einschnürverlängerung ist unabhängig von der Proben-/Bauteillänge:

$\Delta l_e = \Delta l_{eP} = l_P \cdot A_e = 0.1m \cdot 0.1 = 0.01m$ *Formel {0.5}$_{0.5}$ Wert {0.5}$_1$*

Die Gleichmassdehnung ist unabhängig von der Proben-/Bauteillänge.

Gleichmassverlängerung $\Delta l_g = l \cdot A_g = 1.5m \cdot 0.3 = 0.45m$ *Formel {0.5}$_{1.5}$ Wert {0.5}$_2$*

Gesamte plastische Verlängerung $\Delta l = \Delta l_e + \Delta l_g = 0.01m + 0.45m = 0.46m$

Formel {0.25}$_{2.25}$ Wert {0.25}$_{2.5}$

Gesamte plastische Dehnung $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0.46m}{1.5m} = 0.307$ *Formel {0.5}$_3$ Wert {0.5}$_{3.5}$*

b) Zugfestigkeit:

$R_m = R_{P0.01} + C \cdot \varepsilon^n = 500N/mm^2 + 450N/mm^2 \cdot 0.3^{0.4} = 500 + 278 = 778\,N/mm^2$

Formel {1}$_{4.5}$ Wert {0.5}$_5$

5 Eigenschaften der Werkstoffe

a) Sie wollen ein Objekt der Masse M an einem Zugstab der Länge L aufhängen. Zur Verfügung stehen 2 Stähle
   - Dimensionieren Sie Stäbe für jeden der beiden Werkstoffe auf die Proportionalitätsgrenze bzw. Streckgrenze.

b) Um Schwingungen zu vermeiden, möchten sie die Aufhängung möglichst steif gestalten.
   - Geben Sie die statischen Dehnungen der Stäbe an. Welche Variante wählen Sie?

c) Als Ausnahmezustand tritt eine 1.3-fache Überlast auf.
   - Wie gross sind die elastischen und plastischen Dehnungen bei den beiden Stäben?

Gegeben
Masse M = 300 kg
Länge L = 10 m

Stahl 1
R_m = 1200 N/mm^2
$R_{p0.01}$ = 900 N/mm^2

Koeffizienten der Ludwik-Gleichung:
C = 2650 N/mm2
n = 1.2
Elastizitätsmodul 213$\cdot$10^3 N/mm^2

Stahl 2
R_m = 360 N/mm^2
R_e = 235 N/mm^2

A_g = 25 %

Elastizitätsmodul 213$\cdot$10^3 N/mm^2

Lösung:

a) *Gesucht sind die Durchmesser D_1, D_2 der Stäbe derart, dass die unter der Last des Objektes entstehende Zugspannung gerade der Proportionalitätsgrenze bzw. der Streckgrenze entspricht:*

Zugkraft: $F = m \cdot g = 300kg \cdot 9.81\frac{m}{s^2} = 2943\,N \approx 3000N$

Zugspannung in einem Stab (A = Querschnittsfläche):

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{D^2 \cdot \frac{\pi}{4}} \rightarrow D = \sqrt{\frac{F}{\sigma} \cdot \frac{4}{\pi}}$$

$$D_1 = \sqrt{\frac{F}{\sigma} \cdot \frac{4}{\pi}} = \sqrt{\frac{F}{R_{p0.01}} \cdot \frac{4}{\pi}} = \sqrt{\frac{2943}{900} \cdot \frac{4}{\pi}} = 2.04\,mm \; \left(2.06\; für\; 3000N\right)$$

$$D_2 = \sqrt{\frac{F}{\sigma} \cdot \frac{4}{\pi}} = \sqrt{\frac{F}{R_e} \cdot \frac{4}{\pi}} = \sqrt{\frac{2943}{235} \cdot \frac{4}{\pi}} = 3.99\; mm \; \left(4.0316\;\; für\; 3000N\right)$$

b) *Steif heisst, wenig Verformung unter Belastung. Dehnung eines Zugstabes (E=Elastizitätsmodul):*

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma}{E} = \frac{R_{p0.01}}{E} = \frac{900\frac{N}{mm^2}}{213 \cdot 10^3 \frac{N}{mm^2}} = 0.004225$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma}{E} = \frac{R_e}{E} = \frac{235\frac{N}{mm^2}}{213 \cdot 10^3 \frac{N}{mm^2}} = 0.001103$$

Die Dehnung des Stabes 2 ist kleiner, wir wählen Stab 2, bestehend aus Stahl 2.

