Vb

Kapitel 2:

01.10.20

Konstruktion / Approximation von reellen Zahlen

Ziel: • Wie kann man viele "interessante" reelle Zahlen definieren

• Wie kann man reelle Zahlen mit rationalen Zahlen approximieren?
z.B. $\sqrt{2} \approx 1.4142\ldots$

• Die Dezimalentwicklung einer reellen Zahl

2.1. Intervalle

Ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist eine Teilmenge "zwischen zwei Zahlen
(oder grösser als eine Zahl
" kleiner " ")

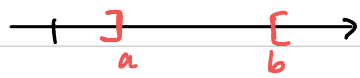
Insgesamt: 9 Arten von Intervallen.

Notation: - $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

- $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

- $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

- $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$



"beschränkte Intervalle"

- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$
"plus unendlich"

- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a$
- $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$
- $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$
"minus unendlich"

- $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

(Bemerkung: USA $[a,b)$ anstatt $[a,b[$
$[a,b]$ = $[a,b]$
$(a,b]$ = $]a,b]$).

(1) abgeschlossen wenn die Ungleichung $\leq$ oder $\geq$ sind

d.h. $[a,b]$
$[a,+\infty[$
$]-\infty,a]$
$\mathbb{R}$

(2) offen wenn die Ungleichungen $<$ oder $>$ sind

d.h. $]a,b[$
$]a,+\infty[$
$]-\infty,a[$
$\mathbb{R}$

links ist äquivalent zu rechts

Satz: Eine Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ ist eine Intervalle $\Leftrightarrow$ " I hat keine Lücke", d.h. falls $a \leq b$, a,b in I,
folgt $[a,b] \subset I$
(alle c mit $a \leq c \leq b$ gehören in I.)

(Die Richtung $\Rightarrow$ ist einfach).

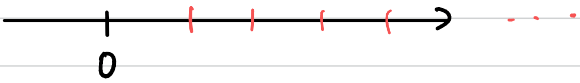
[$A \Leftrightarrow B$ bedeutet $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$; "die Richtung $\Rightarrow$"
ist dann die Aussage "$A \Rightarrow B$"]

2.2. Untere und obere Schranken, Maximum und Minimum

Def: Es sei $A \subset \mathbb{R}$
$c \in \mathbb{R}$

c ist eine obere Schranke von A bzw. untere Schranke von A wenn alle a $A \in a \leq c$ bzw. $c \leq a$ erfüllen.

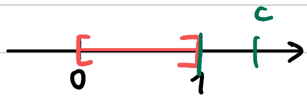
Bspe: (1) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ hat keine obere Schranke.



$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ hat aber untere Schranken : $1, 0, -1, \dots$ sind untere Schranken von $\mathbb{N}$.

(2) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ hat keine obere Schranke und keine untere Schranke.

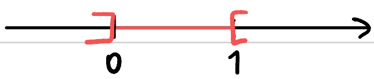
(3) $A = [0,1]$



Alle $c \geq 1$ sind obere Schranken von A.
Keine andere Zahl ist eine obere Schranke.
$\hookrightarrow = (c<1) \rightarrow c < 1 \in A$ ↯ $\rightarrow$ bedeutet c ist <u>nicht</u> eine obere Schranke.

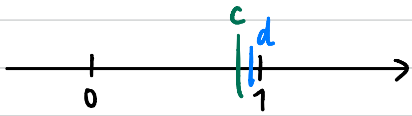
Die unteren Schranken sind die Zahlen $c \leq 0$.

(4) $A =]0,1]$



Die $\begin{cases} \text{oberen Schranken sind die } c \geq 1 \\ \text{unteren " " } c \leq 0 \end{cases}$

$c \geq 1 \Rightarrow c$ eine obere Schranke ist
$c < 1$?



$d = \dfrac{1+c}{2}$ ist in A, grösser als c, s.d. c ist <u>nicht</u> eine obere Schranke von A.

Def: $A \subset \mathbb{R}$
Falls A hat eine obere (bzw. untere) Schranke a in A, sagt man, dass a das Maximum (bzw. Minimum) von A ist.

Bezeichnet : $a = \operatorname{Max}(A)$

z.B. $\max([0,1]) = 1$; $]0,1[$ hat <u>kein</u> Maximum

Wenn max (A) existiert, a = Max (A), folgt alle $a' \in A$ sind $a' \leq a$; insbesondere ist a eindeutig.

Dann sind die oberen Schranken von A die Zahlen $\geq$ max (A); das Maximum ist die kleinste obere Schranke.

2.3. Infimum / Supremum / Vollständigkeit

Nicht viele Mengen $A \subset \mathbb{R}$ haben ein Maximum, obwohl sie eine obere Schranke haben.

Satz (Skript 2.3.1):

$A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$
Falls A eine obere Schranke hat (bzw. eine untere Schranke) hat A eine "beste obere Schranke", d.h. eine kleinste, d.h. die Menge
$M = \{c \in \mathbb{R} \mid c$ ist eine obere Schranke von A$\}$ hat ein Minimum
min (M) = das Supremum von A = Sup (A)

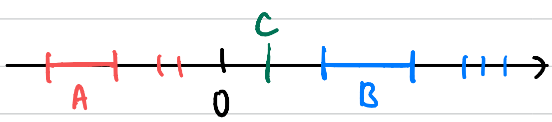
(bzw. $M' = \{c \in \mathbb{R} \mid c$ eine untere Schranke von $\}$
hat ein Minimum min (M) = das Supremum von A
= Sup (A)

Bsp. $A =]0, 1[$
$M = \{c \in \mathbb{R} \mid c \geq 1\}$
$= [1, +\infty[$
Min (M) = 1
$\Rightarrow$ Sup (A) = 1

80

Beweis: Wichtig ist die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$!

(Erinnerung: (Vollständigkeit)



$\emptyset \neq A, B \neq \emptyset$ "getrennt" $\Rightarrow \exists c$ "in der Mitte")

$A \neq \emptyset$

Sei $B = M = \{c \in \mathbb{R} \mid c$ obere Schranke von $A\}$

Hyp: $B \neq \emptyset$

Jede $b \in B$ ist eine obere Schranke von A sodass $b \geq a$ für alle $x \in A$

Sei c "zwischen A und B"

D.h. für alle $a \in A$, $b \in B$

$$\boxed{a \leq c} \boxed{c \leq b}$$

c ist eine obere Schranke von A: $c \in B$

c ist die kleinste obere Schranke

d.h. $c = \operatorname{Min}(B)$.

(Ende des Beweises)

z.B. $\sqrt{2}$ als Supremum einer Menge

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0,\ x^2 \leq 2\} \subset \mathbb{Q}$$

Es gilt: $\operatorname{Sup}(A) = \sqrt{2}$ (Bsp. 2.3.2 (3) im Skript).

