

§ Kap. 3: Funktionen / Stetigkeit

3.1. Funktion / Graph

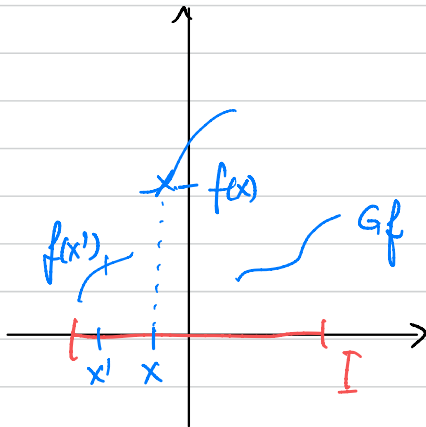
$I \subset \mathbb{R}$ (oft Intervall)

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ("Funktion auf I ")

oder $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ ("komplex-wertige Funktion / komplexfunktion auf I ")

(Warum sind Funktionen mit einer Variablen einfacher? $\rightarrow$ kann als Graph darstellen).

Def: Sei $I \subset \mathbb{R}$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$.
Der Graph von f ist die Teilmenge $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in I\} \subset \mathbb{R}^2$



Man kann Funktionen, die auf dieselbe Teilmenge definiert sind,

- addieren $[(f+g)(x) = f(x) + g(x)]$

- multiplizieren

- dividieren [falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in I$]

Def: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$

heißt • **monoton** falls sie **wachsend** / **fallend** ist

[wachsend: $(x \leq y) \Rightarrow (f(x) \leq f(y))$ z.B. $f(x) = 1$

• streng monoton falls sie streng wachsend / fallend ist.

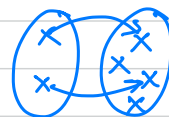
[streng wachsend: $(x < y) \Rightarrow (f(x) < f(y))$

z.B. $I = \mathbb{R}_+$ $f(x) = x^2$

Bemerkung: f streng monoton $\Rightarrow f$ injektiv

(eine streng monotone Funktion ist immer injektiv.)

$[x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)]$



Beispiele:

(1) Polynome:

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Polynom auf I falls

$$f(x) = a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0$$

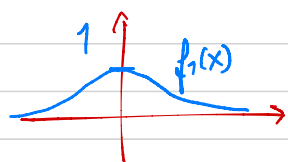
für gegebene Zahlen $(a_0, \dots, a_k)$

Falls $a_k \neq 0$, ist f ein Polynom vom Grad k.

(2) Rationale Funktionen:

f, g sind Polynome: $g(x) \neq 0$ für $x \in I$

$f_1(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ heißen rationale Funktionen.



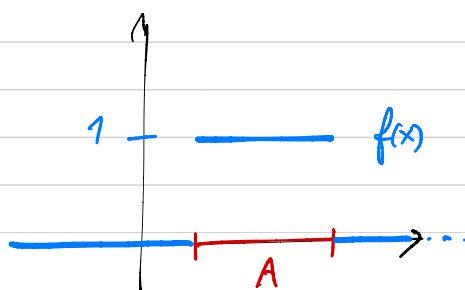
z.B. $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $I = \mathbb{R}$

$$f_2(x) = \frac{1}{1-x^2}, \quad I =]-\infty, -1[\text{ oder } \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1, -1\}$$

(3) $A \subset \mathbb{R}$

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A \\ 0, & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$



$f(x)$ ist die "charakteristische Funktion von A "

⊗ stetig / nicht stetige Funktion

stetige Funktion: Graph ist kontinuierlich (man kann den ganzen Graph zeichnen ohne den Stift vom Blatt zu nehmen)

