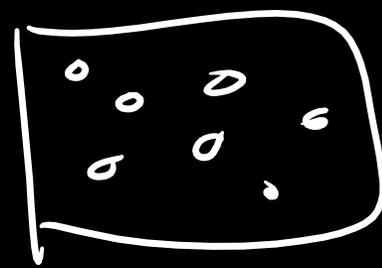
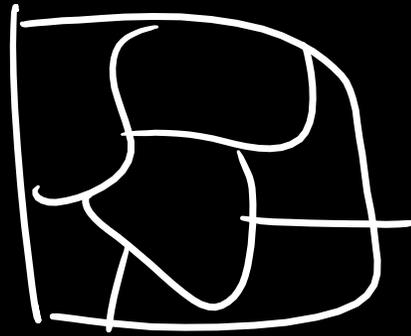


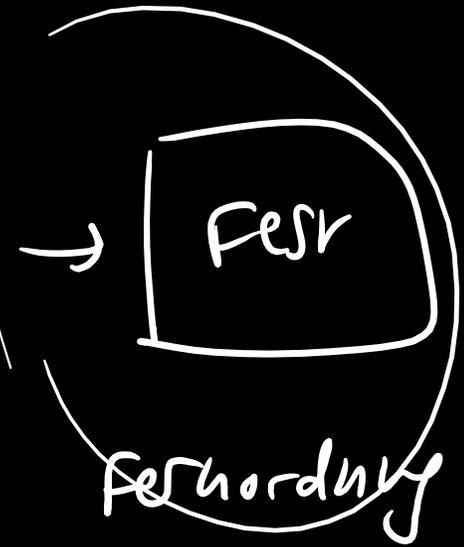
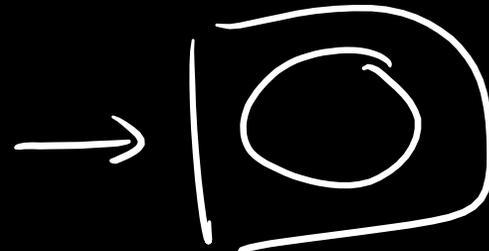
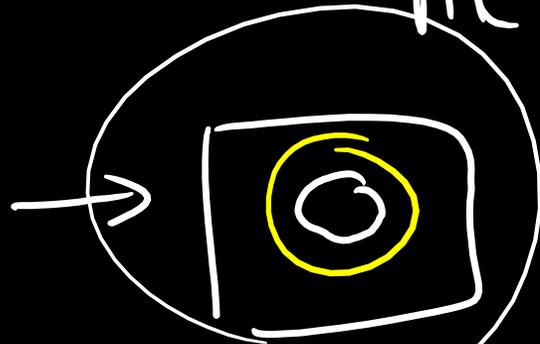
letztes Mal



flüssig

fest

MK



keim.

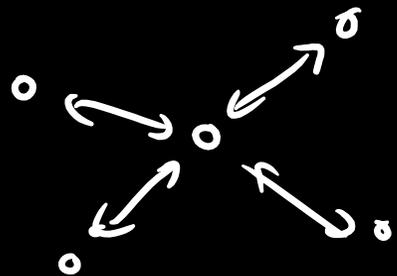
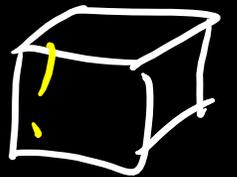
festordnung

Nur Nahordnung

Entstehung folgt wieder

aus Min freien Enthalpie!

ΔG minimieren!



Allgemeines Erstarrung

Werkstoffeigenschaften werden durch Erstarrungs-vorgang beeinflusst

→ Charakteristisches Gefüge

Erstarrung: Atome gehen von Nahordnung in Fern-ordnung über

2 Phasen: Keimbildung und Wachstum

1. Phase: Keimbildung

Umwandlung Schmelze: Minimierung freie Enthalpie

Neuer Keim = Neue Oberfläche → Energieaufwand

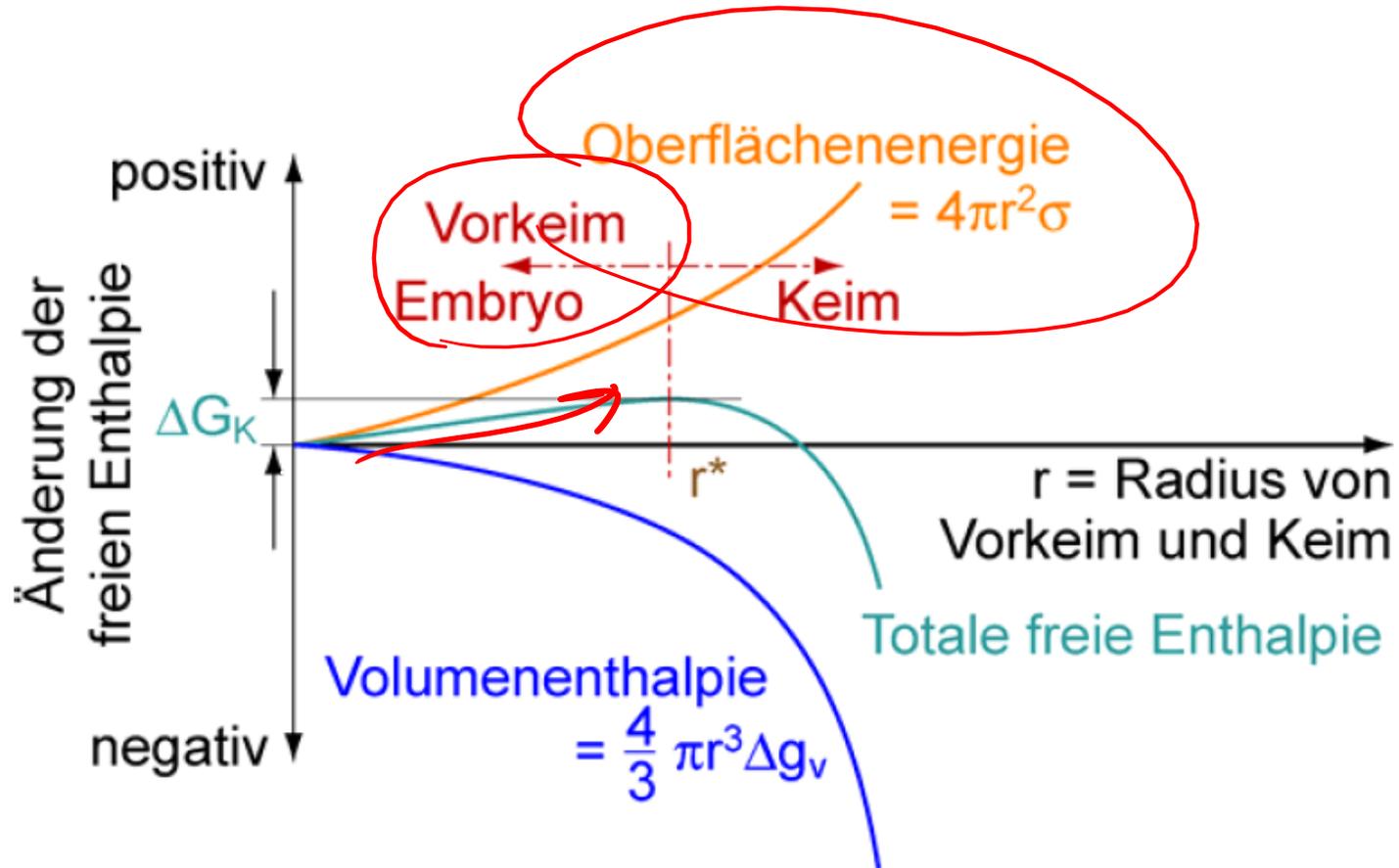
Entstehendes Volumen = Energiegewinn

Kritischer Radius: Volumenenergie überwiegt

Homogene Keimbildung: Keimbildung durch ausreichend grosse Unterkühlung

Heterogene Keimbildung: Keimbildung an Verunreinigung oder Behälterwänden
(schon vorhandene Oberfläche → geringere Unterkühlung)

1. Phase: Keimbildung



2. Phase: Wachstum

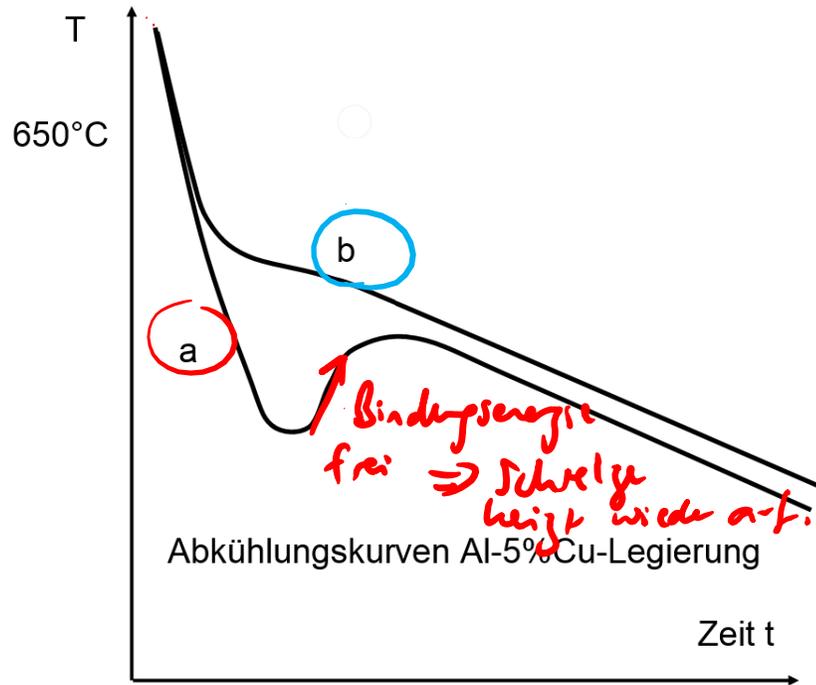
Wachstumsvorgang hängt vom Abtransport der freigesetzten Wärme ab

Grundidee: Erstarrende Bereiche setzen Energie frei, die sie beim Schmelzvorgang erhalten haben

Energie hebt Temperatur an und bremst Erstarrungsvorgang

ETH zürich 4.9 Kornfeinung

Eine Aluminiumlegierung mit 5% Cu erstarrt bei gleichen Abkühlungsbedingungen mit unterschiedlichen Temperatur-Zeit-Kurven (a) und (b). Welche der beiden Schmelzen wurde mit heterogenen Keimbildungspartikeln (Kornfeiner) ~~behandelt~~? Begründen Sie ihr Urteil.



a) homogene Keimbildung durch Unterkühlung.

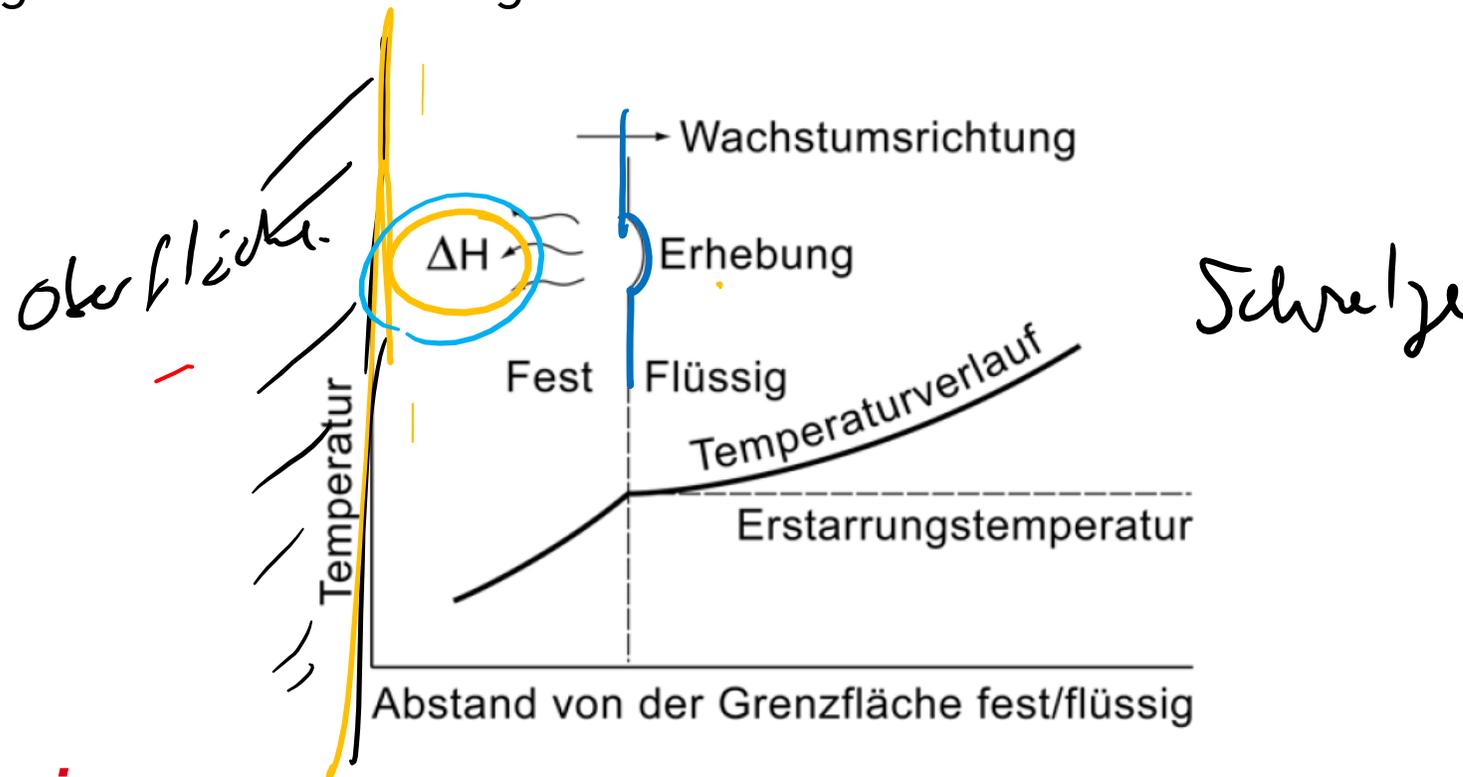
b) mit Kornfeiner behandelt

stellen Oberfläche bereit für het. Keimbildung.