Notation:

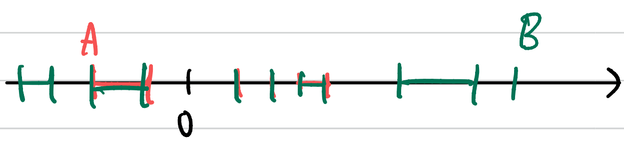
Falls $A \subset \mathbb{R}$ und A hat keine obere (bzw. untere) Schranke, bezeichnen wir

$$\operatorname{Sup}(A) = +\infty$$
$$(\text{bzw. } \operatorname{Inf}(A) = -\infty)$$

Eigenschaft: Falls $\emptyset = A \subset B$ folgt

(1) wenn B von oben beschränkt, so ist A,
$$\operatorname{Sup}(A) \leq \operatorname{Sup}(B)$$

(2) wenn B von unten beschränkt ist, so ist A,
$$\operatorname{Inf}(B) \leq \operatorname{Inf}(A)$$



Bsp: $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$

von unten beschränkt — nicht von unten/oben beschränkt

Eig. (2) Falls A ein Maximum (bzw. Minimum) hat, hat A ein Supremum (bzw. Infimum) und

$$\text{Max}(A) = \text{Sup}(A)$$
$$(\text{bzw. } \text{Min}(A) = \text{Inf.}(A))$$

Zusammenfassung:

$\emptyset \neq A$, $A \subset \mathbb{R}$, A hat eine obere Schranke.

$c \in \mathbb{R}$

Wie beweist man, dass $c = \text{Sup}(A)$?

(1) Zuerst überprüfen, dass $c \geq a$ für alle $a \in A$
[d.h. c ist eine obere Schranke]
d.h. $c \geq \text{Sup}(A)$

(2) Dann überprüfen, dass wenn $d < c$, gibt es mind. 1 Zahl in A ($a \in A$) mit $d < a$
[d.h. d ist nicht eine obere Schranke]
d.h. $c \leq \text{Sup}(A)$

V7

2.4 Folgen

07.10.20

Def: Eine Folge (von komplexen Zahlen) ist eine Abbildung $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$

gliedernde Folge

Bezeichnet: $f = (f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$[f(1)=a_1, f(2)=a_2, \dots]$

oder $(a_1, a_2, \dots)$

Manchmal beginnt Folge mit a_0: $(a_0, a_1, a_2, \dots) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

⚠ Folgen sind Abbildungen.

Bemerkungen: ① $f_1 = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleich $f_2 = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\Updownarrow$

für $n\in\mathbb{N}$, $a_n = b_n$

② Eine Folge (a_n) ist nicht die Menge $\{a_n\}$

z.B. $f = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$

$\{a_n\} = \{1, -1\}$

③ Wir benutzen Folgen um reelle Zahlen zu approximieren:

$(3, 3.1, 3.14, 3.141, \dots)$

Beispiele: (1.) [arithmetische Folgen]

$$(an+b)_{n\in\mathbb{N}_0} = (b, a+b, 2a+b, \dots)$$

(2). [geometrische Folgen]

$$(ba^n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (b, ba, ba^2, \dots)$$

(3). [induktive Folgen] = [rekursive Folgen]

gegeben ist a_1
und die Regel $a_{n+1} = f(a_n)$
wo $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auch gegeben ist.

$$\boxed{\begin{aligned} \text{z.B. } a_1 &= 2 \\ a_{n+1} &= a_n^2 - 1 \end{aligned}}$$

[z.B. (Fibonacci Zahlen) $a_1 = a_2 = 1$
$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$]

Def. X Menge (D) [z.B $X = \mathbb{N}$]

$$f_1 : X \to \mathbb{C} \qquad (a_n)$$
$$f_2 : X \to \mathbb{C} \qquad (b_n)$$

① $f_1 + f_2 : X \to \mathbb{C}$
$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$ $\qquad (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$

② $f_1 f_2 : X \to \mathbb{C}$ $\qquad (a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$
$(f_1 f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$

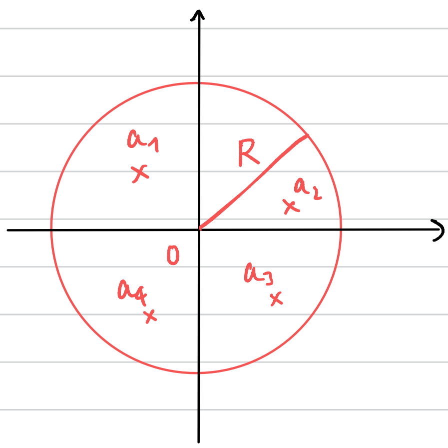
③ falls $f_2(x) \neq 0$ für alle $x \in X$: $\qquad \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

$(a_n + b)_n = (a_n)_n + (b)_n$

Def: Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt wenn es gibt $R \in \mathbb{R}_+$ mit für alle n, $|a_n| \le R$.

$a_n \in \mathbb{C}$



$a \in \mathbb{R}$

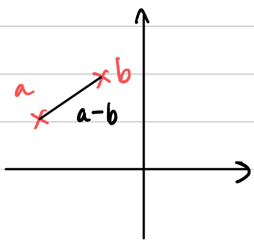
$-R \le a_n \le R$

z.B. $(a_n + b)_n$ ist beschränkt $\Leftrightarrow$ $a = 0$

$(ba^n)_n$ ist beschränkt falls $|a| \le 1$

2.5 Konvergent

Motivation: eine Folge (a_n) "konvergiert gegen a" wenn die a_n "besser und besser Approximationen zu a" sind.



pre Def: $a, b \in \mathbb{C}$
Der Abstand zwischen a und b ist $|a - b|$

a " gute Approximation " von b falls $|a-b|$ klein ist

a' " bessere Approximation" von b falls $|a'-b| < |a-b|$

Def. [Konvergenz]

(a_n) Folge
$a \in \mathbb{C}$

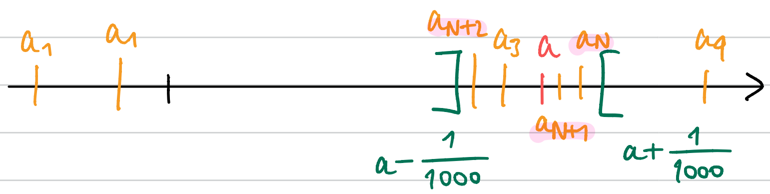
(a_n) konvergiert gegen a bedeutet:

Notation: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oder $(a_n \to a)$

für jede (epsilon) $\varepsilon > 0$, es gibt $N \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq N$

$\Rightarrow$ $[\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |a_n - a| < \varepsilon]$ Def. als log. Aussage

$\varepsilon = \frac{1}{1000}$



$a_n \in \mathbb{R}$
$a \in \mathbb{R}$

a_1, a_2, a_4 keine gute Approximation

a_3 gute Approximation

$|a_n - \overset{\text{lim.}}{a}| < \varepsilon$

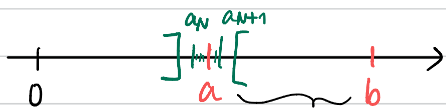
Bemerkungen:

① eine Folge (a_n) muss nicht konvergieren!

