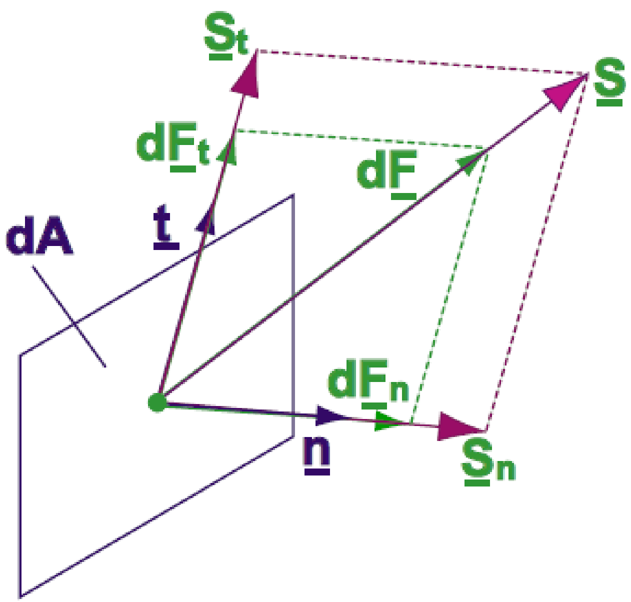
Spannungen und Dehnungen im Kontinuum

Durch Freischneiden werden innere Kraftvektoren freigelegt

Dividiert durch Flächenelement ergibt sich eine Spannung

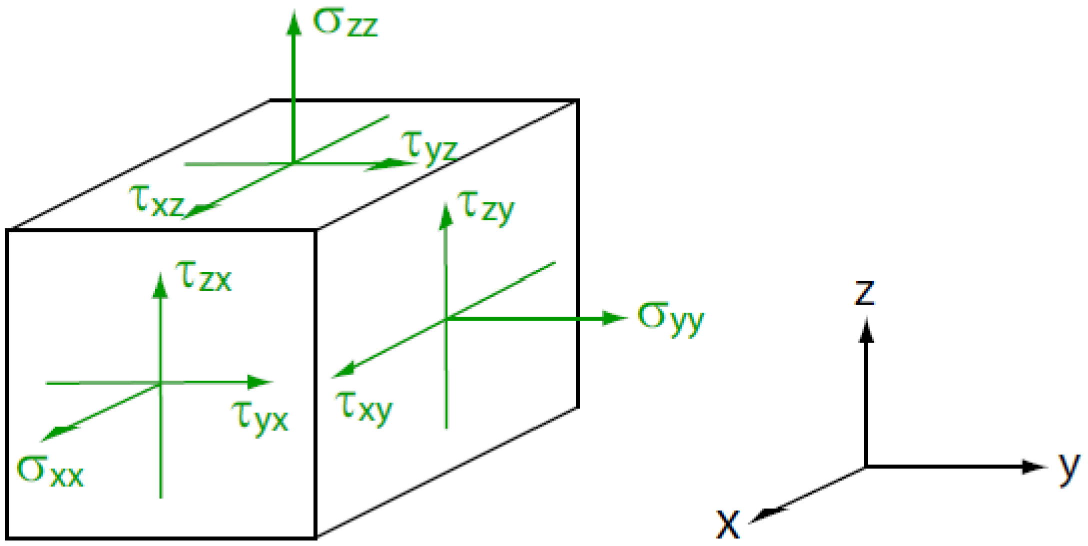
In Anteile zerlegen: Normal-Rtg und Tangential-Rtg



Spannungen und Dehnungen im Kontinuum

Freischneiden senkrecht zu jeder Achse: $\underline{S}_x$, $\underline{S}_y$, $\underline{S}_z$