Planares Wachstum

Erstarrungsfront verschiebt sich planar

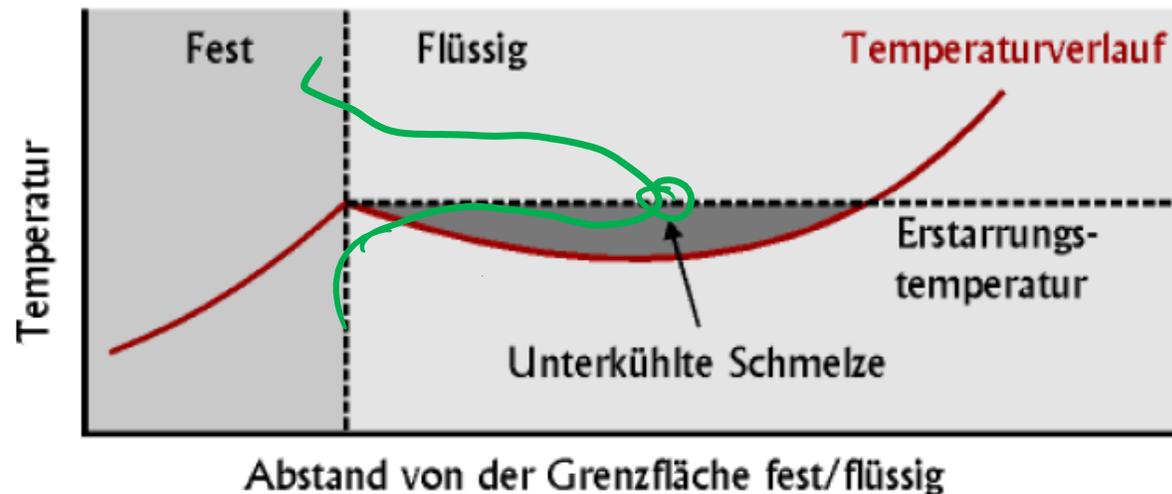
Ausbildende Erhebung würde in Bereich höherer Temperatur kommen und Erstarrung käme zum Erliegen → Schmelzwärme verstärkt Effekt



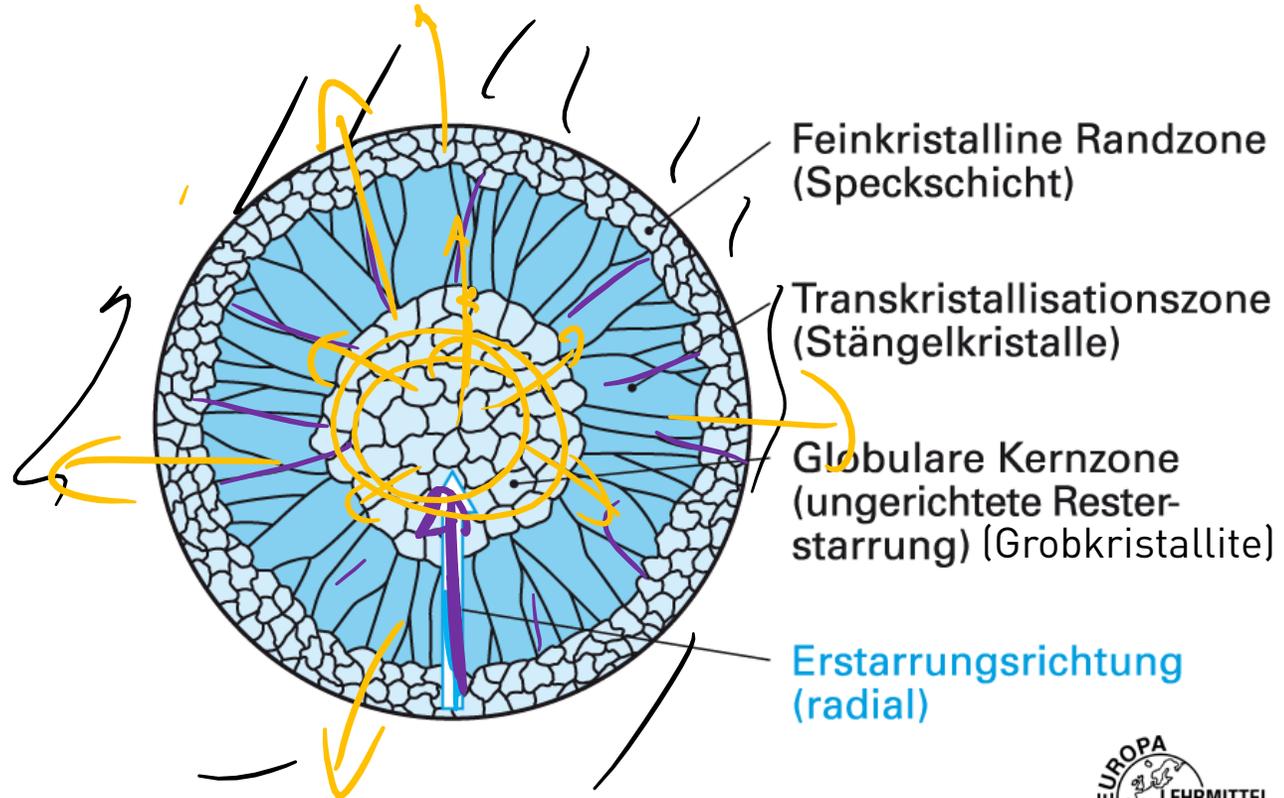
Dendritisches Wachstum



Schmelze unterkühlt, bevor Erstarrung einsetzt
 Erhebungen auf Grenzfläche wachsen in unterkühlte Bereiche hinein
 Beschleunigung des Wachstums: Tannenbaumartige Dendriten resultieren



Erstarrungszonen



Erstarrungsfehler

Seigerung: Konzentrationsunterschiede, die beim Erstarren der Schmelze auftreten

Resultat: Inhomogenes Gefüge

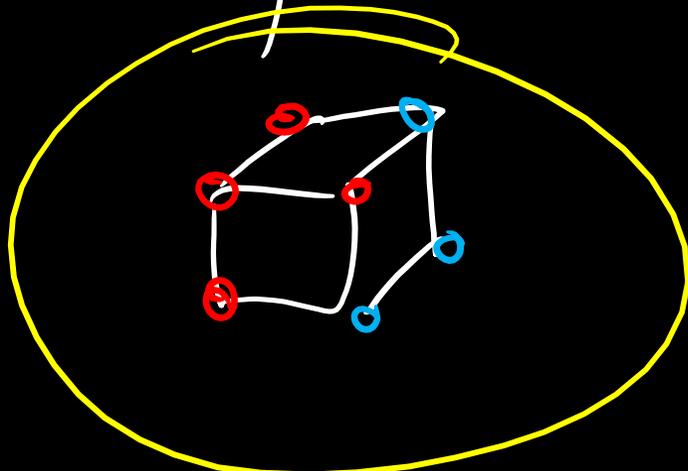
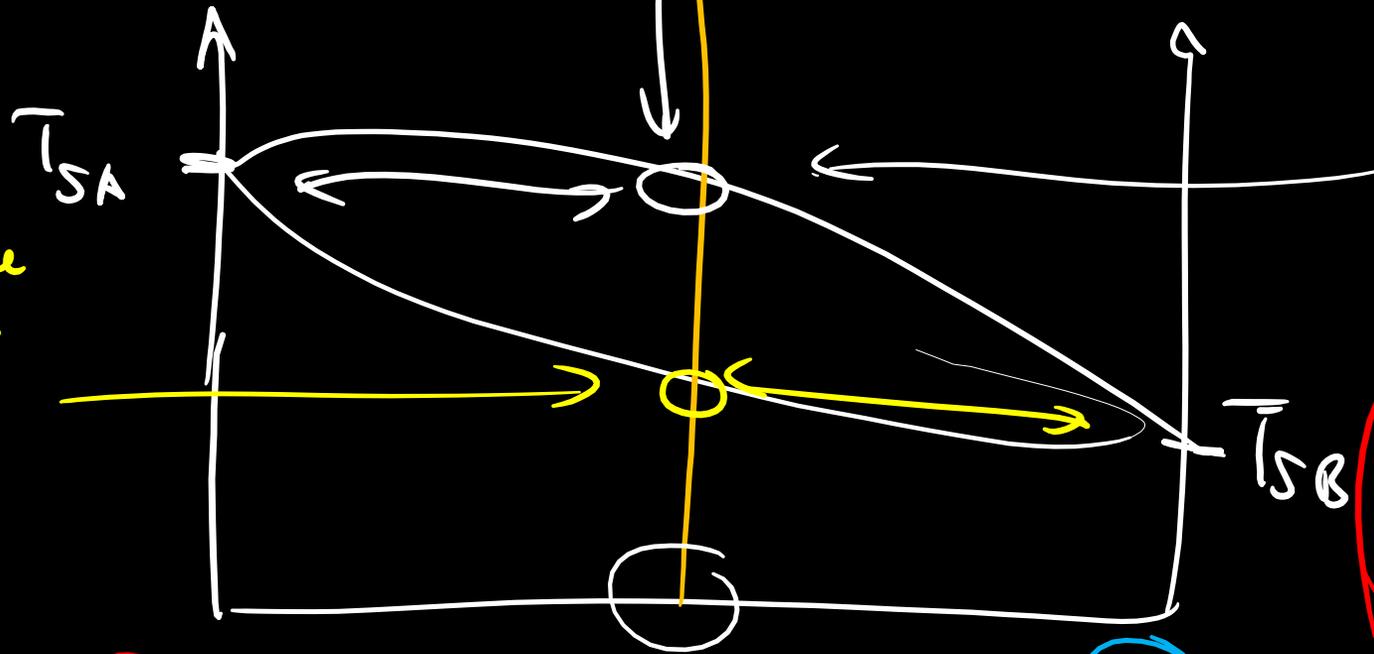
Bis jetzt: Zuerst entstandene Mischkristalle gleichen ihre Konzentration den später entstandenen über Diffusion an (vgl. Fe_3C -Diagramm)

Kristallzug

50% A

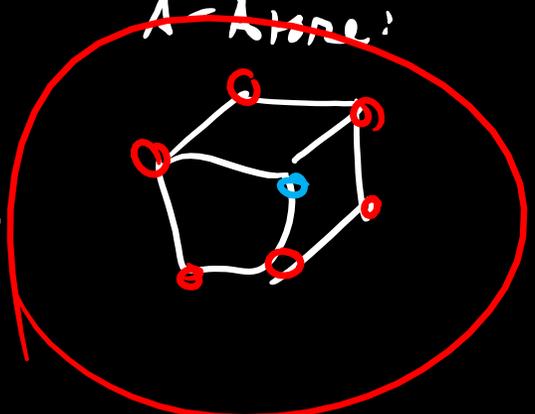
50% B

Mehr B-Atome
erstarrten

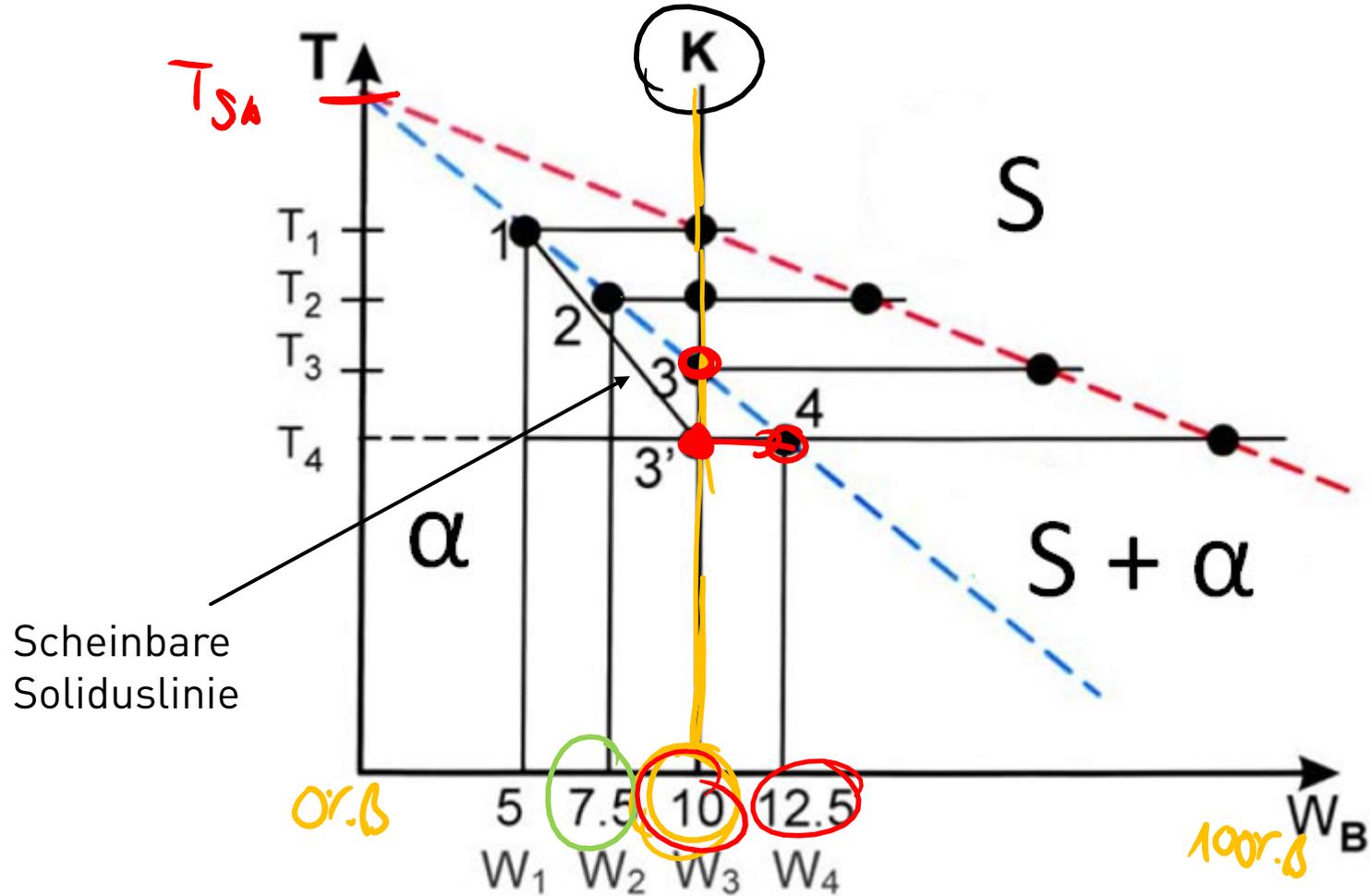


Zu Beginn
erstarrten mehr

A-Atome!