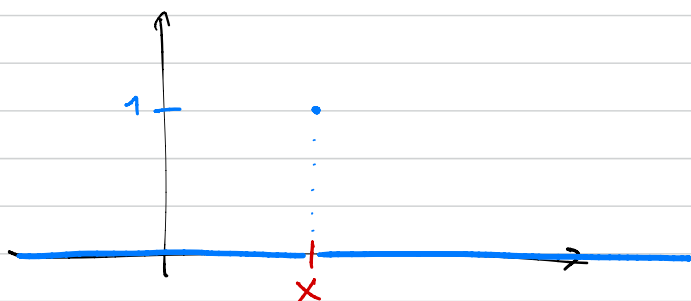
3.2 stetige Funktionen

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion, $I \subset \mathbb{R}$

Stetigkeit von f bedeutet: wenn wir wollen $f(x)$ (für eine $x \in I$) berechnen, aber kennen nur eine Approximation x_0 von x , dann erhalten wir nur eine Approximation von $f(x)$ mit $f(x_0)$.
Das funktioniert nur, wenn f die folgende Eigenschaft hat:

- wenn x, x_0 "nah genug" voneinander sind, sind auch $f(x)$ und $f(x_0)$ "nah"

Sonst ist $f(x)$ "unberechenbar"



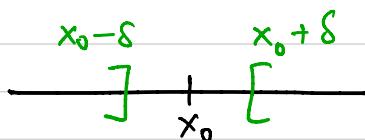
Def: $f: I \rightarrow \mathbb{C}$, $I \subset \mathbb{R}$

Sei $x_0 \in I$, f ist stetig an der Stelle x_0 falls:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

↑ Epsilon ↑ Delta

Genauigkeit, die wir am Ende wollen wenn wir $f(x_0)$ approximieren.



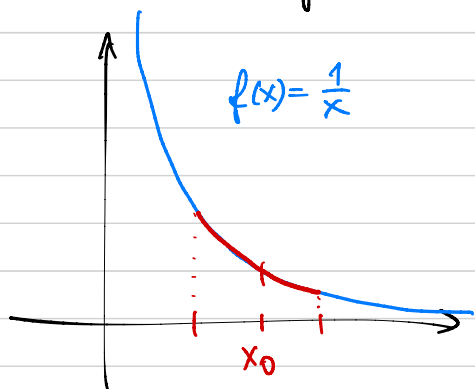
("kleine Änderung der Variable" $\xrightarrow{\text{impliziert}}$ "kleine Änderung der Werte")

Falls f auf jede $x_0 \in I$ stetig ist, sagt man dass f stetig ist auf I .

Eigenschaften der Stetigkeit:

1. (Eine stetige Funktion) $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ die auf x_0 stetig ist, ist lokal-beschränkt: d.h. es gibt eine Zahl $\alpha > 0$ und eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ sodass:

$$|f(x)| \leq M \text{ falls } x \in I \text{ und } |x - x_0| < \alpha$$

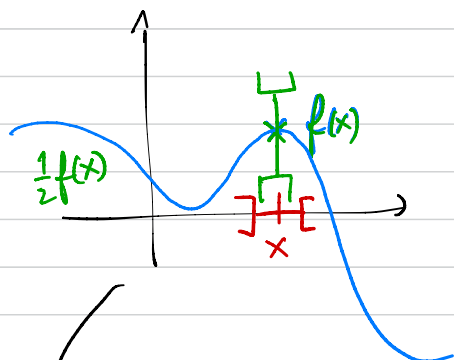


2. Ob f stetig an der Stelle x_0 ist oder nicht, hängt nur von f in der Nähe von x_0 ab:

Falls es gibt $\alpha > 0$, $g =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\rightarrow \mathbb{C}$ die stetig ist und $f(x) = g(x)$ für $|x - x_0| < \alpha$ erfüllt, dann ist f stetig an x_0 .

3. Falls $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist und es gibt $f(x) > 0$, dann gibt es $\alpha > 0$ mit $f(y) > 0$ für

$$y \in]x - \alpha, x + \alpha[.$$



Warum? wir benutzen die Def. der Stetigkeit an der Stelle x mit der Genauigkeit $\varepsilon = \frac{1}{2}f(x) > 0$

(Def: $[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in I, (|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)]$)

→ Sei $\delta > 0$ mit $(|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{1}{2} f(x))$

Dreiecksungleichung = falls $|x-y| < \delta$ ist
verwenden $f \geq 0$:

$$f(y) \geq f(x) - |f(x) - f(y)| \geq f(x) - \frac{1}{2} f(x) > 0$$

Satz: (Algebraische Eigenschaften der Stetigkeit):

$$I \subset \mathbb{R}$$

$f, g: I \rightarrow \mathbb{C}$ stetig auf I .