Aufteilen in eine Normalspannungskomponente und zwei Schubspannungskomponenten



Spannungen und Dehnungen im Kontinuum

Zusammenfassen im Spannungstensor $\underline{\underline{T}}$

Symmetrischer Tensor: Sechs Informationen benötigt

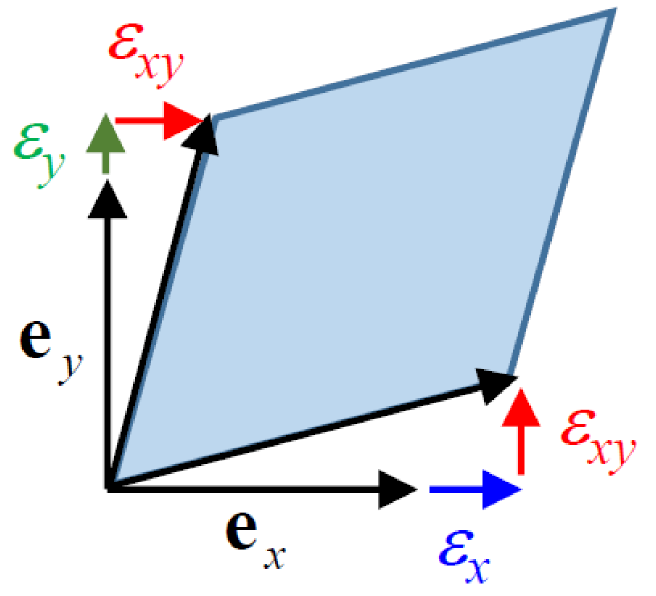
$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\underline{S} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{n}$$
$$\sigma = \underline{S} \cdot \underline{n}$$
$$\underline{\tau} = \underline{S} - \sigma \cdot \underline{n}$$

σ_{xx} : Normalspannung in x-Richtung am x-Flächenelement

τ_{zy} : Schubspannung in z-Richtung am y-Flächenelement

Dehnungstensor $\underline{\underline{E}}$



$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = 2\varepsilon_{xy}$$

In 2D: $\left[\underline{\underline{E}}\right]_{xy} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix}$

In 3D: Definition über Verschiebungen (Mechanik II...)

$$\left\{\underline{\underline{E}}\right\}_{xyz} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_{yy} & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{Bmatrix}$$

ACHTUNG: Das Hookesche Gesetz $\sigma = E \cdot \varepsilon$ gilt NUR im einachsigen Zustand (=reiner Zug/Druck)!
Im 3D-Fall mit den Tensoren? Siehe nächste Folie (oder in Mech II 😀)

Wuf Übung 7 (2 Stunden) vs. Mechanik II (2 Monate)...

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\mu} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.9 Dehnung und Scherung

Gegeben ist eine quadratische Platte A mit der Kantenlänge b. Sie wird einer Belastung unterworfen, welche die Platte in die Position A′ verschiebt.

a) Zeichnen Sie die Verschiebungsvektoren $\vec{u}$ für die Eckpunkte und einen beliebigen Punkt $P(x, y)$ in die Abb. 5.2 ein.

b) Geben Sie die obigen Verschiebungsvektoren $\vec{u}$ als Funktionen von x und y an.

c) Berechnen Sie Dehnungen $\varepsilon_{..}$ und Scherungen $\gamma_{..}$ aus diesen Verschiebungen.

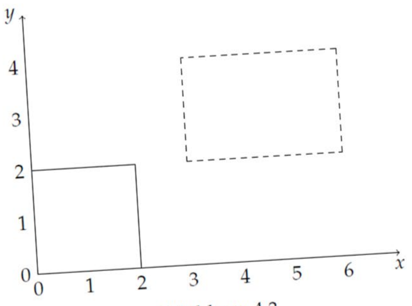


Abbildung 4.3

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

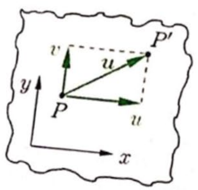
Mechanik II: Deformierbare Körper
für D-BAUG, D-MAVT