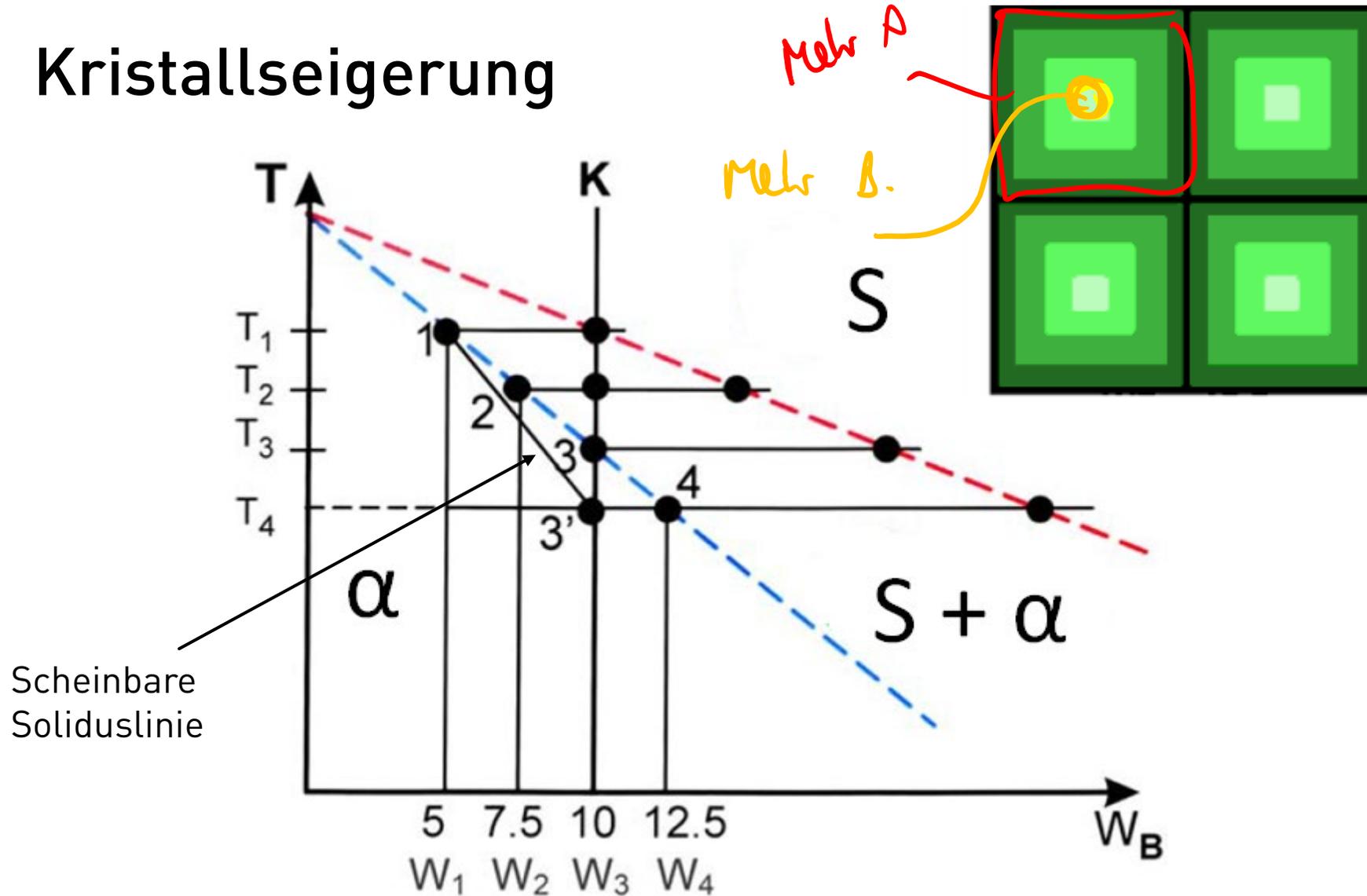


Kristallseigerung



Scheinbare Soliduslinie

Kristallseigerung

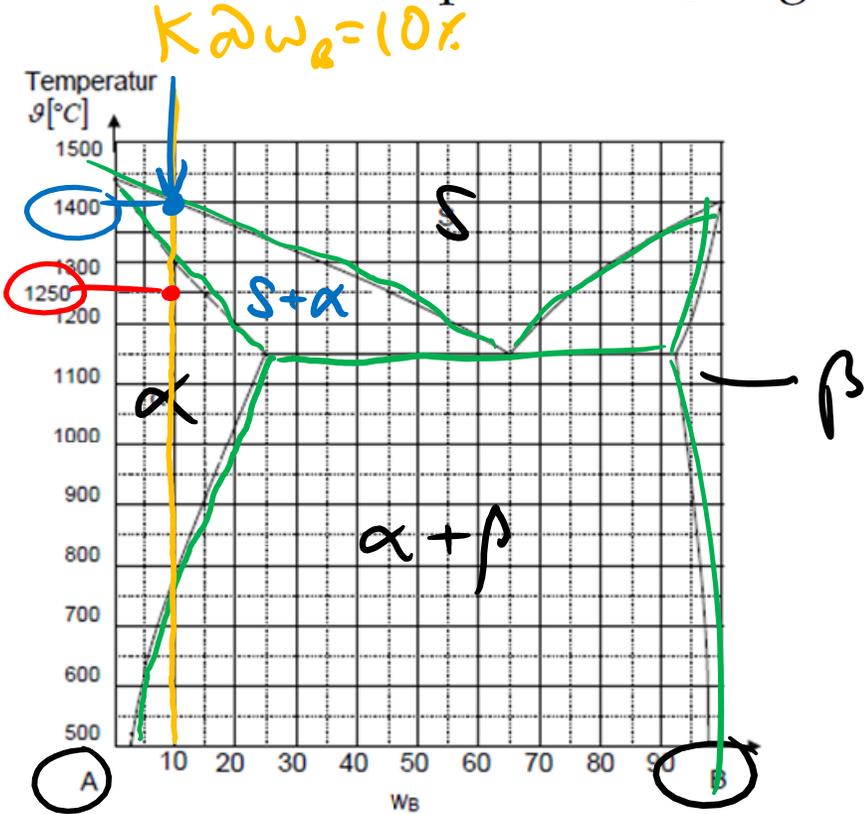


Scheinbare Soliduslinie

ETH zürich 4.3 Erstarrung

Gegeben ist das Zustandsdiagramm eines Zweistoffsystems A-B (Abb. 4.1). Eine Legierung mit $w_B = 10\%$ wird so schnell abgekühlt, dass der Konzentrationsausgleich zwischen den einzelnen erstarrten Körnern behindert ist und dass die Erstarrung erst bei $\theta_3 = 1250\text{ °C}$ abgeschlossen ist. Eine Unterkühlung der Schmelze findet nicht statt.

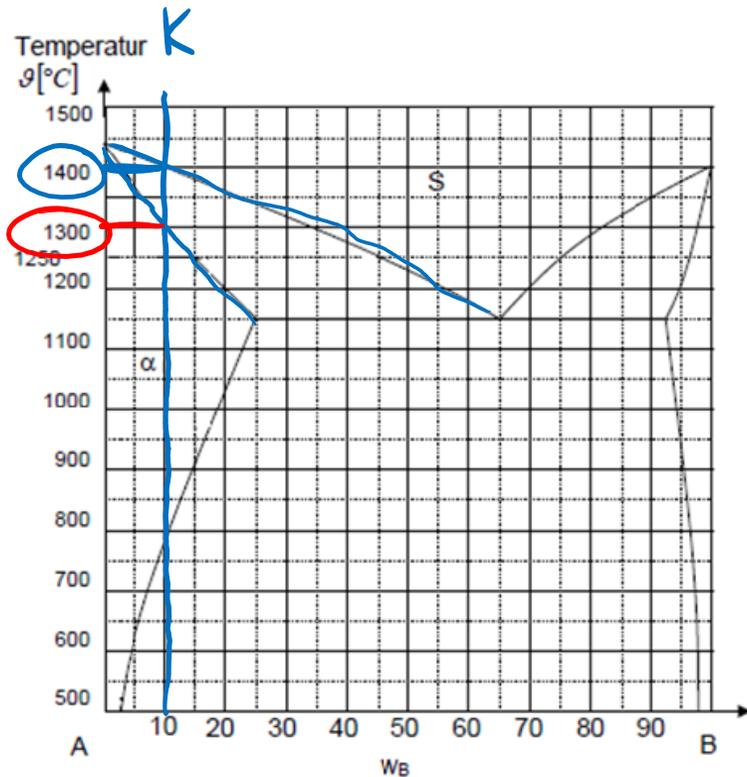
a) Bei welcher Temperatur θ_1 beginnt die Erstarrung?



ETH zürich 4.3 Erstarrung

Gegeben ist das Zustandsdiagramm eines Zweistoffsystems A-B (Abb. 4.1). Eine Legierung mit $w_B = 10\%$ wird so schnell abgekühlt, dass der Konzentrationsausgleich zwischen den einzelnen erstarrten Körnern behindert ist und dass die Erstarrung erst bei $\theta_3 = 1250\text{ °C}$ abgeschlossen ist. Eine Unterkühlung der Schmelze findet nicht statt.

b) Bei welcher Temperatur θ_2 müsste die Erstarrung im Gleichgewicht zu Ende sein?

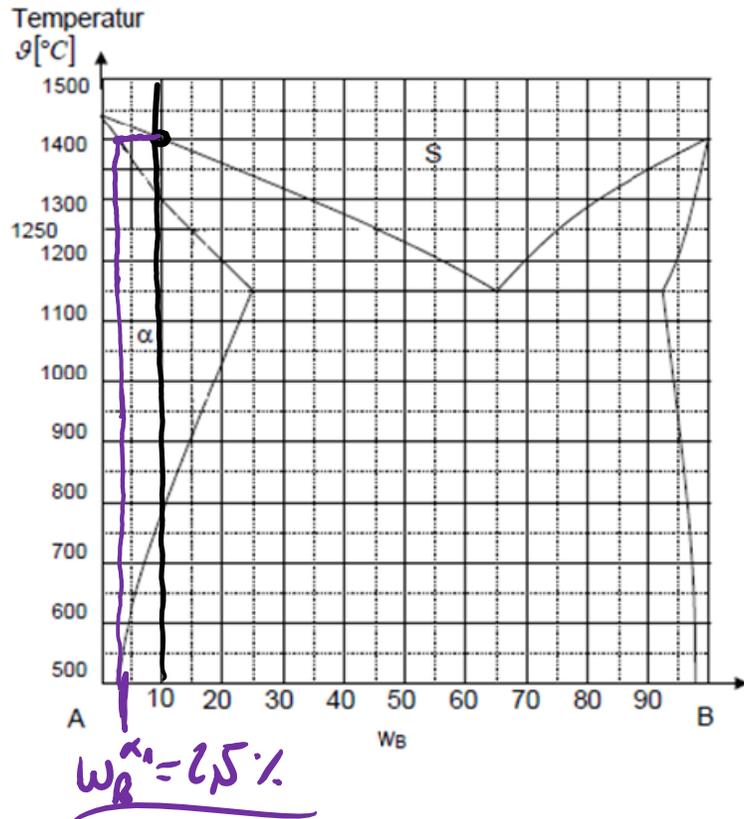


Bei $\theta_2 = \underline{1300\text{ °C}}$

ETH zürich 4.3 Erstarrung

Gegeben ist das Zustandsdiagramm eines Zweistoffsystems A-B (Abb. 4.1). Eine Legierung mit $w_B = 10\%$ wird so schnell abgekühlt, dass der Konzentrationsausgleich zwischen den einzelnen erstarrten Körnern behindert ist und dass die Erstarrung erst bei $\theta_3 = 1250\text{ °C}$ abgeschlossen ist. Eine Unterkühlung der Schmelze findet nicht statt.

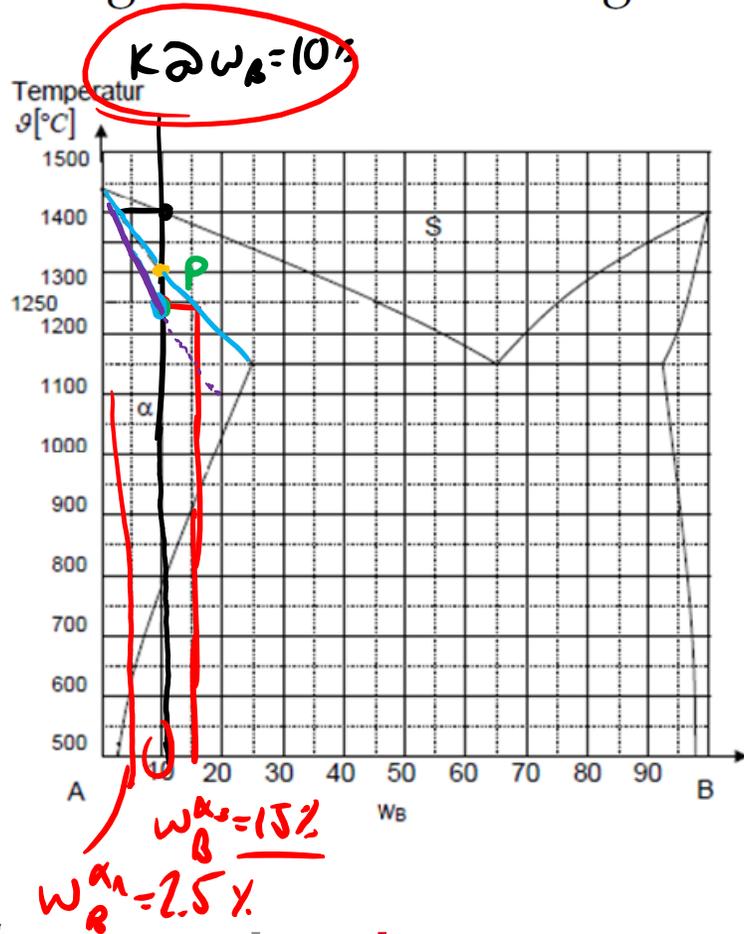
c) Wie gross ist der Phasengehalt $w_B^{\alpha 1}$ der zuerst erstarrten Teilchen?



ETH zürich 4.3 Erstarrung

Gegeben ist das Zustandsdiagramm eines Zweistoffsystems A-B (Abb. 4.1). Eine Legierung mit $w_B = 10\%$ wird so schnell abgekühlt, dass der Konzentrationsausgleich zwischen den einzelnen erstarrten Körnern behindert ist und dass die Erstarrung erst bei $\theta_3 = 1250\text{ °C}$ abgeschlossen ist. Eine Unterkühlung der Schmelze findet nicht statt.

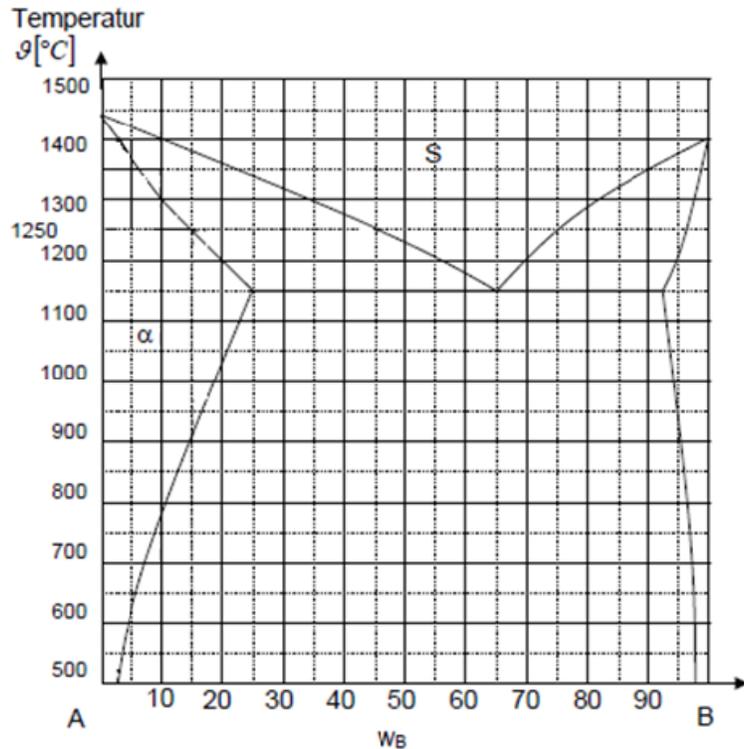
d) Wie gross ist der Phasengehalt $w_B^{\alpha_3}$ der zuletzt erstarrten Teilchen?