(1) $f+g$, fg sind stetig auf I (Addition / Multiplikation)

(2) Falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, ist $\frac{f}{g}$ stetig.

(3) Sei $J \subset \mathbb{R}$ sodass

$f: I \rightarrow J$ (d.h. $f(x) \in J$ für alle $x \in I$) und sei

$f_1: J \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann ist die Verknüpfung

$I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{f_1} \mathbb{C}$ auch stetig auf I .

$f_1 \circ f$ (gilt nur, wenn beide stetig sind.)

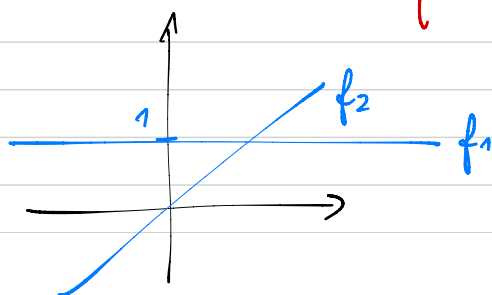
(wenn f oder f_1 nicht stetig wären, könnte $f_1 \circ f$ stetig oder nicht stetig sein.
(hängt von den Funktionen ab. Könnte alles sein).)

z.B. $I = \mathbb{R}$

• $f_1(x) = 1$: stetig (feste Funktion)

• $f_2(x) = x$: stetig, weil:

(aus Def.) $[|f(x) - f(y)| = |x - y| \rightsquigarrow \delta = \varepsilon \text{ nehmen}]$



$\rightsquigarrow$ jedes Polynom
 $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ ist stetig
auf $\mathbb{R}$.

→ jede rationale Funktion ist stetig wo sie definiert ist.

(Jede rationale Funktion ist stetig auf jede Menge auf welche sie definiert ist.)

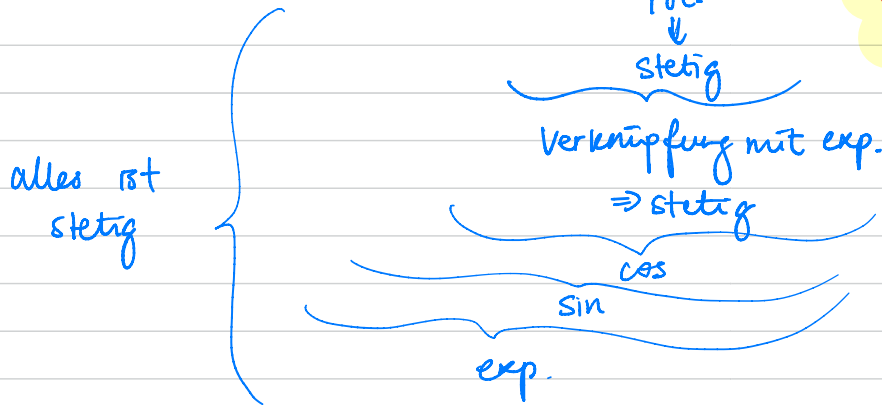
§ 3.2

V12

22.10.20

exponential, trigo. Funktionen, Wurzeln, ..., sind alle stetig (wo sie definiert sind)

→ z.B. $f(x) = \exp(\sin(\cos(\exp(3x^2+1))))$ (Verknüpfung von stetigen Funktionen ⇒ stetige Funktion.)



(2) Es gibt Funktionen

(Skript 3.2.3 (3))

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

die an keiner Stelle x_0 stetig sind (fast unmöglich darzustellen)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \quad (f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 0) \\ b, & x = \frac{a}{b} \text{ wo } a \geq 1, b \geq 1 \text{ ohne gemeinsamen Faktor} \end{cases}$$

$$[f(0) = 1, f(\frac{1}{2}) = 2, f(\frac{2}{5}) = 5, \dots]$$

An keiner Stelle x_0 ist diese Funktion f stetig.