[z.B. : $((-1)^n) = (-1, 1, -1, 1, \dots)$ konvergiert nicht].

$\Rightarrow$ keine " Grenze "

② falls (a_n) konvergiert, ist der Grenzwert a eindeutig.



[Wenn a_n zu nah zu a ist, kann a_n nicht b approximieren].

③ Falls (a_n), (b_n) Folgen sind, und es gibt $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n = b_n$ für $n \geq N$, dann konvergiert $(a_n) \Leftrightarrow (b_n)$ konvergiert

[und dann ist $\lim a_n = \lim b_n$]

("konvergent" ist eine asymptotische Eigenschaft).

④ $(a_n \to a) \iff (|a_n - a| \to 0)$

[Warum? sei $b_n = |a_n - a| \in \mathbb{R}_+$
$|b_n - 0| = |b_n| = b_n$]

⑤ Falls $a_n \to 0$ und (b_n) beschränkt ist, dann folgt $a_n b_n \to 0$.

[Warum? Sei $R > 0$ mit $|b_n| \leq R$
dann für $\varepsilon > 0$ ist $|a_n b_n| < \varepsilon$
für alle n sodass $|a_n| < \frac{\varepsilon}{R}$,
d.h. für alle $n \geq N$ wo N ist gewählt, sodass $|a_n| < \frac{\varepsilon}{R}$ für $n \geq N$]

Hilfsatz: ① (a_n) konvergent $\Rightarrow$ (a_n) ist beschränkt.

② Wenn $|a_n - a| \leq b_n$ und (b_n) konvergent gegen 0, dann $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$

Eigenschaft sehr nützlich weil kein y mehr vorkommt.

(Skript 2.5.9)
Satz:

$(a_n), (b_n)$ Folgen

Hyp: $a_n \to a$, $b_n \to b$

① $(a_n + b_n)_n \longrightarrow a + b$

② $(a_n b_n)_n \longrightarrow ab$

③ Falls $b \neq 0$, ist $b_n \neq 0$ für $n \geq M$, und die Folge

$$c_n = \begin{cases} 0, & n < M \\ \frac{a_n}{b_n}, & n \geq M \end{cases}$$

c_n konvergiert gegen $\frac{a}{b}$.

Beweis:

① Zurück zur Definition:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \; |(a_n + b_n) - (a+b)| < \varepsilon \quad ?$$

$$= (a_n - a) + (b_n - b)$$

Sei $\varepsilon > 0$. Seit

$$|(a_n+b_n) - (a+b)| \underset{\text{(Dreiecksungleichung)}}{\leq} |a_n - a| + |b_n - b|$$

Es gibt $N_1 \in \mathbb{N}$ sodass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq N_1$

Es gibt $N_2 \in \mathbb{N}$ " $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq N_2$

$$\Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow |(a_n+b_n) - (a+b)| < \varepsilon. \qquad \text{QED.}$$

② [Ziel: $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$]

$$a_n b_n - ab = (a_n - a) b_n - ab + a b_n$$

$$= \underbrace{(a_n - a)}_{\to 0} b_n + a \underbrace{(b_n - b)}_{\to 0}$$

$$|a_n b_n - ab| \underset{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} |(a_n - a) b_n| + |a(b_n - b)|$$

$$= \underbrace{\underbrace{|b_n|}_{\text{beschränkt}} \underbrace{|a_n - a|}_{\to 0}}_{\text{Produkt konvertiert gegen 0}} + \underbrace{|a||b_n - b|}_{\text{bes.} \to 0}$$

$\to 0$ Bem. ⑤ (S.37)

$\to 0 \quad (1)$

Hilfsatz (2)

$$\Rightarrow \lim a_n b_n = ab$$

(Skript 2.5.10)

Satz: (a_n) Folge, $a_n = x_n + i y_n$ (d.h. a_n ist eine Folge von komplexen Zahlen)

① $(a_n \to a) \Leftrightarrow (x_n \to x \text{ und } y_n \to y)$

② Falls $a_n \to a$ folgt: $\overline{a_n} \to \overline{a}$

$|a_n| \to |a|$

2.6. Beispiele von Konvergenz

(Skript 2.6.1.)

Satz:

Es gilt:

auswendig!

①	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$	für $k>0$	$\frac{1}{n} \to 0$
②	$\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$	für $\lvert a\rvert < 1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$
③	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{b^n} = 0$	für $\begin{cases} k\in\mathbb{R} \\ \lvert b\rvert > 1\end{cases}$	$\frac{n^3}{2^n} \to 0$
④	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$	für $a\in\mathbb{R}$	$\frac{2^n}{n!} \to 0$

[Bspe]

V8 08.10.20

Beweis:

① $\left|\frac{1}{n^k}\right| = \frac{1}{n^k} < \varepsilon$ ist äquivalent mit

$n\in\mathbb{N}$ $\quad n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/k} = N$

② ist Sonderfall von ③ mit $k=0$, $b=\frac{1}{a}$

③ später (monotone Folgen)

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} = \frac{\overbrace{|a|\cdot\ldots\cdot|a|}^{n}}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}$$

Sei $N > 2|a|$; für $n \geq N$ ist $\left|\frac{a^n}{n!}\right| \leq \underbrace{\left(\frac{|a|^N}{N!}\right)}_{\text{feste Zahl}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N}$

(weil a geg. Zahl)

$$= \underbrace{\frac{(2|a|)^N}{N!}}_{\text{beschränkt}} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\to 0}$$

$\Rightarrow \frac{a^n}{n!} \to 0$

Beispiel (2.6.2):

$1 \leq k \leq l \quad (\text{in } \mathbb{N})$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + a_{k-2} n^{k-2} + \dots + a_1 n + a_0}{b_l n^l + \dots + b_1 n + b_0} = ?$$

[wobei: $a_i \in \mathbb{C}$, $b_j \in \mathbb{C}$, $a_k \neq 0$, $b_l \neq 0$]

$$\frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + a_{k-2} n^{k-2} + \dots + a_1 n + a_0}{b_l n^l + \dots + b_1 n + b_0} = \frac{a_k n^k \cdot \left(1 + \frac{a_{k-1}}{a_k}\overset{\to 0}{\frac{1}{n}} + \dots + \frac{a_0}{a_k}\overset{\to 0}{\frac{1}{n^k}}\right)}{b_l n^l \left(1 + \dots + \frac{b_0}{b_l}\underset{\to 0}{\frac{1}{n^l}}\right)}$$

$\xrightarrow{n\to\infty} 1$ [dividierung]

$$= \frac{a_k}{b_l} \cdot \frac{1}{n^{l-k}} \times (\text{konv. gegen } 1)$$

2 Fälle: Fall 1: $k = l$, dann $\to \frac{a_k}{b_l}$

Fall 2: $l > k$, dann $\to 0$

$$\boxed{\text{Es folgt } \lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + \dots + a_1 n + a_0}{b_l n^l + \dots + b_1 n + b_0} = \begin{cases} \frac{a_k}{b_l} & \text{falls } k = l \\ 0 & \text{falls } l > k \end{cases}}$$

Falls $k > l$: wir werden sehen, dass kein Grenzwert existiert.