ETH zürich 4.3 Erstarrung

Gegeben ist das Zustandsdiagramm eines Zweistoffsystems A-B (Abb. 4.1). Eine Legierung mit $w_B = 10\%$ wird so schnell abgekühlt, dass der Konzentrationsausgleich zwischen den einzelnen erstarrten Körnern behindert ist und dass die Erstarrung erst bei $\theta_3 = 1250\text{ °C}$ abgeschlossen ist. Eine Unterkühlung der Schmelze findet nicht statt.

e) Zeichnen Sie den Zustandspunkt P ein, welcher die mittlere Konzentration des erstarrten Materials darstellt.

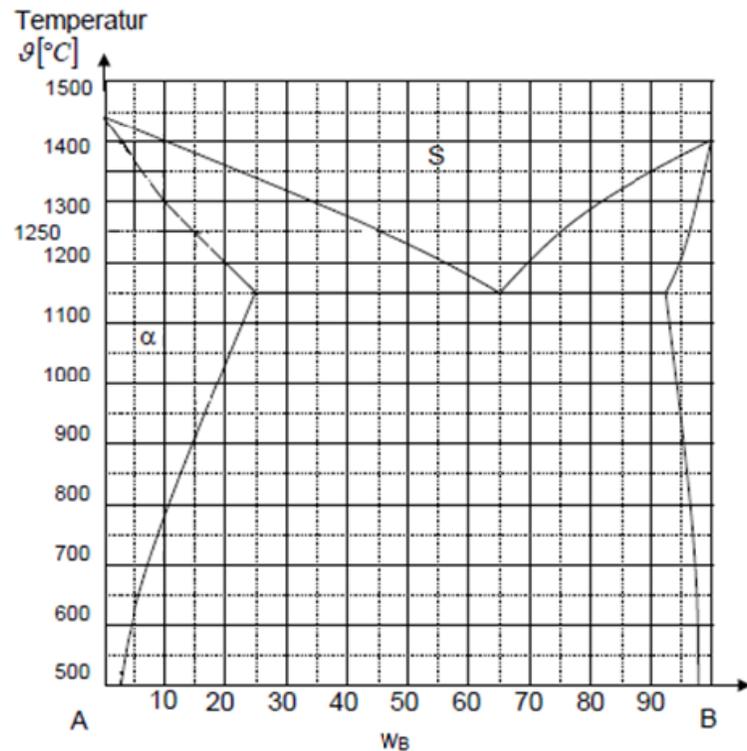


$\hookrightarrow \underline{10\%} = \overline{w_B}$

ETH zürich 4.3 Erstarrung

Gegeben ist das Zustandsdiagramm eines Zweistoffsystems A-B (Abb. 4.1). Eine Legierung mit $w_B = 10\%$ wird so schnell abgekühlt, dass der Konzentrationsausgleich zwischen den einzelnen erstarrten Körnern behindert ist und dass die Erstarrung erst bei $\theta_3 = 1250\text{ °C}$ abgeschlossen ist. Eine Unterkühlung der Schmelze findet nicht statt.

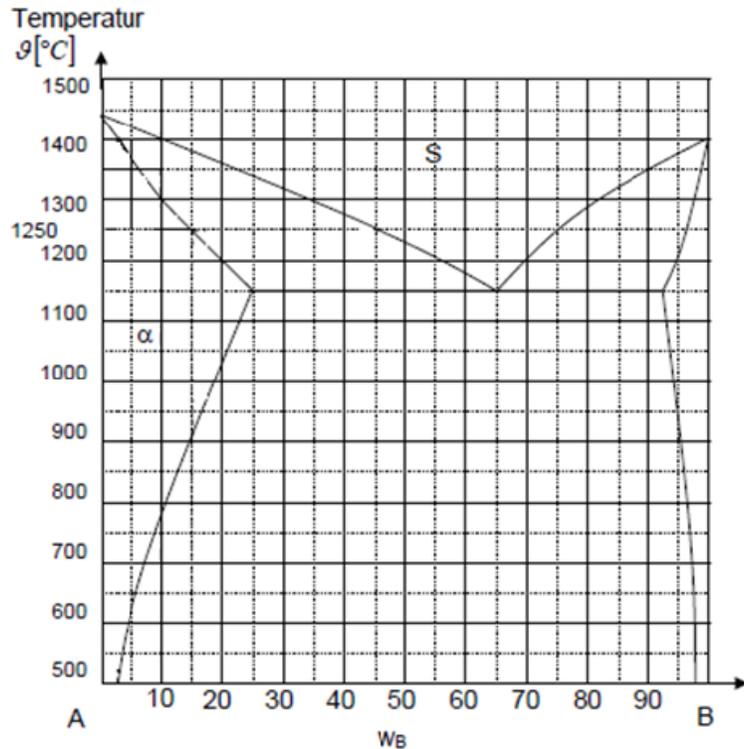
f) Zeichnen Sie die scheinbare Soliduslinie ein.



ETH zürich 4.3 Erstarrung

Gegeben ist das Zustandsdiagramm eines Zweistoffsystems A-B (Abb. 4.1). Eine Legierung mit $w_B = 10\%$ wird so schnell abgekühlt, dass der Konzentrationsausgleich zwischen den einzelnen erstarrten Körnern behindert ist und dass die Erstarrung erst bei $\theta_3 = 1250\text{ °C}$ abgeschlossen ist. Eine Unterkühlung der Schmelze findet nicht statt.

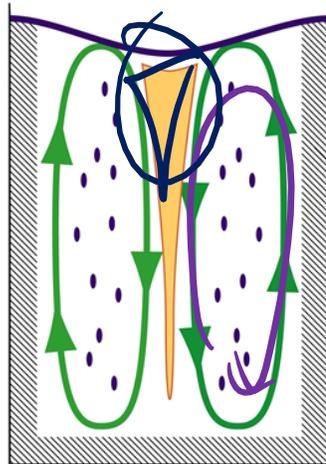
g) Wie nennt man diesen Erstarrungsfehler?



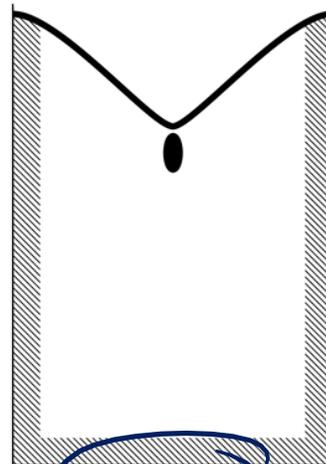
Blockseigerung

Entmischung über den gesamten Gussquerschnitt durch hydrodynamische Effekte

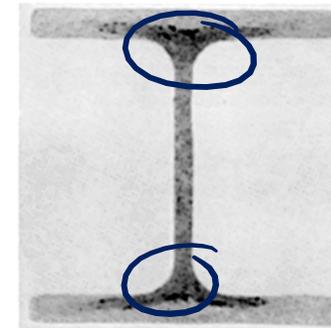
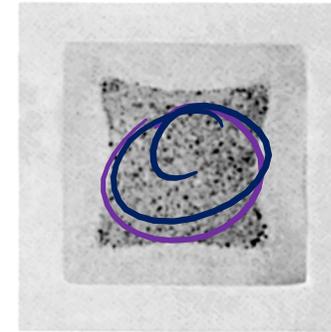
O_2 CO_2



unberuhigt



beruhigt





Werkstoffe und Fertigung I

Übungsstunde 7: Elastizität und Plastizität

Klemens Iten

kiten@ethz.ch

n.ethz.ch/~kiten

- a) Eine Vergrößerung der Unordnung ist gleichbedeutend mit einer Minimierung der freien Enthalpie.

Freie Enthalpie G

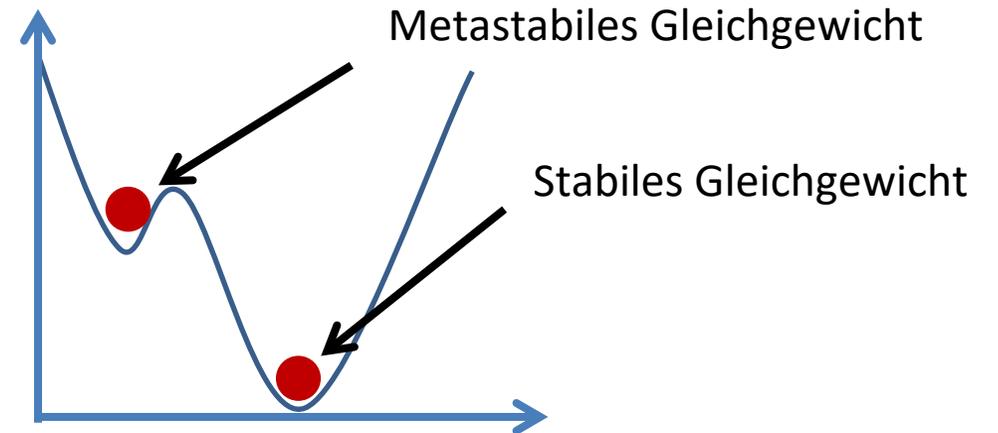
Grundsatz: Freie Enthalpie immer minimieren!

$$\Delta G = \Delta H - T \cdot S$$

Freie Enthalpie G
des Teilchens

Enthalpie (innere Energie, Volumenenergie)

*Entropie (Unordnung):
Maximal für möglichst kleines G!*



- b) Die Konzentration ist eine Gehaltsangabe bezogen auf ein Referenzvolumen, also besitzt sie immer die Einheit kg/m^3 .

Konzentration

Definition: $\frac{\text{Gehaltsangabe}}{\text{Referenzgrösse}}$

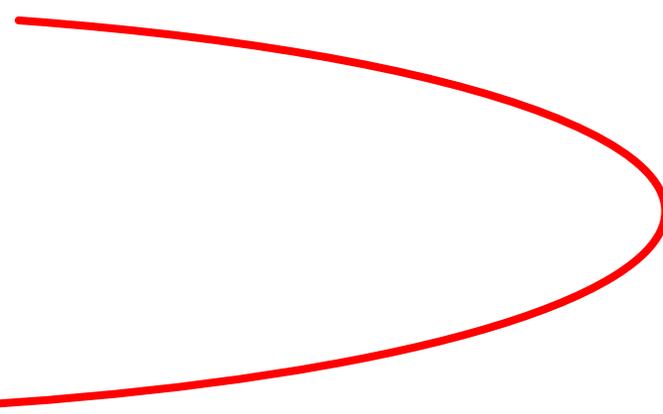
Typisch: $\frac{g}{mol}$, $\frac{mol}{l}$, $\frac{kg}{m^3}$

Falsch: $\frac{m^3}{kg}$

Speziell: $\frac{g}{kg}$ (z.B. Legierungselemente: 60 Gramm Kohlenstoff in 1 kg Stahl)

$\frac{1}{m^3}$ (z.B. Anzahl Atome pro Volumen)

keine Gehaltsangabe!



c) Die Diffusion gleicht Konzentrationen unabhängig von anderen Einflüssen aus.

d) Die Fick'schen Gesetze sind stationäre Beschreibungen der Diffusion.

Erstes Ficksches Gesetz: Diffusionsgeschwindigkeit

$$j = -D \frac{\Delta c}{\Delta x} = -D \frac{dc}{dx}$$

Stationär: Beschreibt Diffusionszustand in einem Moment

Zweites Ficksches Gesetz: Diffusionsgleichung nach Zeit und Ort

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \iff \frac{c_a - c_x}{c_a - c_0} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)$$

Das zweite Fick'sche Gesetz ist zeitabhängig und damit instationär.

e) Die Aktivierungsenergie ist für Stoffe mit einer hohen Schmelztemperatur hoch.

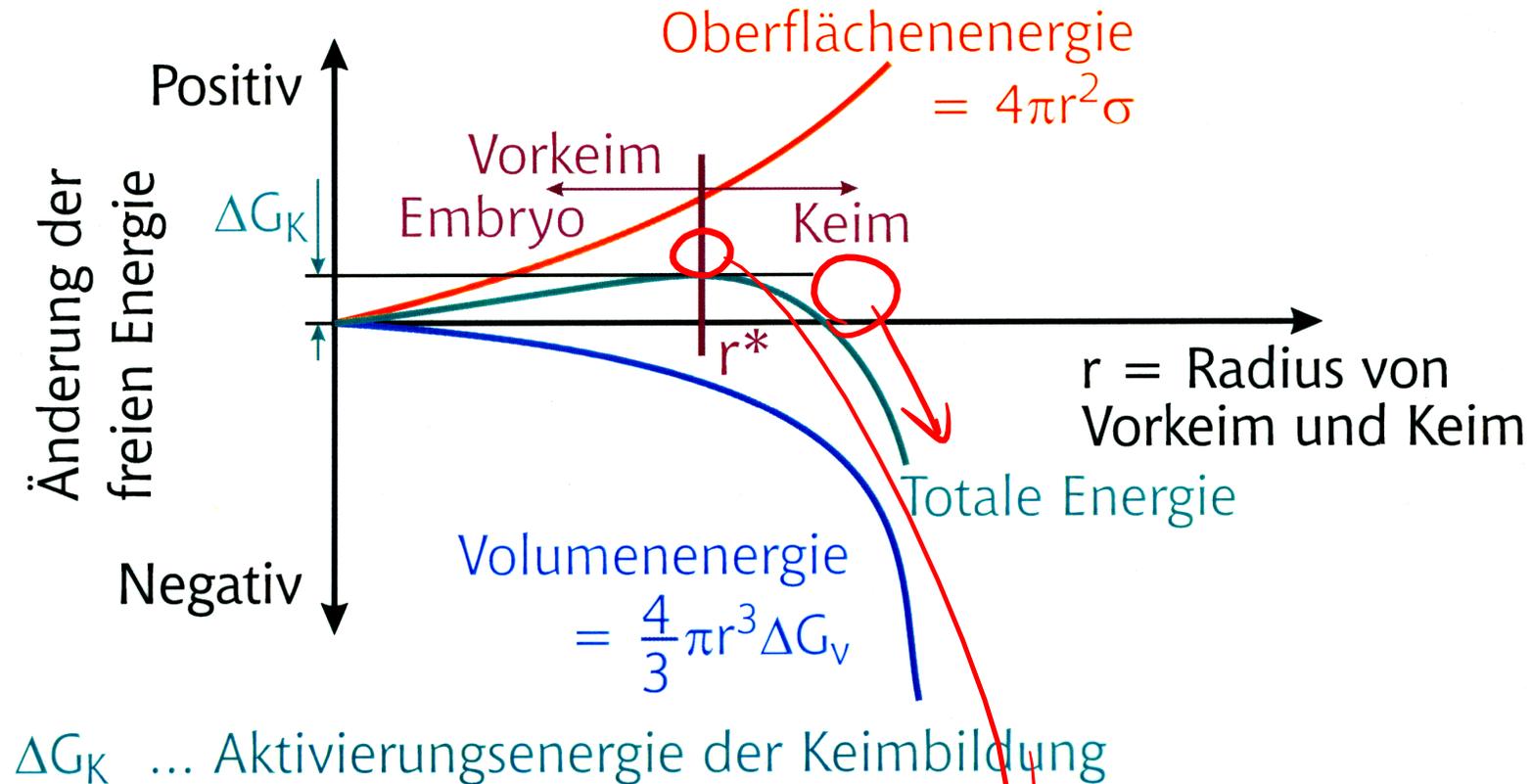
Aktivierungsenergie Q

Die Aktivierungsenergie steigt mit der Stärke der atomaren Bindungen an. Starke atomare Bindungen gehen mit hohen Schmelzpunkten einher.

bildungs?

f) Der Embryo ist ein instabiles Stadium im Keimwachstumsvorgang.