Wie überprüft man Stetigkeit?

① Funktion ist Summe / Produkt / Verknüpfung von Funktionen, die stetig sind.

② Vergleichung:

Falls $f, g: I \rightarrow \mathbb{C}$ & wir wissen, dass g stetig ist und wir können beweisen, dass

$$(*) \quad |f(x) - f(y)| \leq |g(x) - g(y)| \quad \text{für alle } x, y \in I$$

dann ist f auch stetig auf I .

Sonderfall: $g(x) = cx$, $c \in \mathbb{R}_+$; falls f

$(*)$ erfüllt [d.h. $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$] ist f

Lipschitz-stetig.

[z.B. $f(x) = |x|$, auf $I = \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig. weil:

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

↑

aus Dreiecksungleichung

~> für jede stetige Funktion $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ ist

$|g|$ auch stetig (wegen Verknüpfung)

③ Satz: $I \subset \mathbb{R}$, $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ $x_0 \in I$;
(3.2.10)

Äquivalenz: (f stetig an x_0) $\Leftrightarrow$ (für jede (a_n) in I s.d. $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$,
gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0)$)

Bsp (1) $f, g: I \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. fg stetig?

$x_0 \in I$; sei $a_n \in I$ s.d. $a_n \rightarrow x_0$

dann gilt: $f(a_n) \rightarrow f(x_0)$ [f stetig] (3)
 $g(a_n) \rightarrow g(x_0)$ [g stetig an Stelle x_0]

(Folgen)

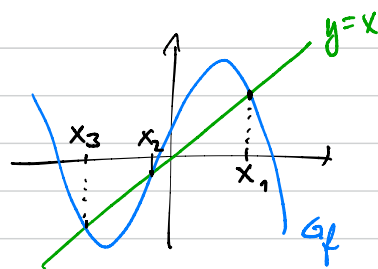
$$\Rightarrow f(a_n) g(a_n) \rightarrow f(x_0) g(x_0)$$

$$(fg)(a_n) \rightarrow (fg)(x_0)$$

Folgen benutzen
um Stetigkeit zu
beweisen.

Stetigkeit + ③
benutzen $\rightarrow$ Ist
Folge konvergent?
!

no $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



Falls f stetig auf $\mathbb{R}$ ist, und falls (a_n) konvergiert,
ist der Grenzwert x eine Lösung der Gleichung
 $f(x) = x$.

Warum gilt diese Gleichung für ein möglicher Grenzwert der Folge?

$a_{n+1} = f(a_n)$ [f stetig]
 $\downarrow$
 conv. gegen x $\xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$

§ 3.3 Globale Eigenschaften stetiger Funktionen

- ① Zwischenwertsatz
② Extremumsatz
- } hängen auch von I ab:
 $f: I \rightarrow \mathbb{C}$

Def: $I = [a, b]$ (Intervalle, die ein Min & Max besitzen)
($a \leq b$)