Prof. D. Mohr

Haus- & Schnellübung 4
Verzerrungen

Aufgabe H1

Für eine Scheibe wurde aus Messungen das folgende ebene Verschiebungsfeld ermittelt:



$$\underline{u}(x,y) = \begin{pmatrix} u_0 + 7 \cdot 10^{-3}x + 4 \cdot 10^{-3}y \\ v_0 + 2 \cdot 10^{-3}x - 1 \cdot 10^{-3}y \end{pmatrix}$$

a) Man bestimme den Verzerrungstensor

Umrechnung Spannung-Dehnung

Allgemein: Kompliziert (Mechanik II)

1.3.1 Elastisches Verhalten im einachsigen Zustand:

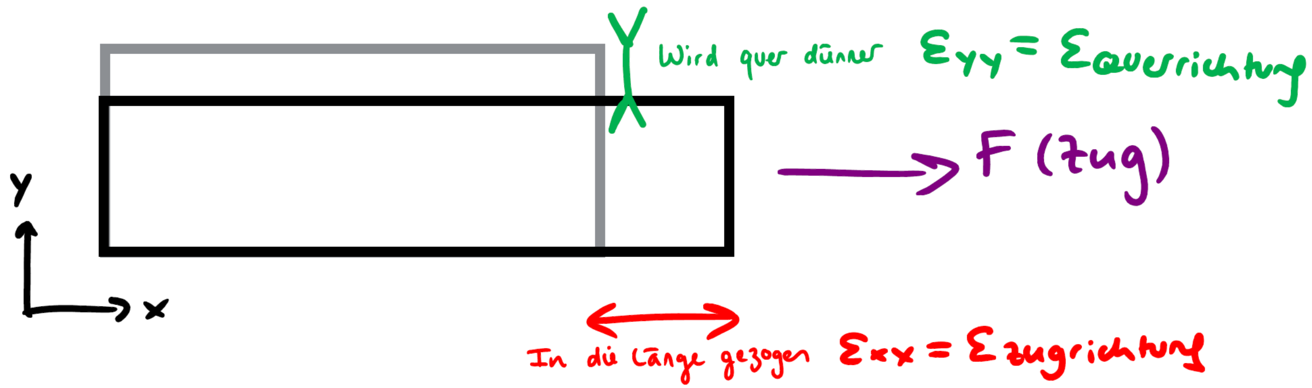
$\sigma = E \cdot \varepsilon$ $\quad\quad$ $\tau = G \cdot \gamma$ $\quad\quad$ mit E (Elastizitätsmodul) und G (Schubmodul): $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

1.3.2 Querkontraktion (Dehnungen senkrecht zur Zugrichtung):

$$-\nu \cdot \varepsilon_{Zugrichtung} = \varepsilon_{Querrichtung}$$

mit $\nu < 0{,}5$
(Querkontraktionszahl/Poissonzahl):