Keimbildung und Wachstum



- g) Praktisch findet die Keimbildung sehr häufig an Verunreinigungen oder Behälterwänden statt. Dieser Vorgang wird "~~homogene~~ Keimbildung" genannt.

heterogene

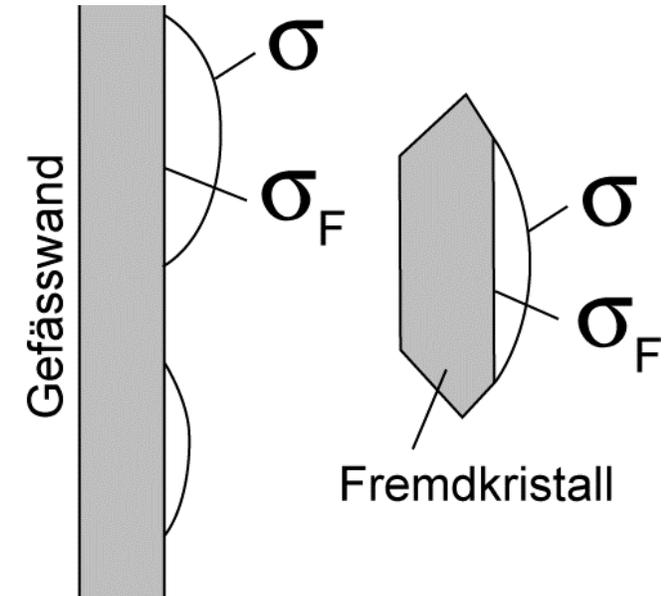
Homogene Keimbildung

- Keimbildung durch ausreichend grosse Unterkühlung
- Findet in Realität nur theoretisch statt



Heterogene Keimbildung

- Keimbildung an Verunreinigung oder Behälterwänden
- Schon vorhandene Oberfläche
 - ↳ geringere Unterkühlung nötig
- Findet praktisch immer statt



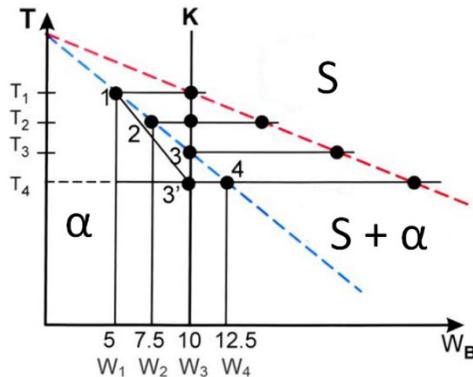
Heterogene Keimbildung an einer Gefässwand und an einem Fremdkeim.

h) Mit "Seigerung" wird nur ein mikroskopischer Erstarrungsfehler bezeichnet.

Seigerung

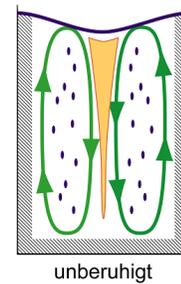
Definition: Mischungsfehler in der Erstarrung führen zu inhomogenem Gefüge.

Mikroskopisch: Kristallseigerung

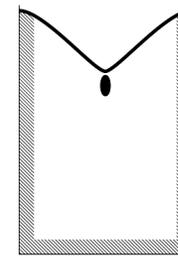


- Tritt auf, weil eine Komponente früher erstarrt als die andere Komponente
- Führt zu verschiedenen Zusammensetzungen w_A^K und w_B^K im Kristall
- Vermeidung durch langsames Abkühlen

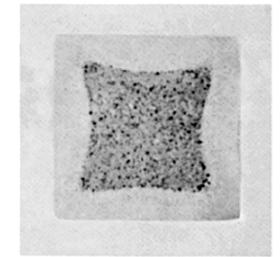
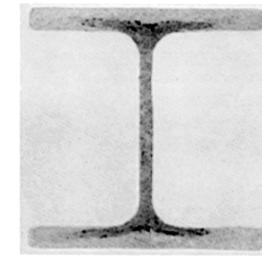
Makroskopisch: Blockseigerung



unberuhigt



beruhigt



- Tritt auf, weil die Schmelze kocht und Verunreinigungen in die Mitte treibt
- Führt zu mechanisch instabilen Bauteilen
- Vermeidung durch Beruhigung (Zugabe von Al und Si)

- i) Wird zu schnell abgekühlt, haben die Atome zu wenig Zeit zu diffundieren. Somit gleichen sich die Kristallgehalte der bereits entstandenen Kristalle nicht ständig den neu entstehenden Kristallen an. Deshalb muss auf eine tiefere Temperatur abgekühlt werden (als im Gleichgewichtsfall), um die Erstarrung zu vollenden.

Stimmt! Kristallreife.

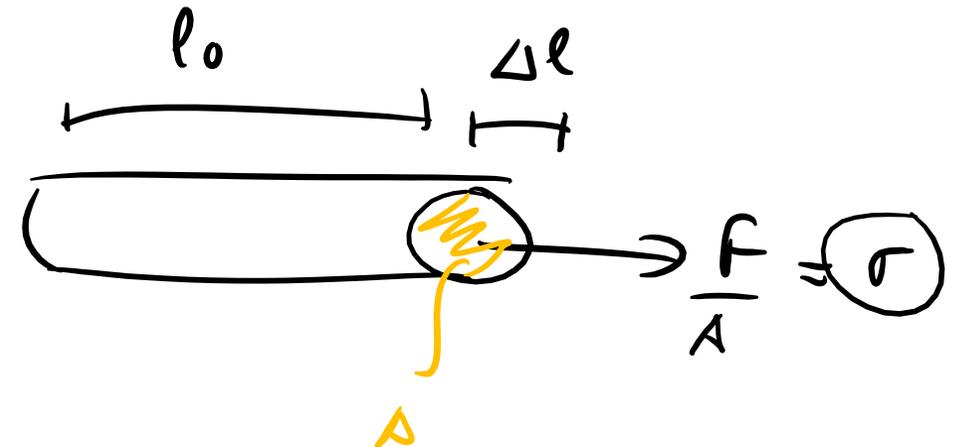
- j) Die Schmelze wird "gekocht", um eine möglichst homogene Durchmischung der Legierungselemente zu erreichen.

Inhaltsverzeichnis

- Elastizität
 - Spannungen und Dehnungen im Kontinuum
 - Atomare Beschreibung des elastischen Verhaltens
- Plastizität
 - Schmid'sches Schubspannungsgesetz
 - Superpositionsprinzip

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

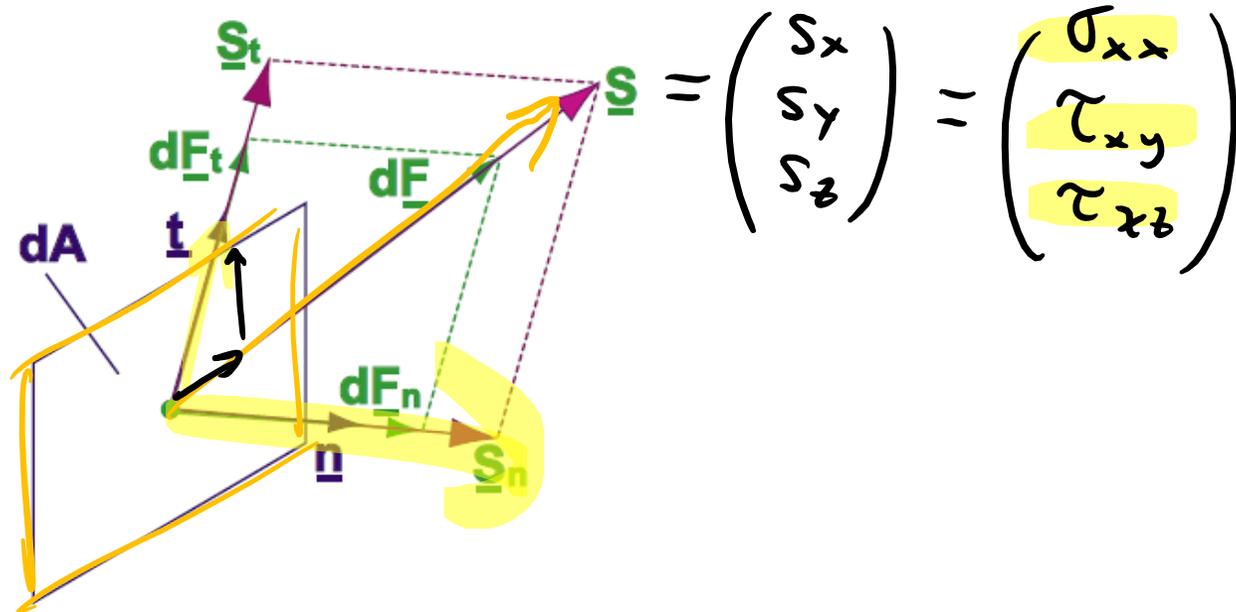


Spannungen und Dehnungen im Kontinuum

Durch Freischneiden werden innere Kraftvektoren freigelegt

Dividiert durch Flächenelement ergibt sich eine Spannung

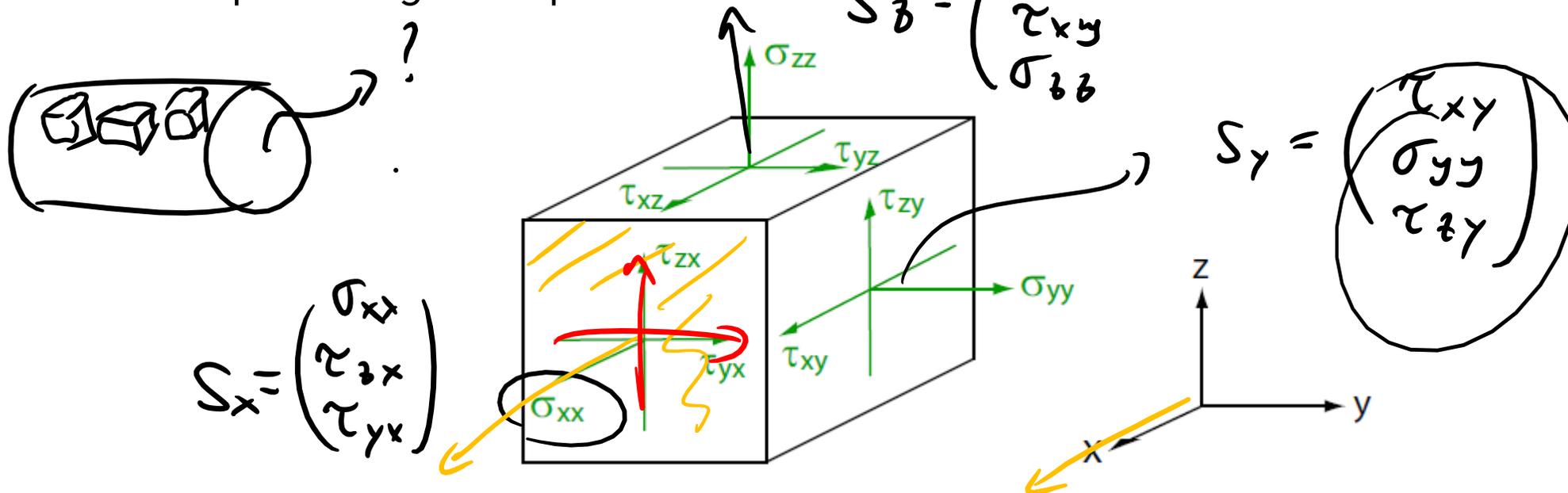
In Anteile zerlegen: Normal-Rtg und Tangential-Rtg



Spannungen und Dehnungen im Kontinuum

Freischneiden senkrecht zu jeder Achse: \underline{S}_x , \underline{S}_y , \underline{S}_z

Aufteilen in eine Normalspannungskomponente und zwei Schubspannungskomponenten



Spannungen und Dehnungen im Kontinuum

Zusammenfassen im Spannungstensor $\underline{\underline{T}}$

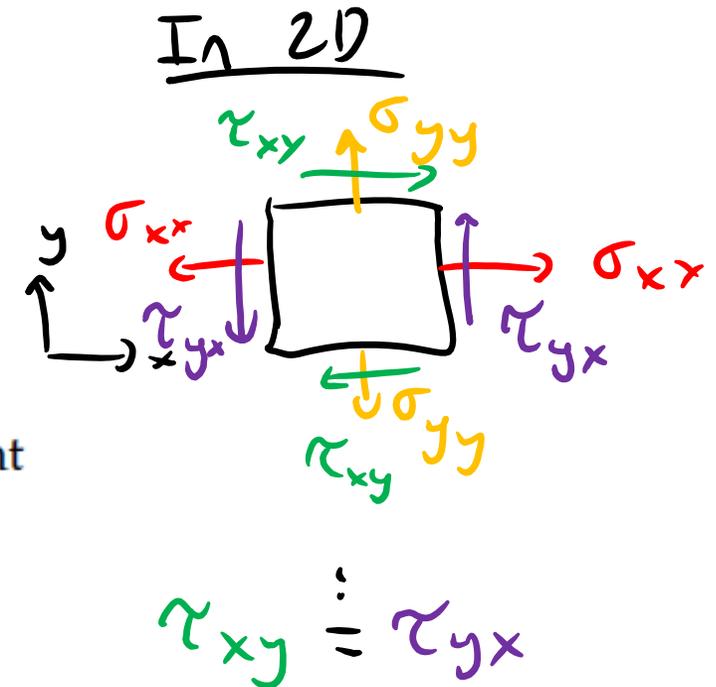
Symmetrischer Tensor: Sechs Informationen benötigt

$$\underline{\underline{T}} = \begin{matrix} \begin{matrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z \\ \parallel & \parallel & \parallel \\ \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{matrix} \end{matrix}$$

$$\underline{S} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{n}$$

$$\underline{\sigma} = \underline{S} \cdot \underline{n}$$

$$\underline{\tau} = \underline{S} - \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$$



σ_{xx} :