2.7 Dezimalentwicklung

[Ziel: Jede $a \in \mathbb{R}$ als Grenzwert einer Folge mit der Form

$$a_n = (\text{nat. Zahl}) + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100} + \dots + \frac{d_n}{10^n}$$

darstellen, wo $d_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$]

z.B. $\sqrt{2} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \dots$]

$= 1.41\dots$

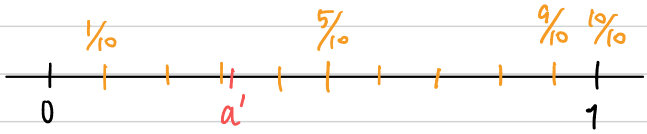
Vorgehensweise:

"unterteil von" $\subset$

1. Wir nehmen an, $a \geq 0$
2. Es gibt eine eindeutige Zahl $\lfloor a \rfloor \in \mathbb{N}_0$ sodass $\lfloor a \rfloor \leq a < \lfloor a \rfloor + 1$

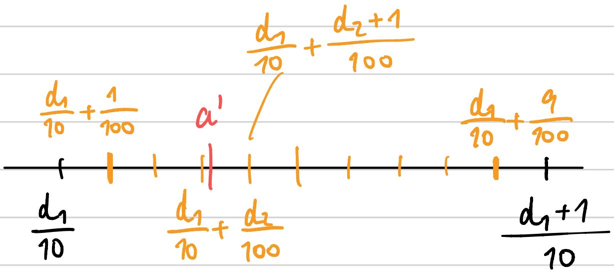
[z.B. $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0$

3. Sei $a' = a - \lfloor a \rfloor$, $a' \in [0, 1[$



Es gibt genau ein $d_1 \in \{0, \dots, 9\}$ sodass $\frac{d_1}{10} \leq a' < \frac{d_1+1}{10}$;

4. sei $a_1 = \frac{d_1}{10}$

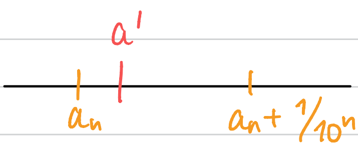


Es gibt genau ein $d_2 \in \{0, \dots, 9\}$ sodass $\frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100} < a' < \frac{d_1}{10} + \frac{d_2+1}{100}$

5. Wiederholung ... für jede n. wir finden $d_1, \dots d_n$; n $\{0, \dots, 9\}$ sodass

$$\underbrace{\frac{d_1}{10} + \dots + \frac{d_n}{10^n}}_{a_n} \leq a' < \frac{d_1}{10} + \dots + \frac{d_n+1}{10^n}$$

$$\leq a' < a_n + \frac{1}{10^n}$$



d.h. $|a_n - a'| \leq \frac{1}{10^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

sodass $a' = \lim_{n\to\infty} a_n$

$$a = \lfloor a \rfloor + \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (\lfloor a \rfloor + a_n)$$

2.8. Konvergenz überprüfen

Def: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen Zahlen ist:

(1). Wachsend falls $a_{n+1} \geq a_n$ für $n \in \mathbb{N}$
(2). fallend falls $a_{n+1} \leq a_n$ für $n \in \mathbb{N}$ } Monoton

Monoton bedeutet entweder (1) oder (2).

[z.B. $(2n)_n$ wachsend
$(1/n)_n$ fallend
$((-1)^n)_n$ nicht monoton

Satz (2.8.3): Eine monotone Folge (a_n) von reellen Zahlen konvergiert genau dann wenn sie beschränkt ist.

Falls (a_n) wachsend ist, gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

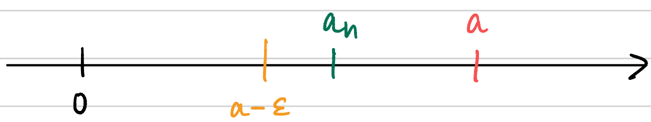
und falls (a_n) fallend ist, gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Beweis (für (a_n) wachsend):

Falls (a_n) konv. ist sie beschränkt. ✓
Wir nehmen an, dass (a_n) beschränkt ist.
Insbesondere ist die Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ nicht leer und von oben beschränkt:
$\Rightarrow$ A hat ein Supremum $a \in \mathbb{R}$

Wir überprüfen, dass $a_n \longrightarrow a$.



Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $a-\varepsilon < a$, so ist $a-\varepsilon$ keine obere Grenze von A; es gibt $N \in \mathbb{N}$ sodass $a-\varepsilon < a_N \leq a$
$a = \operatorname{Sup}(A)$

Für $n \geq N$ ist: $a-\varepsilon < a_N \leq a_n \leq a$ (die Folge ist wachsend) insbesondere ist $|a - a_n| = a - a_n < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. QED.

Beispiele:

① $a_n = \dfrac{n^k}{b^n}$, $\begin{cases} k \in \mathbb{R} \\ |b| > 1 \end{cases}$ $(b \in \mathbb{C})$ → Folge konvergiert gegen 0.
→ Folge ist nicht monoton.

$|a_n| = \dfrac{n^k}{|b|^n}$ Folge mit reellen Zahlen → genug beweisen, dass:

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{|b|^n} = 0$$

Sei $b_n = \dfrac{n^k}{|b|^n}$; $b_n \in \mathbb{R}$, $b_n \neq 0$, $b_n > 0$ (Überprüfen, ob Folge fallend ist:)

aus Def: $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{1}{|b|} \cdot \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^k$

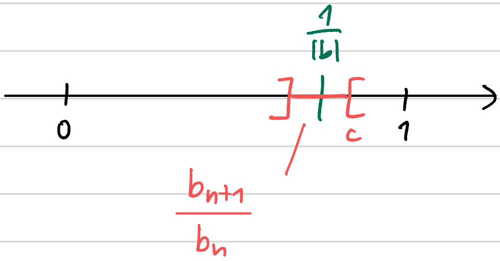
$\dfrac{n+1}{n} \to 1 + \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^k \to 1^k = 1$

$\dfrac{1}{|b|}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^k \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{|b|} < 1$

Es folgt, dass es eine Zahl $M \in \mathbb{N}$ und $0 < c < 1$ gibt, sodass

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} \leq c \quad \text{für } n \geq M \qquad \Rightarrow b_{n+1} \leq b_n c \leq b_n \text{ für } n \geq M$$



Satz ⇒ der Grenzwert $b = \lim_{n\to\infty} b_n$ existiert.