$$\nu = \frac{-\text{Querkontraktion}}{\text{Längsdehnung}}$$

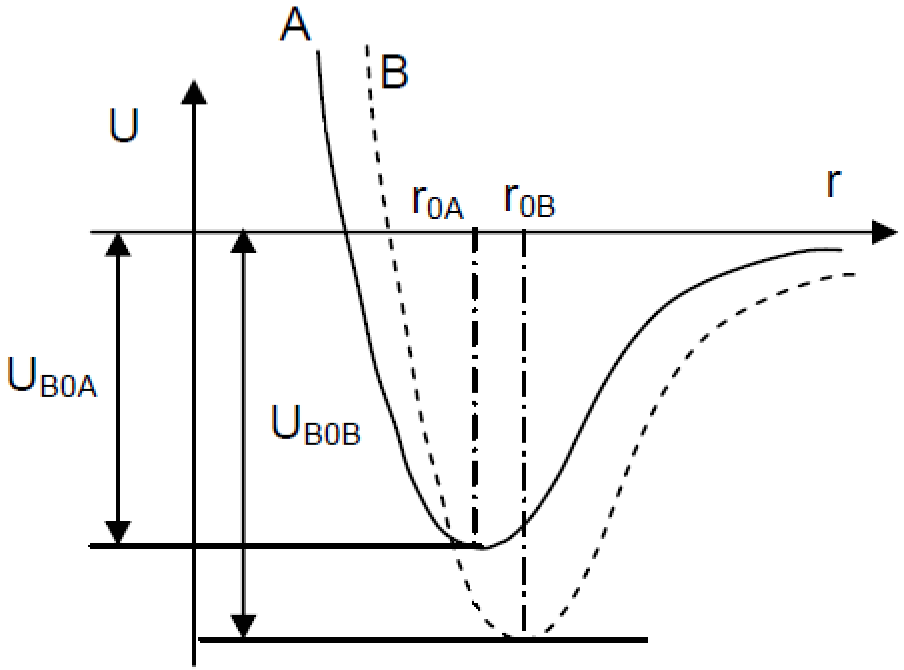


Atomare Beschreibung des elastischen Verhaltens

Elastische Dehnung: Zeitweilige Entfernung der Atome aus ihrer Ruhelage

Gleichgewicht: Atome auf Potentialminimum

- Tiefe: Bindungsenergie
- Lage: Gleichgewichtsabstand

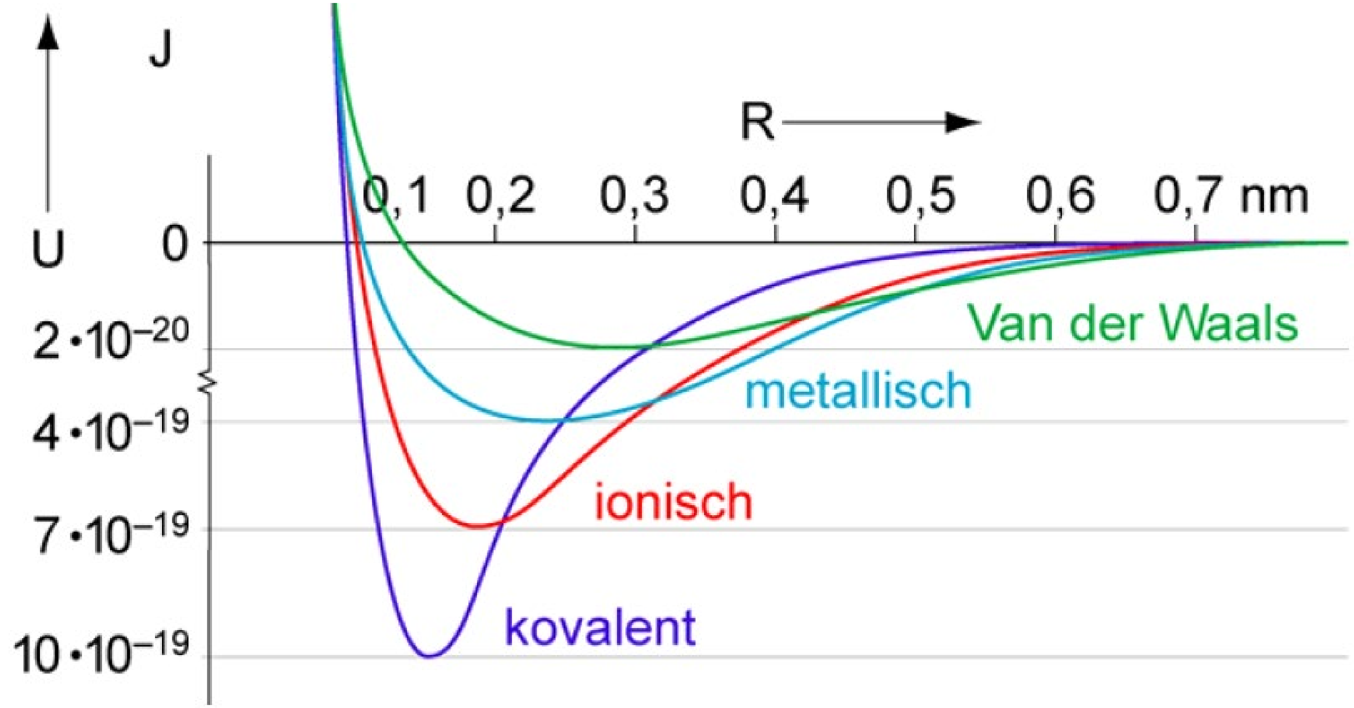


Atomare Beschreibung des elastischen Verhaltens

Grosser Gleichgewichtsabstand r_0 = grosse Gitterkonst.