Normalspannung in x-Richtung am x-Flächenelement

τ_{zy} :

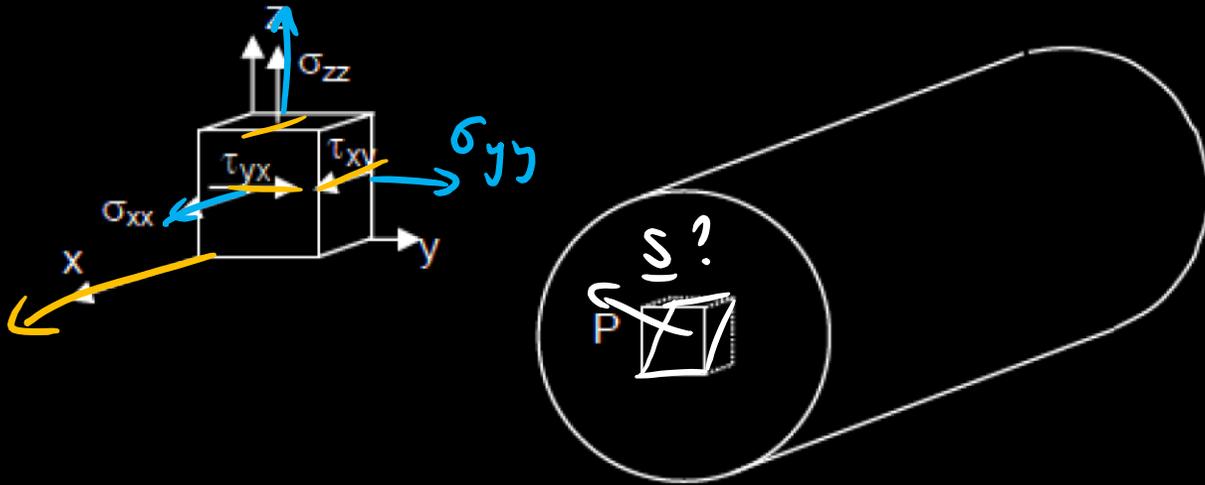
Schubspannung in z-Richtung am y-Flächenelement

ETH zürich 4.2 Spannungstensor

Sie schneiden einen zylindrischen Körper senkrecht zu seiner Achse. Sie legen ein Koordinatensystem in den Punkt P und isolieren einen Elementarwürfel, an welchem Sie folgende Spannungen feststellen.

$\sigma_{xx} = 100 \text{ N/mm}^2$	$\tau_{xy} = -100 \text{ N/mm}^2$
$\sigma_{yy} = 0 \text{ N/mm}^2$	$\tau_{zx} = 0 \text{ N/mm}^2$
$\sigma_{zz} = -100 \text{ N/mm}^2$	$\tau_{zy} = 0 \text{ N/mm}^2$

a) Geben Sie den Spannungstensor \underline{T} für den Punkt P an.



$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 \\ -100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

ETH zürich 4.2 Spannungstensor

Sie schneiden einen zylindrischen Körper senkrecht zu seiner Achse. Sie legen ein Koordinatensystem in den Punkt P und isolieren einen Elementarwürfel, an welchem Sie folgende Spannungen feststellen.

$$\sigma_{xx} = 100 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{xy} = -100 \text{ N/mm}^2$$

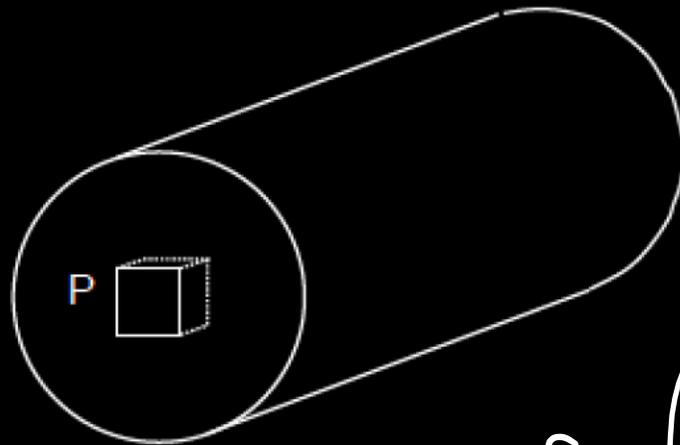
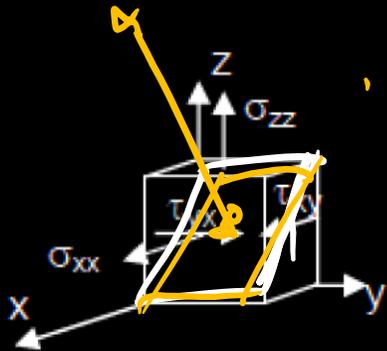
$$\sigma_{yy} = 0 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{zx} = 0 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{zz} = -100 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{zy} = 0 \text{ N/mm}^2$$

b) Berechnen Sie mit dem Spannungstensor $\underline{\underline{T}}$ die Spannungen an einem Flächenelement durch Punkt P mit dem Normalenvektor (101) , gemessen im definierten Koordinatensystem.



$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{e}}_n$$

Achtung: $\underline{\underline{u}}$ muss normiert werden

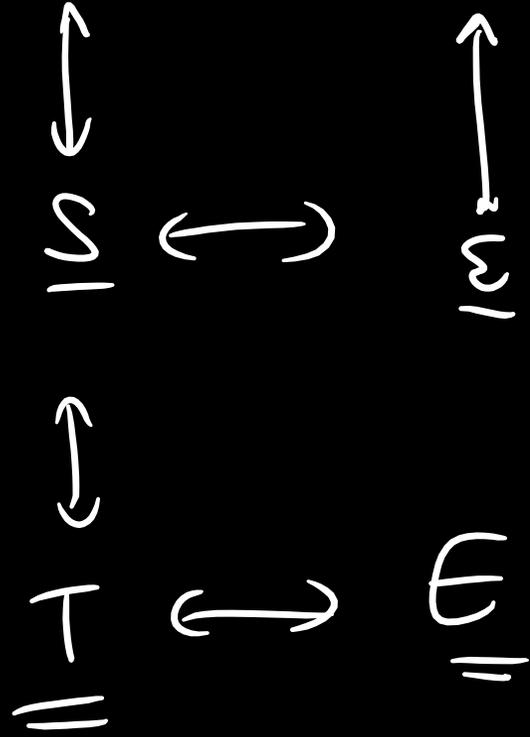
$$\underline{\underline{e}}_n = \frac{\underline{\underline{u}}}{|\underline{\underline{u}}|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} 100 & -100 & 0 \\ -100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -100 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70.7 \\ -70.7 \\ -70.7 \end{pmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

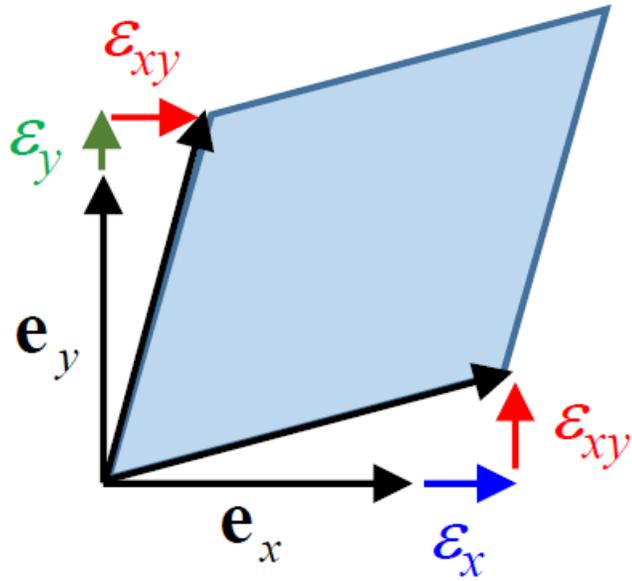
Note:

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

nur für 1D Zug / Druck!



Dehnungstensor \underline{E}



$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = 2\epsilon_{xy}$$

$$\text{In 2D: } \underline{\underline{E}}_{xy} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_y \end{bmatrix}$$

In 3D: Definition über Verschiebungen (Mechanik II...)

$$\underline{\underline{E}}_{xyz} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \epsilon_{yy} & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{array} \right\}$$

ACHTUNG: Das Hookesche Gesetz $\sigma = E \cdot \epsilon$ gilt NUR im einachsigen Zustand (=reiner Zug/Druck)!
Im 3D-Fall mit den Tensoren? Siehe nächste Folie (oder in Mech II 😊)

Wuf Übung 7 (2 Stunden) vs. Mechanik II (2 Monate)...

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\mu} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.9 Dehnung und Scherung

Gegeben ist eine quadratische Platte A mit der Kantenlänge b . Sie wird einer Belastung unterworfen, welche die Platte in die Position A' verschiebt.

- Zeichnen Sie die Verschiebungsvektoren \vec{u} für die Eckpunkte und einen beliebigen Punkt $P(x, y)$ in die Abb. 5.2 ein.
- Geben Sie die obigen Verschiebungsvektoren \vec{u} als Funktionen von x und y an.
- Berechnen Sie Dehnungen $\varepsilon_{..}$ und Scherungen $\gamma_{..}$ aus diesen Verschiebungen.

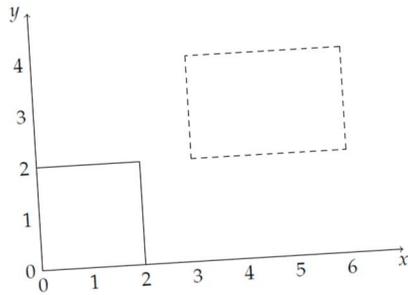


Abbildung 4.3

ETH

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

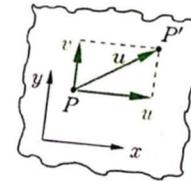
Mechanik II: Deformierbare Körper
für D-BAUG, D-MAVT

Prof. D. Mohr

Haus- & Schnellübung 4
Verzerrungen

Aufgabe H1

Für eine Scheibe wurde aus Messungen das folgende ebene Verschiebungsfeld ermittelt:



$$\underline{u}(x, y) = \begin{pmatrix} u_0 + 7 \cdot 10^{-3}x + 4 \cdot 10^{-3}y \\ v_0 + 2 \cdot 10^{-3}x - 1 \cdot 10^{-3}y \end{pmatrix}$$

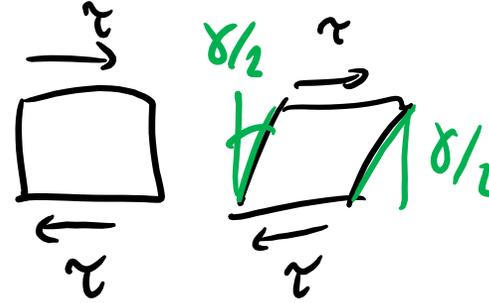
- Man bestimme den Verzerrungstensor

Umrechnung Spannung-Dehnung

Allgemein: Kompliziert (Mechanik II)

1.3.1 Elastisches Verhalten im einachsigen Zustand:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \tau = G \cdot \gamma \quad \text{mit } E \text{ (Elastizitätsmodul) und } G \text{ (Schubmodul): } G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$



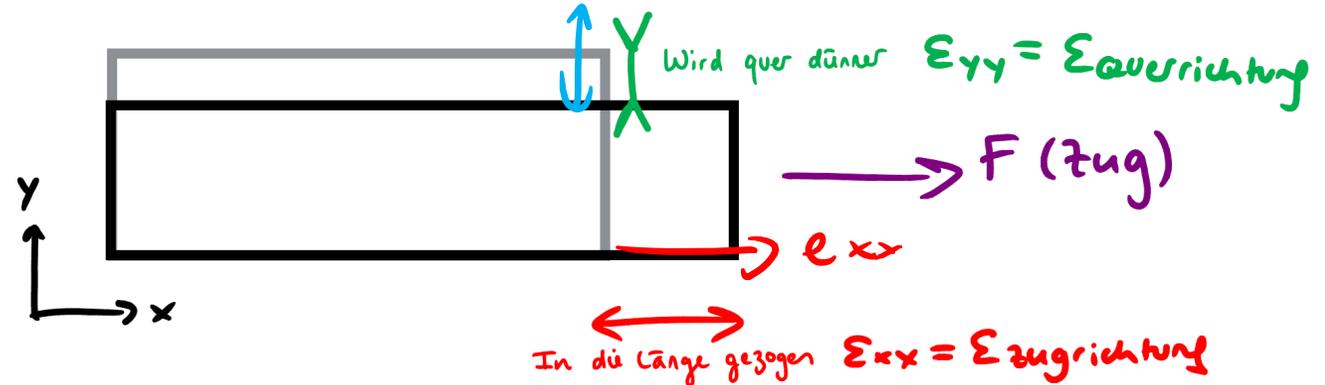
1.3.2 Querkontraktion (Dehnungen senkrecht zur Zugrichtung):

$$-\nu \cdot \varepsilon_{\text{Zugrichtung}} = \varepsilon_{\text{Querrichtung}}$$

mit $\nu < 0,5$

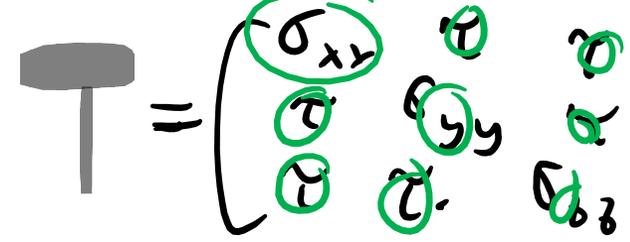
(Querkontraktionszahl/Poissonzahl):

$$\nu = \frac{-\text{Querkontraktion}}{\text{Längsdehnung}}$$



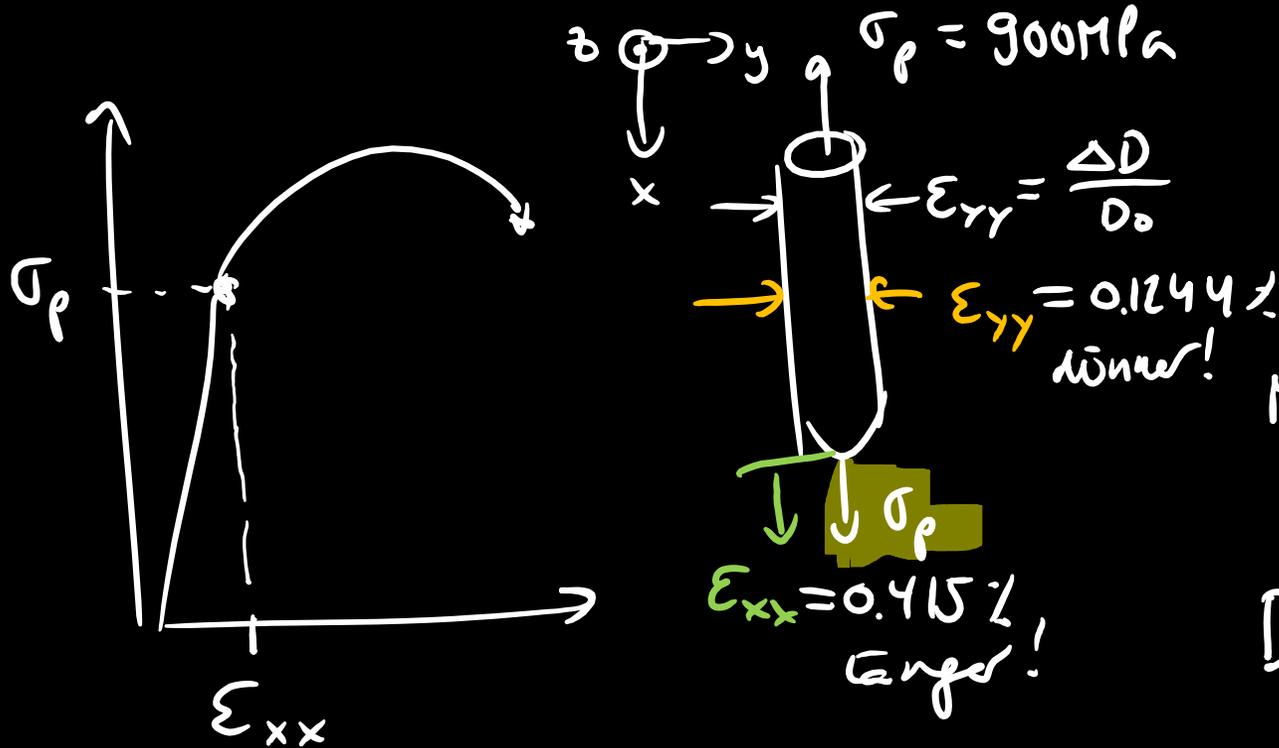
ETH zürich 4.1 Zugstab, Querkontraktion

Ein Stab aus Stahl wird unter Zug bis zur Proportionalitätsgrenze belastet.
Wie gross ist sein Durchmesser D unter dieser Last?