kompakt Intervall

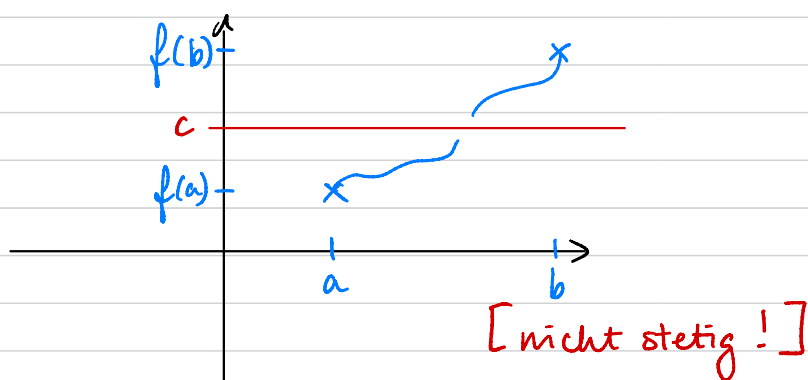
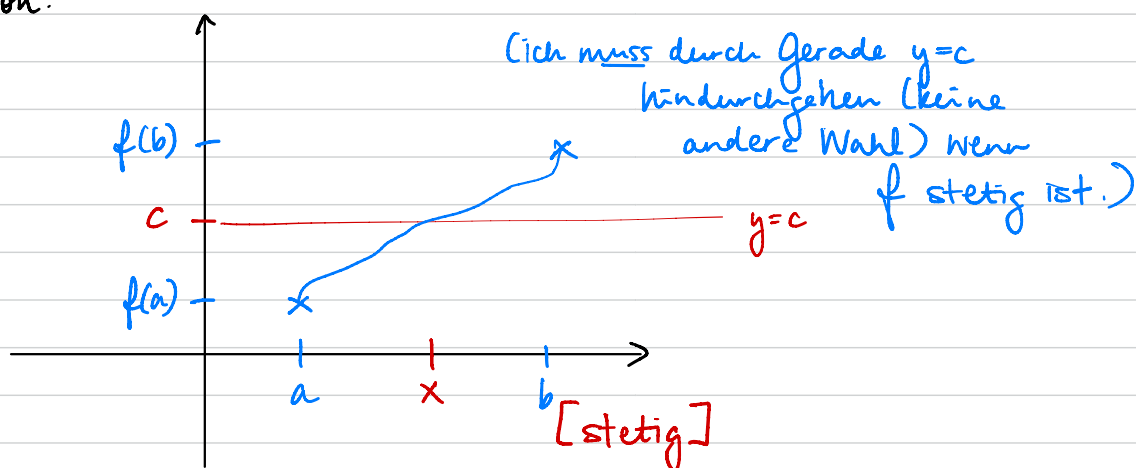
Satz: [Zwischenwertsatz] (gilt nicht für f nicht reellwertig)
(3.3.1)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

Falls $f(a) < f(b)$ (bzw. $f(a) > f(b)$), für alle $c \in [f(a), f(b)]$,
gibt es (mindestens) $x \in [a, b]$ mit $f(x) = c$

[bzw. für $c \in [f(b), f(a)]$, gibt es $x \in [a, b]$ mit $f(x) = c$]

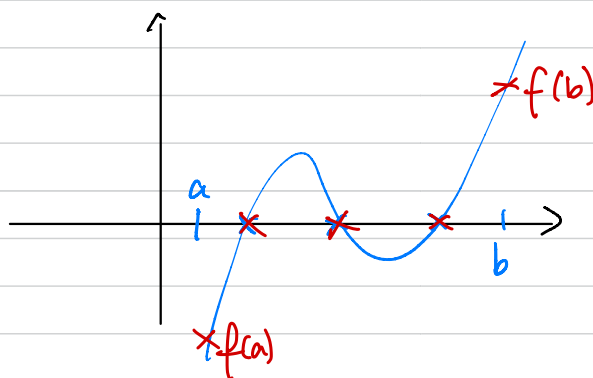
Geom. Interpretation:



Sonderfall: $f(a) < 0 < f(b)$

$\Rightarrow$ es gibt eine Lösung der Gleichung $f(x)=0$ zwischen a und b .

Geom. Interpretation:



Andere Interpretation des Zwischenwertsatzes:

Korollar: $I \subset \mathbb{R}$ Intervall
 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

$\Rightarrow$ das Bild von f ist ein Intervall

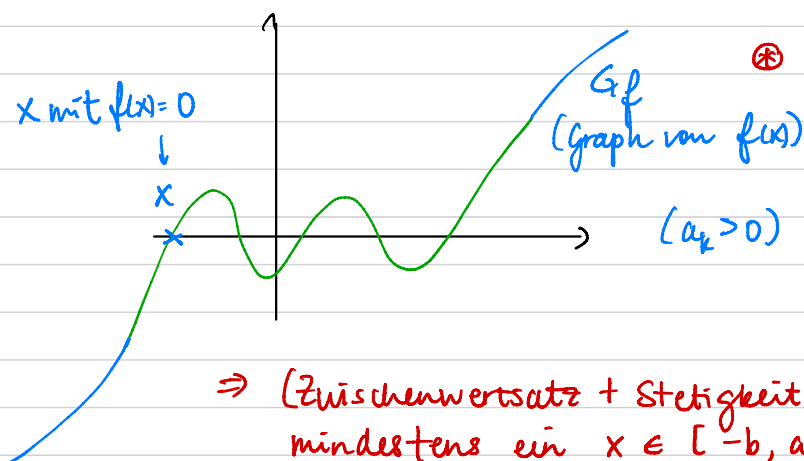
dh. $f(I) = \{f(x) \mid x \in I\} \subset \mathbb{R}$
 (weil für $a < b$ in I , ist das Intervall zwischen $f(a)$ und $f(b)$ in $f(I)$ wegen dem Zwischenwertsatz).