Grosse Bindungsenergie U_0 = hoher Schmelzpunkt T_S

Kleiner Krümmungsradius = hoher E-Modul

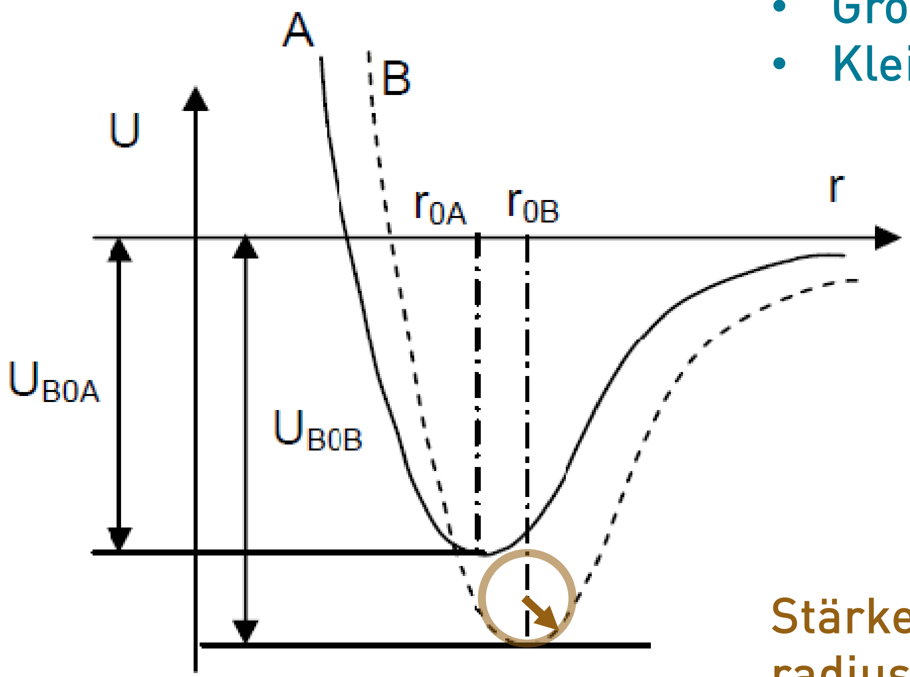


Eigenschaften der Potentialkurven

Betragsmässig grössere Bindungsenergie U

(hier: $|U_B| > |U_A|$)

- Höhere Schmelztemperatur T_S
- Höhere Aktivierungsenergie Q *(mehr Energie nötig, um Bindungen zu lösen)*
- Kleinere Wärmeausdehnung γ *(stärkere therm. Kräfte nötig, um Gleichgewicht zu stören)*



Kleinerer Bindungsradius r (hier: $r_A < r_B$)