Wie beweist man, dass $b = 0$ ist?:

aus Satz $b_{n+1} \leq c b_n$ für $n \geq M$ (mit $c < 1$)

$b = \operatorname{Inf}. \{ b_n \mid n \geq M \} = \operatorname{Inf}.(B)$

$\Rightarrow b \leq b_{n+1} \leq c b_n$ für $n \geq M$

$\Rightarrow c^{-1} b \leq b_n$ für $n \geq M$

$\Rightarrow c^{-1}b \leq b$ (weil $c^{-1}b$ die untere Grenze von B ist)

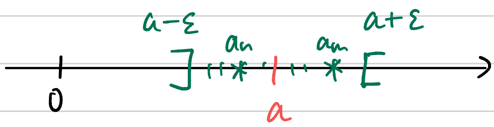
$\Rightarrow b = 0$ (weil $c < 1$)

Es gibt ein Kriterium, welches bei <u>allen</u> Folgen benutzt werden kann, um die Konvergenz zu überprüfen:

$\Rightarrow$ Das Cauchy Kriterium.

<u>Motivation:</u> sei (a_n) konvergent gegen $a \in \mathbb{C}$.

d.h. $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq N$

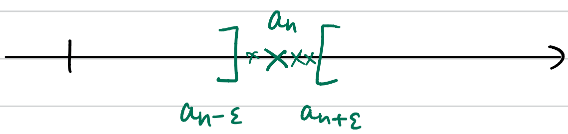


$$|a_n - a_m| < 2\varepsilon \quad \text{für } n, m \geq N$$

<u>Def.</u> (alle Folgen, die diese Def. erfüllen, sind konvergent):

Eine Cauchy-Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge sodass:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall m \geq N, |a_n - a_m| < \varepsilon$$



<u>Satz</u> (2.8.7): Jede Cauchy-Folge konvergiert.

Cauchy-Folge = konvergente Folgen (aber nicht immer)

V9

15.10.20

Konkreterweise: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Wie überprüft man, dass (a_n) eine Cauchy-Folge ist?

Einfachste Methode: $n, m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$,

man versucht, eine Abschätzung

$$|a_m - a_n| \leq b_n$$

mit $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ zu finden

Wenn man das findet, dann ist (a_n) eine Cauchy Folge.
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ sodass $|b_n| = b_n < \varepsilon$ für $n \geq N$, und dann
für $n, m \geq N$

entweder $m \geq n \Rightarrow |a_m - a_n| \leq b_n < \varepsilon$

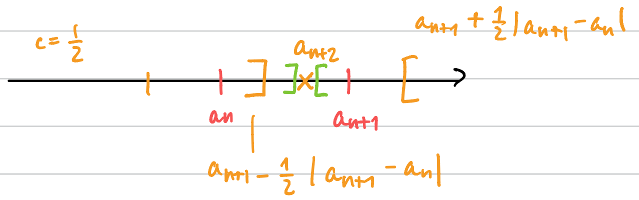
oder $n \geq m \Rightarrow |a_n - a_m| \leq b_m < \varepsilon$

Bsp: gut um zu beweisen, dass eine Folge konvergiert.

(1) **Satz:** (28.10) (a_n) Folge, $0 \leq c \leq 1$

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq c\,|a_{n+1} - a_n| \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

Hyp:



Dann konvergiert (a_n).

Beweis: Cauchy-Kriterium

Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$

$$|a_m - a_n| = |(a_m - a_{m-1}) + (a_{m-1} - a_{m-2}) + \ldots + (a_{n+1} - a_n)|$$

(wollen Abstand zw. a_m und a_n abschätzen)

(Dreiecksungleichung benutzen): $\leq |a_m - a_{m-1}| + \ldots + \underbrace{|a_{n+2} - a_{n+1}|}_{\leq c|a_{n+1} - a_n|} + |a_{n+1} - a_n|$

$\leq c^2 |a_{n+1} - a_n|$

$m = n+1+(m-1-n)$

$\leq c^{m-n-1} |a_{n+1} - a_n|$

$$\rightsquigarrow |a_m - a_n| \leq \underbrace{(1 + c + \ldots + c^{m-n-1})}\,|a_{n+1} - a_n|$$

$$= \frac{1-c^m}{1-c}\,|a_{n+1} - a_n| \,, \quad (\text{weil } c \neq 1)$$

$$|a_m - a_n| \leq \underbrace{\frac{1}{1-c}\,|a_{n+1} - a_n|}_{\text{hängt nur von } n \text{ ab!}} \,, \quad m \geq n$$

Weiter: $|a_{n+1} - a_n| \leq c\,|a_n - a_{n-1}|$
$\leq c^{n-1}\,|a_2 - a_1|$

Wir wissen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} c^n = 0$ weil $|c| < 1$
$\uparrow$ konvergiert gegen 0

Bsp (2): Sei $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n+1} \end{cases}$

[d.h. $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$]

Überprüfen, dass diese Folge nicht konvergiert. Wie?:
Wir überlegen:
$$|a_{2n} - a_n| = \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{n+1} \quad (n \text{ Zahlen})$$
$$\geq n \cdot \frac{1}{2n} \quad \text{die kleinste dieser } n \text{ Zahlen}$$
$$= \frac{1}{2}$$

Abstand zw. $a_{2n} - a_n$ ist mind. $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Das Cauchy-Kriterium ist nicht erfüllt (mit $\varepsilon = \frac{1}{2}$ z.B.)

2.9 Teilfolgen

Def: Sei (a_n) eine Folge von $\mathbb{C}$.
Eine andere Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ heisst Teilfolge von (a_n) falls:
für $k \in \mathbb{N}$, $b_k = a_{n_k}$

wo $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$

Bsp: $a_n = 2^n$
- $(b_k) = (a_{2k}) = (2^{2k})_{k\in\mathbb{N}}$
- $b_k = 2^{2^k}$, $n_k = 2^k$
- $b_k = 2^{k!}$, $n_k = k!$

alle sind Teilfolgen von (2^n).

- $(1, 4, 2, 16, 8, \dots) \leftarrow$ keine Teilfolge von (2^n) (alle Glieder sind zwar gleich, aber die Ordnung (= Reihenfolge) ist anders)

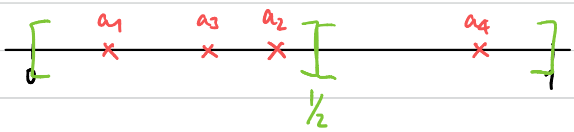
z.B. $a_n = (-1)^n$
$(a_n) = (-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$
(a_n) konvergiert nicht, aber hat Teilfolgen, die konvergent sind:
z.B. $(a_{2k}) = (1, 1, 1, 1, \dots, 1, \dots)$
$\longrightarrow 1$

⚠ Jede beschränkte Folge (a_n) in $\mathbb{C}$ hat eine Teilfolge, die konvergent ist.