z.B. Sei $k \in \mathbb{N}$, ungerade

$a_k, \dots, a_1, a_0$ reelle Zahlen, $a_k \neq 0$

Die Gleichung $a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ hat (mind.) eine reelle Lösung. $\otimes$

$\Rightarrow$ mit Zwischenwertsatz beweisen:



$\otimes$ Weil: im Fall $a_k > 0$, gibt es $a \in \mathbb{N}$, $f(a) > 0$ und $b \in \mathbb{N}$ mit $f(-b) < 0$

$\Rightarrow$ (Zwischenwertsatz + Stetigkeit von Polynomen) $\Rightarrow$ es gibt mindestens ein $x \in [-b, a]$ mit $f(x) = 0$.

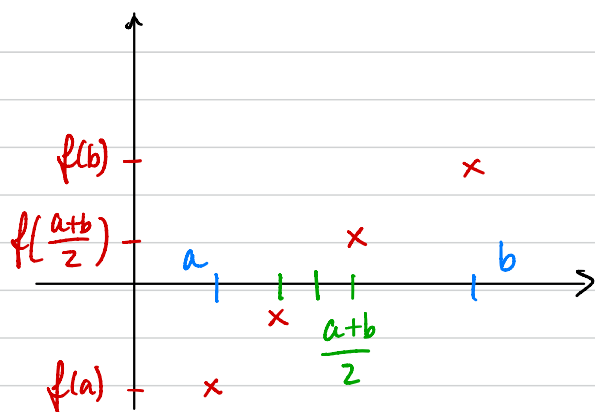
Warum? $\textcircled{1} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_k n^k + \dots + a_1 n + a_0) = \underline{+\infty}$ (a^k ist > 0)
 $\Rightarrow \exists a \in \mathbb{N}$ mit $a_k a^k + \dots + a_1 a + a_0 \underline{\underline{> 0}}$.

$\textcircled{2}$ benutzen Eigenschaft, dass k ungerade Zahl ist:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (a_k (-n)^k + \dots + a_1 (-n) + a_0) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-a_k n^k + \dots - a_1 n + a_0) \quad (\text{weil } \underline{k \text{ ungerade}}) \\ &= \underline{\underline{-\infty}} \end{aligned}$$

Beweis vom Zwischenwertsatz:

Hyp: $f(a) < 0 < f(b)$.



Immer kleinere Intervalle machen
bis Lösung getroffen wird

Intervall $\div 2$ teilen zw. pos. und
neg. $f(x)$.

Idee: Intervall in zwei kleinere Intervalle teilen; eine muss die Lösung enthalten

Genauer gesagt: Wir konstruieren Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}_0$ mit folgenden Eigenschaften:

Bedingungen:
$$\begin{cases} a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \\ b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \\ f(a_n) < 0, f(b_n) \geq 0 \end{cases}$$

$I_0 = [a, b]$ ✓

Wenn I_n definiert ist, wählen wir

$$I_{n+1} = \begin{cases} [a_n, \frac{a_n+b_n}{2}], & \text{falls } f(\frac{a_n+b_n}{2}) \geq 0 \\ [\frac{a_n+b_n}{2}, b_n], & \text{falls } f(\frac{a_n+b_n}{2}) < 0 \end{cases}$$

erfüllt alle Bedingungen, die wir wollen. ✓

Dann folgt:

(a_n) wachsend + beschränkt $\Rightarrow a_n \rightarrow x_0$

(a_n) fallend + " $\Rightarrow b_n \rightarrow x_0$

und $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ sodass $x_0 = x_1$

(beide Folgen konvergieren gegen dieselbe Zahl).