Proportionalitätsgrenze $\sigma_p = 900 \text{ N/mm}^2$
 Durchmesser des unbelasteten Zugstabes $D_0 = 10 \text{ mm}$

Elastizitätsmodul $E = 217\,000 \text{ N/mm}^2$
 Querkontraktionszahl $\nu = 0.3$



1 dimensionale Belastung \Rightarrow Hooke!

$$\sigma_p = E \cdot \epsilon_{xx}$$

$$\epsilon_{xx} = \frac{\sigma_p}{E} = \frac{900 \text{ MPa}}{217\,000 \text{ MPa}} = \underline{0.415\%}$$

Mit Poisson: Querkontraktion

$$\epsilon_{yy} = -\nu \cdot \epsilon_{xx} = 0.3 \cdot 0.415\% = -0.1244\%$$

$$D = D_0 + \Delta D = D_0 + \epsilon_{yy} \cdot D_0$$

$$= 10 \text{ mm} - 0.1244\% \cdot 10 \text{ mm} = 9.987 \text{ mm}$$

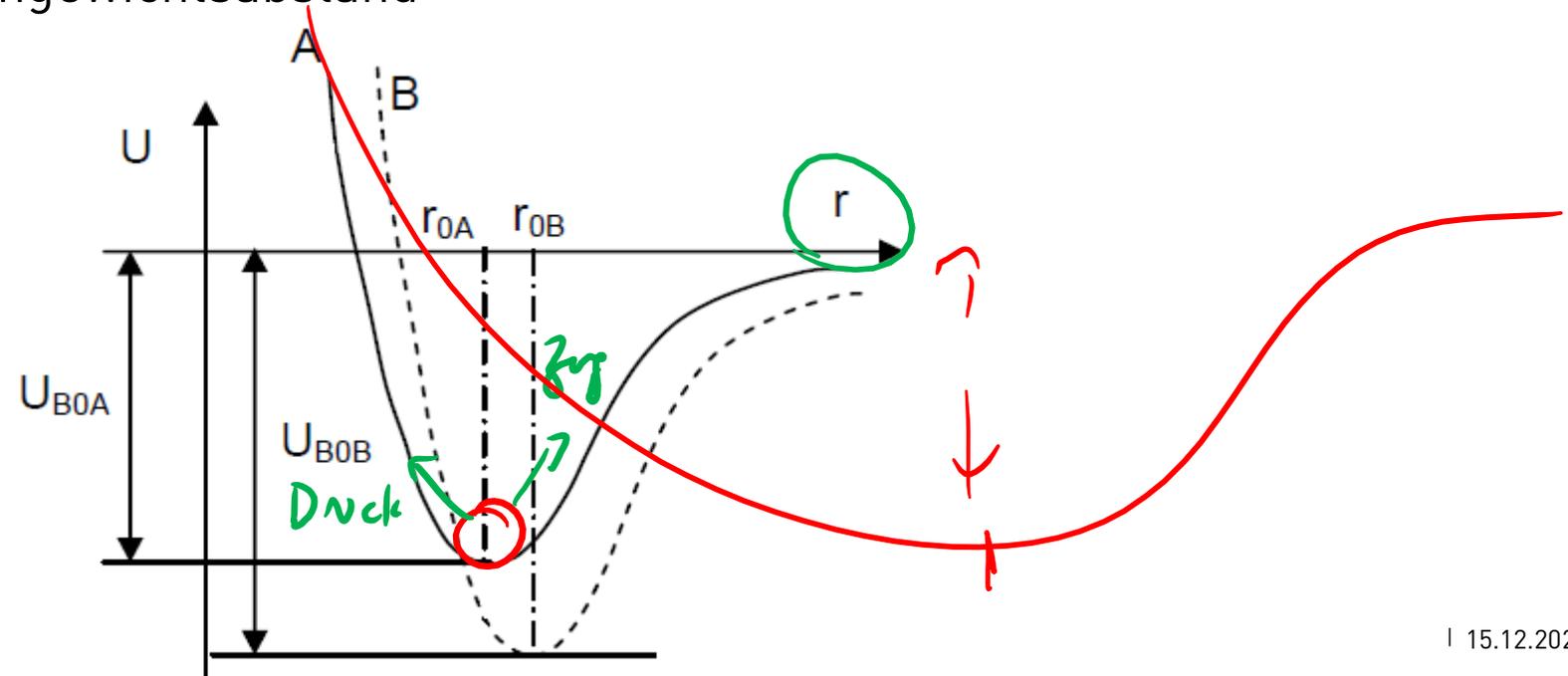
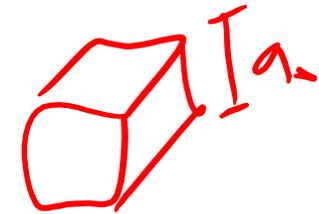
Atomare Beschreibung des elastischen Verhaltens

Elastische Dehnung: Zeitweilige Entfernung der Atome aus ihrer Ruhelage

Gleichgewicht: Atome auf Potentialminimum

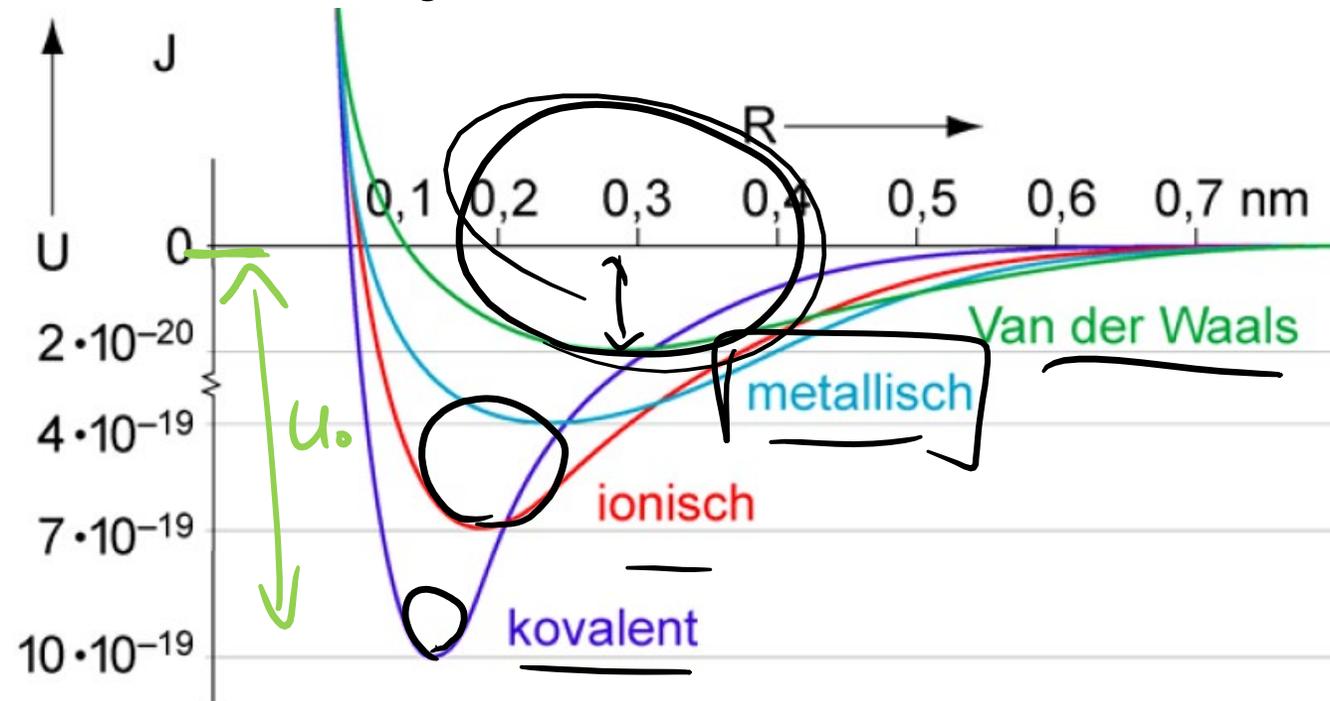
Tiefe: Bindungsenergie

Lage: Gleichgewichtsabstand



Atomare Beschreibung des elastischen Verhaltens

Grosser Gleichgewichtsabstand $r_0 =$ grosse Gitterkonst.
 Grosse Bindungsenergie $U_0 =$ hoher Schmelzpunkt T_S
 Kleiner Krümmungsradius = hoher E-Modul



Eigenschaften der Potentialkurven

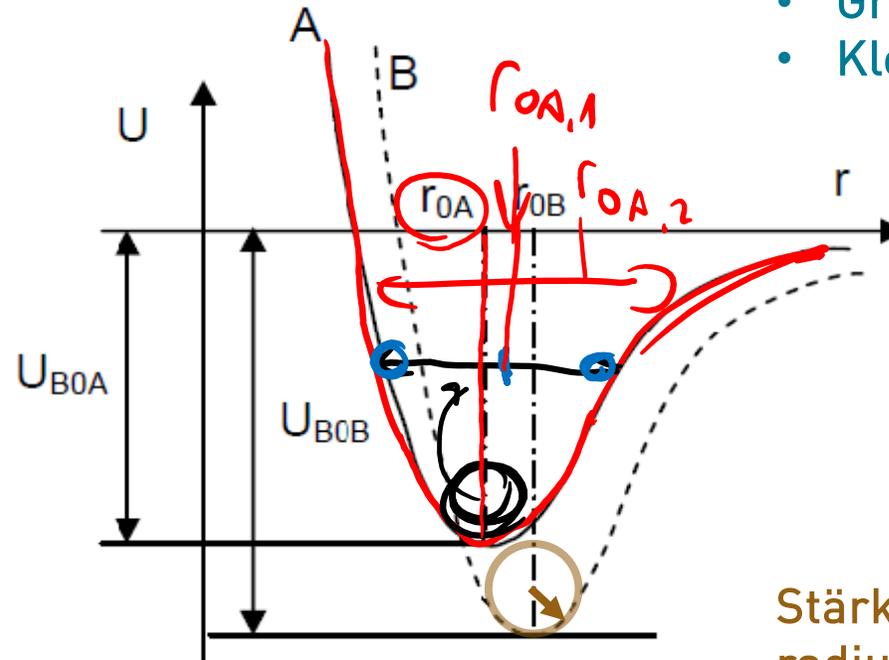
Betragsmässig grössere
Bindungsenergie U

(hier: $|U_B| > |U_A|$)

- Höhere Schmelztemperatur T_s
- Höhere Aktivierungsenergie Q
(mehr Energie nötig, um Bindungen zu lösen)
- Kleinere Wärmeausdehnung γ
(stärkere therm. Kräfte nötig, um Gleichgewicht zu stören)

Asymmetrischer Potentialverlauf

- Thermische Dehnung
- Anderes Verhalten bei Zug und Druck



Kleinerer Bindungsradius r
(hier: $r_A < r_B$)

- Grösserer E-Modul
- Kleinere Gitterkonstante a_0

Stärkerer (=kleinerer) Krümmungsradius κ

- Grösserer E-Modul

Eigenschaften der Potentialkurven

Betragsmässig grössere
Bindungsenergie U

(hier: $|U_B| > |U_A|$)

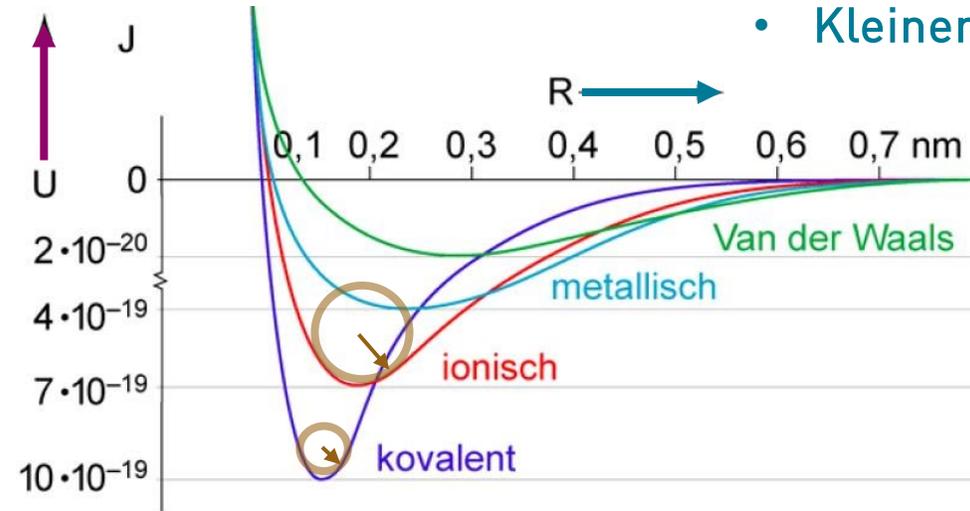
- Höhere Schmelztemperatur T_S
- Höhere Aktivierungsenergie Q
(mehr Energie nötig, um Bindungen zu lösen)
- Kleinere Wärmeausdehnung γ
(stärkere therm. Kräfte nötig, um Gleichgewicht zu stören)