- Grösserer E-Modul
- Kleinere Gitterkonstante a_0

Asymmetrischer Potentialverlauf

- Thermische Dehnung
- Anderes Verhalten bei Zug und Druck

Stärkerer (=kleinerer) Krümmungs-radius κ

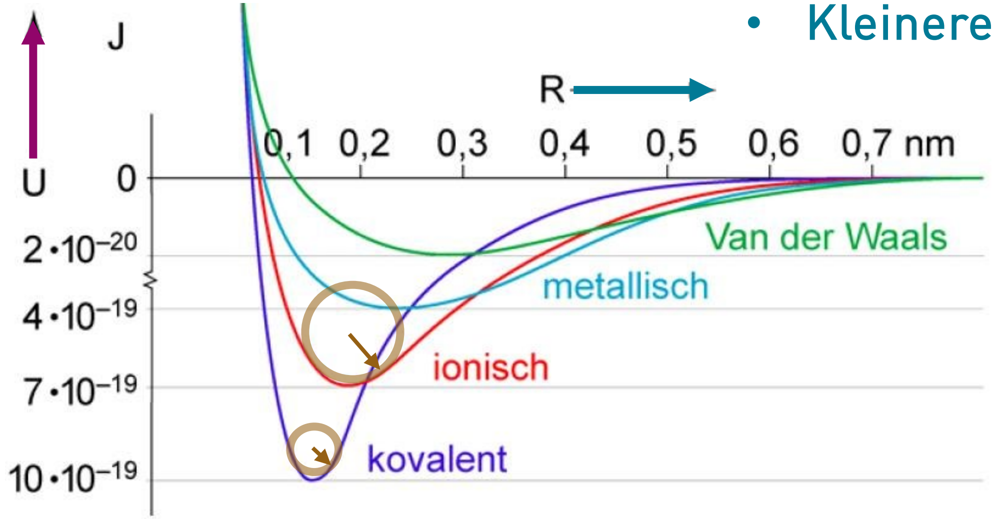
- Grösserer E-Modul

Eigenschaften der Potentialkurven

Betragsmässig grössere Bindungsenergie U

(hier: $|U_B| > |U_A|$)

- Höhere Schmelztemperatur T_S
- Höhere Aktivierungsenergie Q *(mehr Energie nötig, um Bindungen zu lösen)*
- Kleinere Wärmeausdehnung γ *(stärkere therm. Kräfte nötig, um Gleichgewicht zu stören)*



Kleinerer Bindungsradius r (hier: $r_A < r_B$)

- Grösserer E-Modul
- Kleinere Gitterkonstante a_0

Asymmetrischer Potentialverlauf

- Thermische Dehnung
- Anderes Verhalten bei Zug und Druck

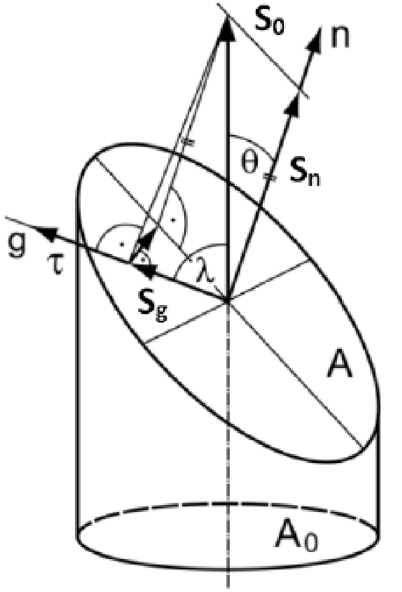
Stärkerer (=kleinerer) Krümmungs-radius κ

- Grösserer E-Modul

Schmid'sches Schubspannungsgesetz

Lastfall: Einachsige reine Zug- oder Druckbeanspruchung

Was wird berechnet: Wie gross sind die Schub-spannungen an einem schiefen Flächenelement in einer bestimmten Richtung g?