Es gilt ^{immer} $f(a_n) \leq 0 \Rightarrow f(x_0) \leq 0$
 $f(b_n) \geq 0 \Rightarrow f(x_1) \geq 0$ } $\Rightarrow f(x_0) = f(x_1) = 0$.
 Zahl muss 0 sein.
 Stetigkeit von f benutzt.

Satz: (Extremumsatz):
 (3.3.2)

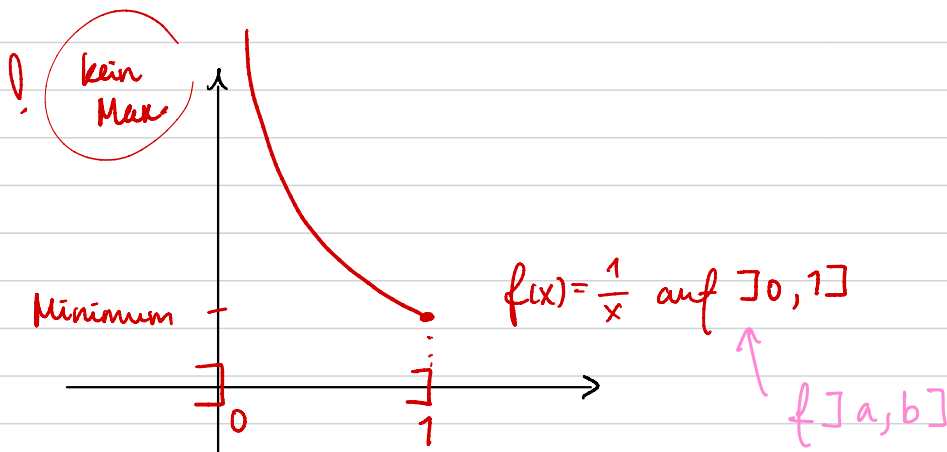
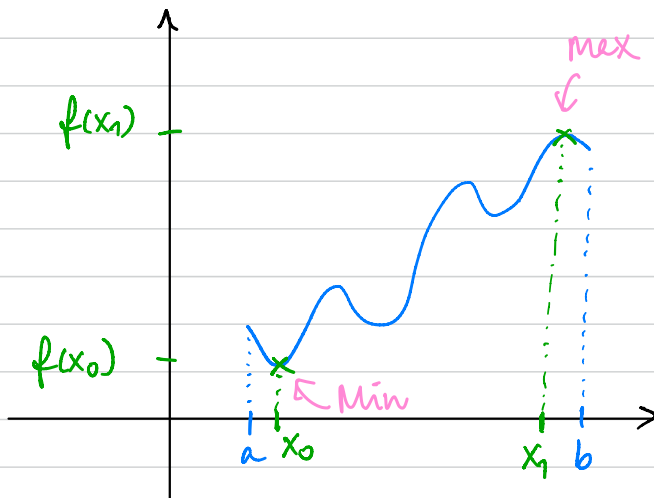
$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

Dann hat das Bild von f : $f([a, b]) = \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$

ein Maximum und ein Minimum, d.h. es gibt

(mind. 1) $x_0 \in [a, b]$, $x_1 \in [a, b]$ mit

für $x \in [a, b]$, $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$



Wenn es $f[a, b]$ wäre, gäbe es auch kein Max. weil $f(0)$ ist nicht definiert. ($x=0$ asymptote).

$$\underbrace{f([a, b])}_{\text{Bild von } f} = [\underbrace{\min f}_{\uparrow \min \{f(x) \mid x \in [a, b]\}}, \max f] \quad (\text{Kompaktes Intervall})$$

$X = f([a, b]) \subset \mathbb{R}$ ist nicht leer und beschränkt.

→ d.h. diese Menge hat mindestens ein Inf./Sup.
→ Existenz von Min./Max überprüfen:

Es gibt $M = \sup X \in \mathbb{R}$

Frage: ist M ein Element von X ?