Satz: (Bolzano, Weierstrass)
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge.
Dann existiert (mindestens) eine Teilfolge von (a_n), die konvergent ist.

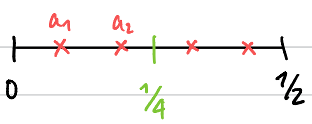
Bem.: Für eine Folge (a_n), der Grenzwert einer Teilfolge von (a_n) heisst Häufungspunkt von (a_n)

Idee: $a_n \in [0,1]$



$[0,1] = [0,\frac{1}{2}]\quad [\frac{1}{2},1]$

Entweder: es gibt unendlich viele n mit $a_n \in [0,\frac{1}{2}]$ ✓ (nehmen an, dass das der Fall ist)
Oder: es gibt unendlich viele n mit $a_n \in [\frac{1}{2},1]$



Wieder: entweder gibt es unendlich viele n mit $a_n \in [0,1/4]$ oder mit $a_n \in [1/4, 1/2]$

... → wir bilden Intervalle I_k für $k \geq 0$ sodass Länge $(I_k) = 2^{-k}$
und es gibt unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in I_k$
→ Es gibt eine Teilfolge (b_k) mit $b_k \in I_k$

(oben: $I_0 = [a,1]$
$I_1 = [0,\frac{1}{2}]$
...)

Man überprüft dann, dass b_k konvergiert.

$(I_{k+1} \subset I_k)$ (genauer: siehe Skript)

Anwendung (von Satz von Bolzano): Beweis, dass eine Cauchy Folge konvergiert
Idee: Sei (a_n) eine Cauchy Folge.

Schritt 1: (a_n) ist beschränkt
Schritt 2: Satz von Bolzano-Weierstrass:
⇒ Es gibt (mind.) eine konvergente Teilfolge von (a_n)
Sei a der Grenzwert.
Man beweist, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. (genauer siehe Skript).

Bemerkung: ① Falls (a_n) konvergent ist, dann sind alle ihre Teilfolgen konvergent mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$

[z.B. $\lim a_{n+1} = \lim a_n$]

② falls alle konvergente Teilfolgen von (a_n) denselben Grenzwert haben, (und die Folge ist beschränkt), dann konvergiert (a_n).

2.10 Reihen

Falls eine Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch eine Regel $s_{n+1} = s_n + a_n$, $n \in \mathbb{N}$ [s_1 gegeben, $s_1 = a_1$, $s_2 = s_1 + a_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$, ...] definiert ist, sagt man, dass die Folge die Reihe mit Gliedern $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

Bezeichnet: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ oder $\sum a_n$

Falls die Folge (s_n) konvergiert, sagt man, dass $\lim_{n\to\infty} s_n$ die Summe der Reihe ist:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Bsp: (1). Dezimalentwicklung von $a \in \mathbb{R}_+$
$d_n \in \{0, \dots, 9\}$ Ziffern

$$\Rightarrow a = \underbrace{\lfloor a \rfloor}_{\in \mathbb{N}_0} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$$

(2). Die "Geometrische Reihe"

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \qquad |a| < 1$$

sehr wichtige Reihe!

weil $1 + a + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1-a}$

und $\lim_{n\to\infty} a^{n+1} = 0$ weil $|a| < 1$

⚠ Reihen sind besondere Folgen. (alle Eigenschaften von Folgen gelten auch für Reihen)

Satz: (2.10.3) Seien $\sum a_n$, $\sum b_n$ konvergent mit Summen a und b.

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ [$a_n = 3n - 5n - 1 \longrightarrow 0$]

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) = a + b$

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty} (z a_n) = z \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ für $z \in \mathbb{C}$
$= z a$

(4) Falls $a_n \leq b_n$ für $n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow a \leq b$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n = \bar{a}$

(6) $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Re}(a_n) = \mathrm{Re}(a)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Im}(a_n) = \mathrm{Im}(a)$

<u>Wichtig</u>: es gibt Folgen (a_n) mit $\lim a_n = 0$, die aber so sind,

dass $\sum a_n$ <u>nicht</u> konvergiert.

z.B. $a_n = \frac{1}{n}$

$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ konvergiert nicht !

Die Folge (s_n) mit $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $a_k \in \mathbb{R}$
ist <u>wachsend</u>, genau dann wenn $s_n - s_{n-1} = a_n \geq 0$ für $n \in \mathbb{N}$.

Satz: (2.10.5) Falls $a_n \in \mathbb{R}_+$ für $n \in \mathbb{N}$, ist $\sum a_n$ konvergent $\Leftrightarrow$ es gibt $R \in \mathbb{R}_+$ mit $a_1 + \dots + a_n \leq R$ für $n \in \mathbb{N}$

z.B. Sei $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $d_n \in \{0, \dots, 9\}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Dann ist $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$ konvergent:

$$\frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100} + \dots + \frac{d_n}{10^n} \leq 9\left(\frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{10^n}\right)$$

$$= \frac{9}{10}\left(1 + \dots + \frac{1}{10^{n-1}}\right)$$

$$\leq \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - 1/10} = 1$$

$\Rightarrow$ Die Reihe $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$ konvergiert.

Cauchy Kriterium: $m, n \in \mathbb{N},\ m \geq n$

$$|s_m - s_n| = |a_m + a_{m-1} + \dots + a_{n+1}| \leq |a_m| + |a_{m-1}| + \dots + |a_{n+1}|$$

$$= t_m - t_n = |t_m - t_n|$$

Dreiecksungleichung

wo $t_n = |a_1| + \dots + |a_n|$

Kor. Falls die Reihe $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ konvergiert, konvergiert $\sum a_n$.

V10

15.10.20

Def: (2.10.6) Eine Reihe $\sum a_n$ konvergiert absolut falls $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ konvergent ist.

$$(\Leftrightarrow \exists R, \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_1| + \dots + |a_n| \leq R)$$

Satz: (2.10.7) Jede absolut konvergente Reihe $\sum a_n$ konvergiert und

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$$

Beweis der Dreiecksungleichung:

für jede n gilt: $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right|}_{=\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right|} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$$

Beispiel (konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe)

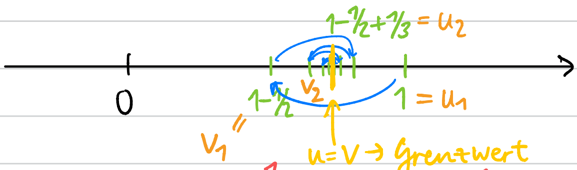
Es gibt Reihen, die konvergent sind, aber nicht absolut.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

① $\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \frac{1}{n}$ und $\sum \frac{1}{n}$ ist <u>nicht</u> konvergent.