Asymmetrischer Potentialverlauf

- Thermische Dehnung
- Anderes Verhalten bei Zug und Druck

Kleinerer Bindungsradius r
(hier: $r_A < r_B$)

- Grösserer E-Modul
- Kleinere Gitterkonstante a_0



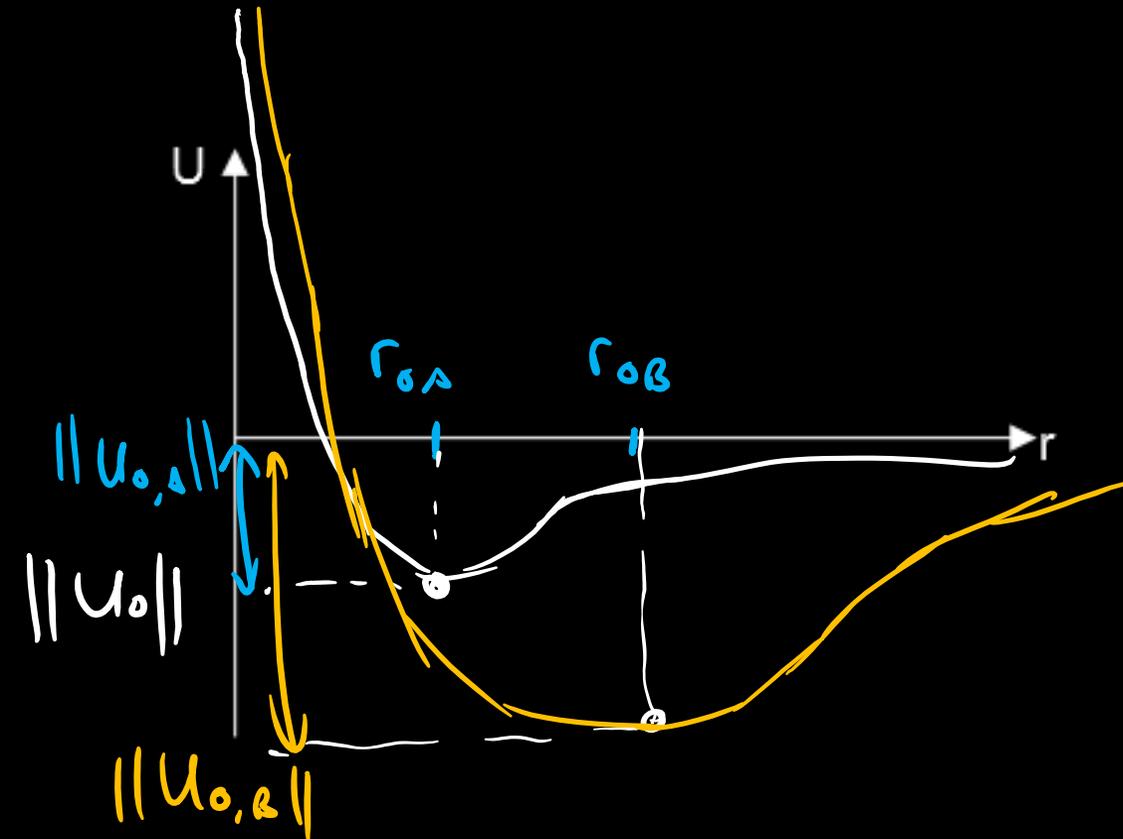
Stärkerer (=kleinerer) Krümmungsradius κ

- Grösserer E-Modul

ETH zürich 4.3 Bildungsenergie

Zeichnen Sie qualitativ den Verlauf des Potentials $U(r)$ der Resultierenden der anziehenden und abstossenden Kräfte zwischen zwei Atomen für zwei Werkstoffe mit unterschiedlichen Gitterkonstanten (gleicher Gittertyp) und unterschiedlichen Schmelztemperaturen

$a_{0A} < a_{0B}$; $T_{SA} < T_{SB}$; es sei $U(r \rightarrow \infty) = 0$



Grössere $T_S \Leftrightarrow$ Bindungsenergie $\|U_0\|$ grösser!

$\|U_{0,A}\| < \|U_{0,B}\|$

Grössere Gitterkonstante $\Leftrightarrow r_0$ grösser!

$r_{0,A} < r_{0,B}$

Potentialkurven sind asymmetrisch

Mit $U(r \rightarrow 0) = \infty$

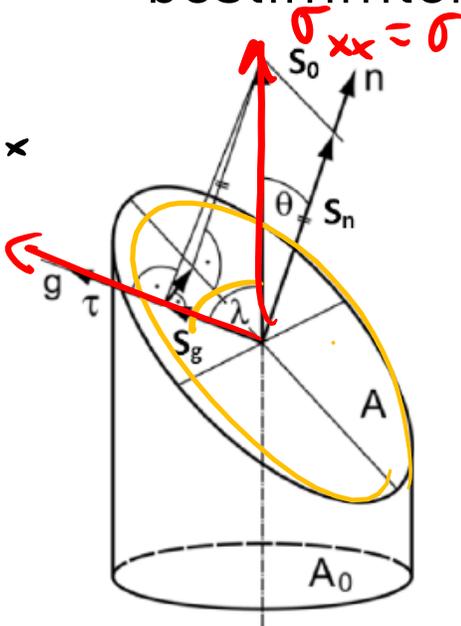
$U(r \rightarrow \infty) = 0$

Schmid'sches Schubspannungsgesetz

Lastfall: **Einachsige** reine Zug- oder Druckbeanspruchung
 Was wird berechnet: Wie gross sind die Schubspannungen an einem schiefen Flächenelement in einer bestimmten Richtung g ?

$$\underline{S} = \underline{T} \cdot \underline{e}_n$$

$$\sigma_{xx} = \underline{S} \cdot \underline{e}_{xx}$$



$$\tau = \sigma \cdot \cos(\lambda) \cdot \cos(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{\underline{n} \cdot \underline{S}_0}{|\underline{n}| \cdot |\underline{S}_0|}$$

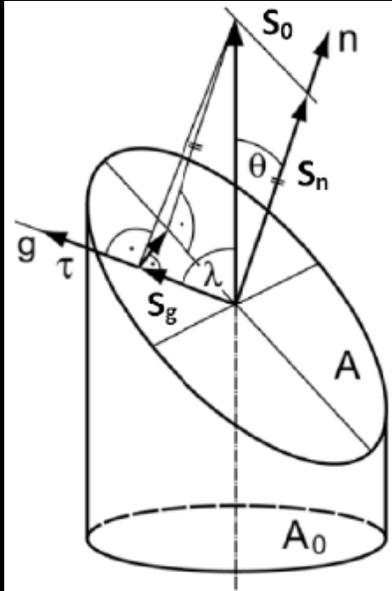
$$\cos(\lambda) = \frac{\underline{g} \cdot \underline{S}_0}{|\underline{g}| \cdot |\underline{S}_0|}$$

- \underline{S}_0 : Richtungsvektor der Spannung
- \underline{n} : Flächennormale
- \underline{g} : Richtungsvektor
- θ : Winkel zwischen \underline{S}_0 & \underline{n}
- λ : Winkel zwischen \underline{S}_0 & \underline{g}

ETH zürich 4.5 Schubspannung

In einem Körper ist ein kubisches Koordinatensystem definiert. An einem (010)-Flächenelement wirkt eine reine Zugspannung σ von 200 N/mm^2 . Die Flächen (100) und (001) sind spannungsfrei.

Wie gross ist die Schubspannung an einer $(\bar{1}\bar{1}1)$ Fläche in Richtung $g = [011]$?



$$\tau = \sigma \cdot \cos(\lambda) \cdot \cos(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{\underline{n} \cdot \underline{S}_0}{|\underline{n}| \cdot |\underline{S}_0|}$$

$$\cos(\lambda) = \frac{\underline{g} \cdot \underline{S}_0}{|\underline{g}| \cdot |\underline{S}_0|}$$

\underline{S}_0 : Richtungsvektor der Spannung

\underline{n} : Flächennormale

\underline{g} : Richtungsvektor

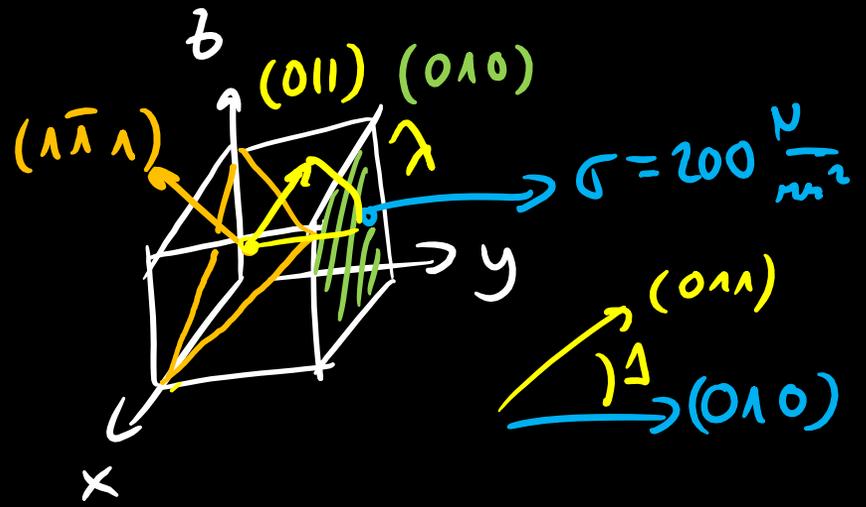
θ : Winkel zwischen \underline{S}_0 & \underline{n}

λ : Winkel zwischen \underline{S}_0 & \underline{g}

ETH zürich 4.5 Schubspannung

In einem Körper ist ein kubisches Koordinatensystem definiert. An einem (010) -Flächenelement wirkt eine reine Zugspannung σ von 200 N/mm^2 . Die Flächen (100) und (001) sind spannungsfrei.

Wie gross ist die Schubspannung an einer $(\bar{1}\bar{1}1)$ Fläche in Richtung $g = [011]$?



τ in Richtung (011) in der Ebene $(\bar{1}\bar{1}1) = ???$

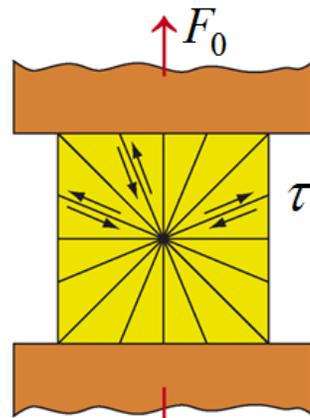
$$\tau = \sigma \cdot \cos \lambda \cdot \cos \theta$$

$$\lambda = 45^\circ \Rightarrow \cos \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \theta = \frac{\underline{n} \cdot \underline{g}}{|\underline{n}| \cdot |\underline{g}|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\tau = \sigma \cdot \cos \lambda \cdot \cos \theta = 200 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \underline{\underline{-81,6 \text{ N/mm}^2}}$$

Maximale Schubspannung bei einachsigem Zug

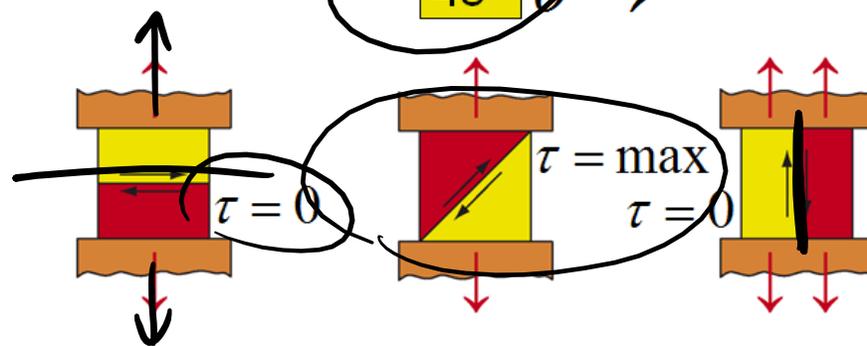
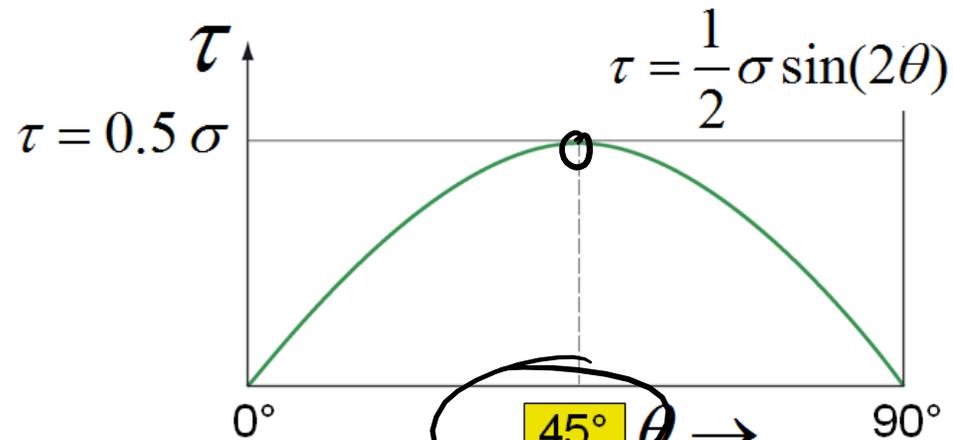


$$\sigma = \frac{F_0}{A_0}$$

? τ bei
Zugbeanspruchung

$$\tau = f(\theta)$$

Grösste Schubspannungen im Zugstab unter 45° zur Zugrichtung



Schmid'sches Schubspannungsgesetz

Gleitsystem: Gleitebene + Gleitrichtung

Wenn in einem Gleitsystem die Schubspannung einen kritischen Wert erreicht, werden Versetzungen in Bewegung gesetzt

Es werden bevorzugt Gleitsysteme aktiviert, in denen die nach dem Schmid'schen Schubspannungsgesetz berechneten Schubspannungen am grössten sind

- Wichtig: Der Spannungstensor liefert die gleichen Informationen

Superpositionsprinzip

Mehrere einachsige Spannungszustände lassen sich überlagern:

$$\tau = \sum_i \sigma_i \cdot \cos \lambda_i \cdot \cos \theta_i$$

Tipps zur Serie 7

- 4.1, 4.2, 4.3, 4.5, 4.6: In Übung gelöst.
- 4.4: 1. Variante: Lösen mit Schmidt'schem Schubspannungsgesetz und Superposition (Superposition: Addiere die beiden τ der zwei Spannungen)
2. Variante (einfacher): Versuche, den Spannungszustand als \underline{T} darzustellen und berechne die gesamte Spannung durch $\tau = (\underline{T} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{g}$
- 4.7: a/c/d/e: Gute Aufgaben, die die Übungsstunde zusammenfassen.
b: Allgemeines Hooke'sches Gesetz benutzen (Vorschau auf Mech II):

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] \quad \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]$$

- 4.8/4.9: Vorschau auf Mech II.
Mein Tipp: Momentan ist das eher verwirrend, lass diese Aufgaben sein und kümmere dich nächstes Semester darum ;)
- Viel Glück bei CAD-Prüfung und schöne Weihnachten!