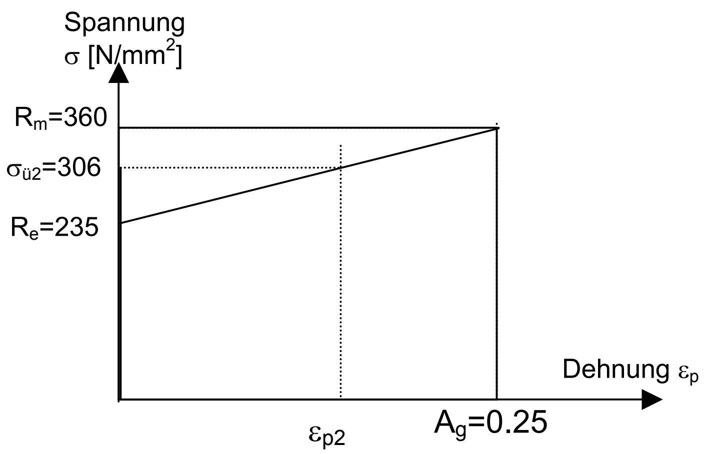
c) 1.3-fache Überlast:
Die Spannungen und die elastischen Dehnungen wachsen auf den 1.3-fachen Wert an:
elastische Dehnung Stab1: $\varepsilon_{elkü1} = 1.3 \cdot \varepsilon_1 = 1.3 \cdot 0.004225 = 0.005493$
elastische Dehnung Stab2: $\varepsilon_{elkü2} = 1.3 \cdot \varepsilon_2 = 1.3 \cdot 0.001103 = 0.001434$

Der die Proportionalitätsgrenze bzw. Streckgrenze übersteigende Spannungsanteil beträgt:
Stab 1: $\sigma - R_{p0.01} = 0.3 \cdot 900 \frac{N}{mm^2} = 270 \frac{N}{mm^2}$
Stab 2: $\sigma_{ü2} - R_e = 1.3 \cdot 235 \frac{N}{mm^2} - 235 \frac{N}{mm^2} = 306 - 235 = 71 \frac{N}{mm^2}$
Plastische Dehnungen:
Stab 1: Ludwik-Gleichung: $\sigma - R_{p0.01} = C \cdot \varepsilon_p{}^n$

Die Ludwikgleichung gibt das Verhalten eines Materials ohne Lüdersdehnung im plastischen Bereich wieder. Daraus lässt sich die elastische Dehnung ausrechnen:

Plastische Dehnung Stab1: $$\varepsilon_p = \left(\frac{\sigma - R_{p0.01}}{C}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{270}{2650}\right)^{\frac{1}{1.2}} = 0.149$$

Plastische Dehnung Stab 2:
Weil für Stahl 2 nur die Gleichmassdehnung A_g bei der Zugfestigkeit R_m bekannt ist, wird linear interpoliert:



$$\frac{\varepsilon_{p2}}{\sigma_{ü2} - R_e} = \frac{A_g}{R_m - R_e} \qquad \rightarrow \varepsilon_{p2} = A_g \cdot \frac{(\sigma_{ü2} - R_e)}{R_m - R_e} = 0.25 \cdot \frac{(306 - 235)}{360 - 235} = 0.142$$

(Hinweis: Eine bessere Approximation der Spannungs-Dehnungskurve von Stahl 1 wird mit den Parametern der Ludwik-Gleichung von C=1000 N/mm2 und n=0.5 erreicht)