$\rightsquigarrow$ Diese Reihe kann <u>nicht</u> absolut konvergent sein.

②



$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

$$u_n := S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$v_n := S_{2n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}$$

Es folgt: $v_1 \leq \ldots \leq v_{n+1} \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \ldots \leq u_1$

$\Rightarrow$ (v_n) ist wachsend und beschränkt
$\Rightarrow$ (u_n) ist fallend und beschränkt

$\Rightarrow$ beide konvergieren. $\rightarrow$ es existiert $u = \lim u_n$ und $\lim v_n = v$

$$u_n - v_n = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow u = v \text{ (Grenzwert)}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ existiert und ist $= u = v$

d.h. diese Reihe konvergiert, aber nicht absolut.

Satz: (2.10.10) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\begin{cases} a_n \in \mathbb{R}^+ & \text{(Glieder sind nicht negativ)} \\ a_{n+1} \leq a_n & \text{(eine fallende Folge)} \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 & \text{(die gegen 0 konvergiert)} \end{cases}$

z.B. $a_n = \frac{1}{n}$

Dann konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ („alternierende Reihe")

Bemerkung: absolut konvergente Reihen sind "viel besser" als konv. / nicht absolute Reihen. (viele Sätze gelten nur für abs. konv. Reihen).

Beispiel: $a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_3 + a_2 = a_2 + a_1 + a_3 \ldots$

Def: Sei $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ eine Reihe. Eine Umordnung der Reihe ist eine Reihe $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k$ mit $b_k = a_{f(k)}$ wo $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv ist.

z.B. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$
$a_2 + a_1 + a_4 + a_3 + a_6 + a_5 + \cdots$ (Umordnung)

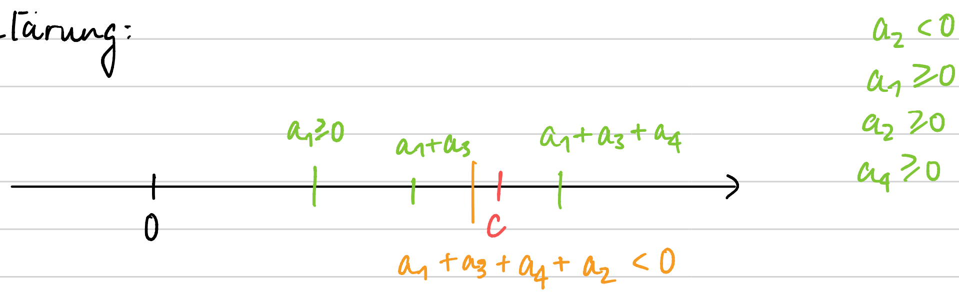
Satz: ① Falls $\sum a_n$ absolut konvergent ist, ist jede Umordnung $\sum b_k$ auch abs. konv. und hat dieselbe Summe

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

② Falls $a \in \mathbb{R}$, und $\sum a_n$ konvergiert, aber nicht abs., dann gibt es für alle $c \in \mathbb{R}$ eine Umordnung $\sum b_k$ die konvergent ist mit

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k = c$$

Intuitive Erklärung:



$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \text{ nicht konvergent}$$

$\Rightarrow$ Partielle Summen sind nicht beschränkt

$\Rightarrow \sum_{a_n \geq 0} a_n$ nicht konvergent.

$\left[\sum |a_n| = \sum_{a_n \geq 0} a_n - \sum_{a_n < 0} a_n \right.$

und $\sum_{a_n \geq 0} a_n + \sum_{a_n < 0} a_n = \sum a_n$ existiert $\left.\right]$.

Idee: hin & zurück gehen.

$\lim_{n \to \infty} a_n \longrightarrow 0$ (genauer: siehe Skript Burger)

Falls $a_n = \frac{1}{n}$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n}{n}$ konvergiert, nicht absolut, nicht alternierend.

(i = imaginäre Zahl)

<u>Konkreterweise</u>: um zu überprüfen, dass $\sum a_n$ konvergent ist, versucht man, eine Ungleichung

$|a_n| \leq b_n$ zu finden mit der Eigenschaft,

dass $\sum b_n$ konvergent ist.

$$(\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sum b_n)$$

Falls $|a_n| \geq b_n$ und $\sum b_n$ nicht konvergent ist, dann konvergiert $\sum a_n$ nicht absolut. (aber vlt. konvergiert sie trotzdem, einfach nicht abs.)

Satz (2-10-11): (1). $k>0$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}$ ist (absolut) konvergent falls $k>1$ und nicht konvergent falls $k \leq 1$.

z.B. $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert

wichtig! wissen.

(2). $k \in \mathbb{R}$, $\underbrace{|b|>1}_{\text{komplexe Zahl}}$ $\sum \frac{n^k}{b^n}$ konvergiert absolut.

und konvergiert nicht falls $k \geq 0$ und $|b| \leq 1$

(3). $a \in \mathbb{C}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ konvergiert absolut (für alle a).

Beweis:

① $\sum \frac{1}{n^k}$:

$k=1$: $\sum \frac{1}{n}$ ist nicht konvergent (siehe V9)

$k<1$: $\frac{1}{n^k} \geq \frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ die Reihe $\sum \frac{1}{n^k}$ konvergiert nicht

$k>1$: sei $n \in \mathbb{N}$, sei m s.d. $n \leq 2^m - 1$

$$1 + \frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{n^k} \leq 1 + \dots + \frac{1}{n^k} + \dots + \frac{1}{(2^m-1)^k}$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k}\right) + \left(\frac{1}{4^k} + \dots + \frac{1}{7^k}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(2^{m-1})^k} + \dots + \frac{1}{(2^m-1)^k}\right)$$

$$\leq 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^k} + 4 \cdot \frac{1}{4^k} + 2^{m-1} \cdot \frac{1}{(2^{m-1})^k}$$

\# der Zahlen — grösste Zahl (in der partiellen Summe)

$$= 1 + 2^{1-k} + (2^{1-k})^2 + \dots + (2^{1-k})^{m-1}$$

$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ mit $a = 2^{1-k}$, $0 < a < 1$ ist konvergent. (aus V9)

$\Rightarrow$ für alle $1 + \frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k$

$\Rightarrow \sum \frac{1}{n^k}$ ist konvergent für $k > 1$.

② $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^k}{b^n}$ $k \in \mathbb{R}$, $|b| > 1$

<u>$k=0$</u>: $\sum \frac{1}{b^n} = \sum \left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1}{1 - 1/b}$ Die Reihe konvergiert <u>absolut</u>.