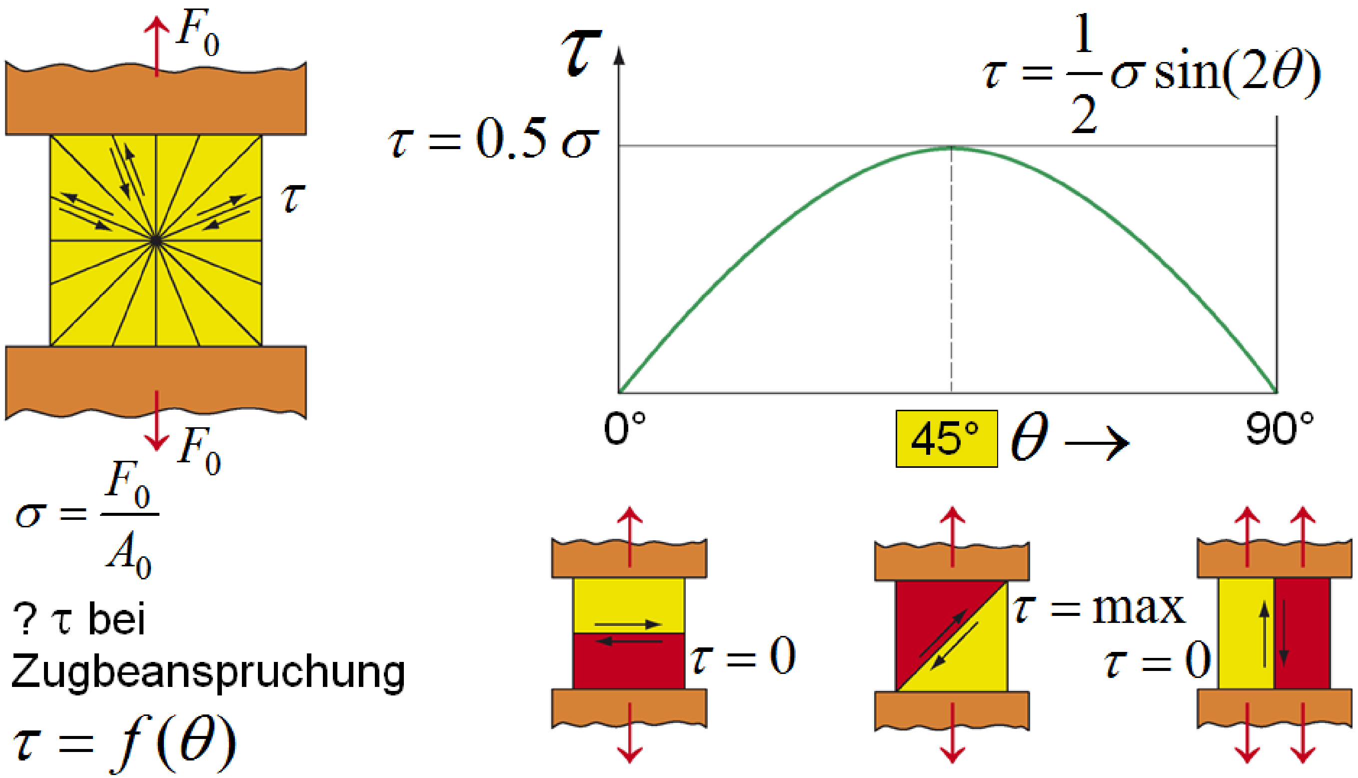
$$\tau = \sigma \cdot cos(\lambda) \cdot cos(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{\underline{n} \cdot \underline{S}_0}{|\underline{n}| \cdot |\underline{S}_0|}$$

$$\cos(\lambda) = \frac{\underline{g} \cdot \underline{S}_0}{\left|\underline{g}\right| \cdot |\underline{S}_0|}$$

$\underline{S}_0$:	Richtungsvektor der Spannung
$\underline{n}$:	Flächennormale
$\underline{g}$:	Richtungsvektor
θ:	Winkel zwischen $\underline{S}_0$ & $\underline{n}$
λ:	Winkel zwischen $\underline{S}_0$ & $\underline{g}$

Maximale Schubspannung bei einachsigem Zug



$\sigma = \frac{F_0}{A_0}$

? τ bei Zugbeanspruchung

$\tau = f(\theta)$

Grösste Schubspannungen im Zugstab unter 45° zur Zugrichtung

Schmid'sches Schubspannungsgesetz

Gleitsystem: Gleitebene + Gleitrichtung

Wenn in einem Gleitsystem die Schubspannung einen kritischen Wert erreicht, werden Versetzungen in Bewegung gesetzt

Es werden bevorzugt Gleitsysteme aktiviert, in denen die nach dem Schmidschen Schubspannungsgesetz berechneten Schubspannungen am grössten sind

- Wichtig: Der Spannungstensor liefert die gleichen Informationen

Superpositionsprinzip

Mehrere einachsige Spannungszustände lassen sich überlagern:

$$\tau = \sum_i \sigma_i \cdot \cos \lambda_i \cdot \cos \theta_i$$