$\rightarrow$ weil $\left|\frac{1}{b^n}\right| = \frac{1}{|b|^n}$

mit $\left|\frac{1}{b}\right| < 1$

<u>$k < 0$</u>: $\left|\frac{n^k}{b^n}\right| \leq \frac{1}{|b|^n} \Rightarrow$ abs. konv. (Reihe konvergiert gegen 0)

<u>$k > 0$</u>: Idee: $\frac{n^k}{b^n}$ mit $\frac{1}{c^n}$ vergleichen, wo $|b| > c > 1$

Wie?: <u>Ziel</u>: Beweisen, dass z.B. $\left|\frac{n^k}{b^n}\right| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{c^n}$ für solche c

und <u>$n \geq N$</u>

Warum gilt das? Warum ist das der Fall?

Weil $\lim_{n \to \infty} c^n \cdot \left|\frac{n^k}{b^n}\right| = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{n^k}{(b/c)^n}\right| = 0$ (weil $|(b/c)| > 1$)

gibt es eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ mit $c^n \left|\frac{n^k}{b^n}\right| \leq \frac{1}{2}$ für $n \geq N$.

③ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ $a \in \mathbb{C}$

$\frac{a^n}{n!} \to 0$ (wissen bereits.) aber nicht genug Beweis.

$$\frac{(2|a|)^n}{n!} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ es gibt $N \in \mathbb{N}$ sodass $\frac{2|a|^n}{n!} \leq \frac{1}{2}$ (für $n \geq N$)

$$\Rightarrow \frac{|a|^n}{n!} = \left|\frac{a^n}{n!}\right| \le \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n} \quad \text{für } n \ge N$$

Weil $\sum \frac{1}{2^n}$ konvergiert, ist $\sum \frac{a^n}{n!}$ abs. konv.

z.B. $\sum \frac{\cos(\pi \exp(\sin(n!(3^n\sqrt{\pi}))))}{n!}$

$$\left|\frac{\cos(\sim\sim)}{n! \;/ n^2}\right| \le \frac{1}{n!} \;/\; \frac{1}{n^2}$$

$\Rightarrow$ die Reihe konvergiert abs.

und $\left|\sum \frac{\cos(\sim)}{n!}\right| \le \sum \frac{1}{n!}$

(alles abschätzen und abs. konv. mit Ungleichungen beweisen).

<u>Bemerkung</u>: Wir wissen, dass verschiedene Reihen konvergieren. Nun kann man sich fragen, was ihre <u>Summen</u> sind:

① $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k} = \zeta(k)$ "Riemannsche Zeta Funktion)

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$ ist rat. Zahl mal π^{2k}

man weiss nicht, ob $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5} \in \mathbb{Q}$ ist oder nicht.

② $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{b^n} = \frac{1}{1-1/b} = \frac{b}{b-1}$

③ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} = \exp(a)$ $\quad a \in \mathbb{C}$

2.11. Konvergenz gegen $\pm\infty$

<u>Def</u>: (a_n) ist eine Folge von reellen Zahlen

(1). (a_n) konvergiert gegen $+\infty$

$\Leftrightarrow \quad \forall T \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \; a_n \geq T$

$[\text{z.B. } a_n = n]$

(2) (a_n) konvergiert gegen $-\infty$

$\Leftrightarrow \forall T \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \; a_n \leq T$ $\quad [\text{z.B. } a_n = -n^2]$

<u>Notation:</u> $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $a_n \to \infty$

oder $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $a_n \to -\infty$

<u>Bemerkung:</u> $a_n = (1+(-1)^n)n$

diese Folge konvergiert nicht $(a_{2n} = 2n)$

und konvergiert <u>nicht</u> gegen $+\infty$ oder $-\infty$ $\quad (a_{2n+1} = 0)$

V11

21.10.20

Satz: Sei (a_n) eine Folge von reellen Zahlen.
(2.11.3)

(1) $(a_n \to +\infty) \Leftrightarrow \left(a_n > 0 \text{ für } n \text{ gross genug, und } \frac{1}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right)$

(2) $(a_n \to -\infty) \Leftrightarrow \left(a_n < 0 \text{ für } n \text{ gross genug und } \frac{1}{a_n} \to 0\right)$

<u>Warum</u>? Falls $a_n \to +\infty$

- $a_n > 0$ für n gross genug ✓ (klar)
- $\left|\frac{1}{a_n}\right| = \frac{1}{a_n} < \varepsilon$ wenn $a_n > \varepsilon^{-1}$, was für alle n gross genug passiert.

Falls $\begin{cases} a_n > 0 & \text{für } n \geq M \\ \frac{1}{a_n} \to 0 \end{cases}$

dann ist $a_n > T$ wenn $\frac{1}{a_n} < \frac{1}{T}$, was für alle n gross genug passiert.

z.B. (1) Für $a \geq 0$, gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + \dots + a_1 n + a_0}{b_l n^l + \dots + b_1 n + b_0}$ $a_i \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$, $a_k \neq 0$, $b_l \neq 0$

$\boxed{k > l}$ $= \begin{cases} +\infty, & \frac{a_k}{b_l} > 0 \\ -\infty, & \frac{a_k}{b_l} < 0 \end{cases}$

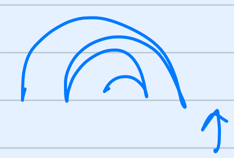
Warum? Weil: (Inverse berechnen): $\frac{b_l n^l + \dots + b_1 n + b_0}{a_k n^k + \dots + a_1 n + a_0}$

und das Signum von $b_l n^l + (\dots + b_1 n + b_0)$ $|\dots| \leq \frac{1}{2}|b_l n^l|$ für n gross genug.

ist das Signum von $b_l n^l$ für n gross genug (und ähnlich für $a_k n^k + \dots$)

Bemerkungen:

① Falls $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ folgt $a_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$



aber $\frac{1}{a_n} = (-1)^n \cdot n$ konvergiert nicht gegen $+\infty$ oder $-\infty$.
$\to$ d.h. $\frac{1}{a_n} \not\to 0$

② Falls a_n wachsend ist ($a_n \leq a_{n+1}$), dann ist (a_n) Konvergent

1. Konvergent (gegen eine Zahl $a \in \mathbb{R}$)
falls es gibt $R \geq 0$ mit $a_n \leq R$ für alle n

2. oder konvergiert gegen $+\infty$

(weil dann gibt es für jede T eine $a_N > T$, und dann ist $a_n \geq a_N > T$ für $n \geq N$).

Satz: (2.11.6) (a_n), (b_n) Folgen von reellen Zahlen.

(1) Falls $a_n \to +\infty$ und (b_n) ist von unten beschränkt $[b_n \geq R$ für alle $n]$ dann ist $a_n + b_n \to +\infty$

(2) Falls $a_n \to +\infty$ und $b_n \geq \delta > 0$ für alle n, dann ist $a_n b_n \to +\infty$

z.B. $n + \underbrace{(-1)^n \cdot 10^{10}}_{\substack{\text{beschränkt} \\ (\text{grösser / kleiner } 10^{10})}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$