Für $n \geq 1$, ist $M - \frac{1}{n} < M$ keine obere Schranke von x

$\Rightarrow$ Es gibt mind. eine Zahl $y_n \in X$ mit

$$M - \frac{1}{n} < \frac{f(x_n)}{y_n} \leq M$$

Das heisst: Dann ist $y_n = f(x_n)$ für ein $x_n \in [a, b]$

Bemerkung: $|y_n - M| < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = M$

Bolzano - Weierstrass: es gibt eine konvergente Teilfolge

$(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$; dann $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x)$
 $[x_{n_k} \rightarrow x]$ $\downarrow$ $\searrow$ f stetig
 M

$\Rightarrow M = f(x)$

Das heisst: $f(x)$ ist Maximum von f auf $[a, b]$

Bemerkung: wie kann man das Max./den Min. konkreterweise finden / approximieren?

Wann ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig beschränkt?

Nehmen wir an, folgendes ist nicht der Fall:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a, b], |f(x_n)| \geq n$$

(x_n) ist beschränkt $\Rightarrow$ es gibt eine konvergente Teilfolge

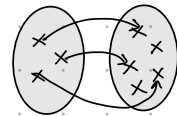
$$x_{n_k} \rightarrow x \in [a, b] \text{ und } |f(x_{n_k})| \geq n_k \geq k \text{ für alle } k$$

$$\downarrow$$
$$|f(x)|$$

$\rightarrow$ ist nicht möglich (weil $f(x)$ eine reelle Zahl ist).

§ 3.4 Injektive stetige Funktionen:

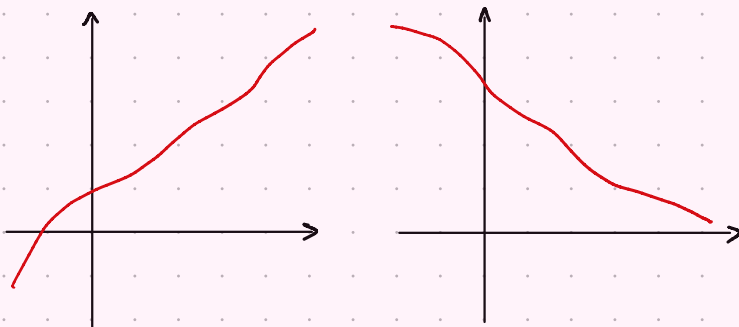
(injektiv = höchstens 1)



Ziel: Injektivität leicht überprüfen!

Satz: $I \subset \mathbb{R}$ Intervall
(3.4.1) $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, stetig

f ist injektiv $\Leftrightarrow f$ ist streng monoton



Beweis: ("f ist injektiv wenn sie streng monoton")

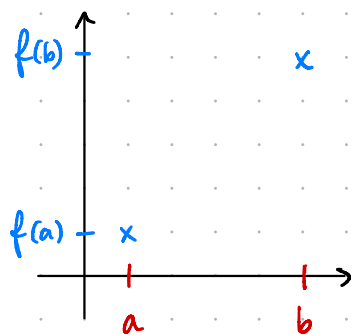
f streng monoton $\Rightarrow f$ injektiv schon gesehen.

Was passiert, wenn f injektiv? (d.h. anders rum überprüfen) =

$$I = [a, b]$$

$$a < b$$

$$(\Rightarrow f(a) \neq f(b) \leftarrow \text{weil } f \text{ injektiv})$$



$f(a) = f(b)$ kann nicht passieren! (weil $f(x)$ injektiv.)

Aber es kann sein $f(a) < f(b)$ oder $f(a) > f(b)$

Falls $f(a) < f(b)$, beweisen wir, dass f streng wachsend ist.

D.h. $a \leq c < d \leq b$, wir wollen überprüfen: $f(c) < f(d)$

(dann ist f streng wachsend.)

$$a \leq c < d \leq b$$

Schritt ①: $f(d) > f(a)$ überprüfen:

Falls nicht, $f(d) < f(a)$

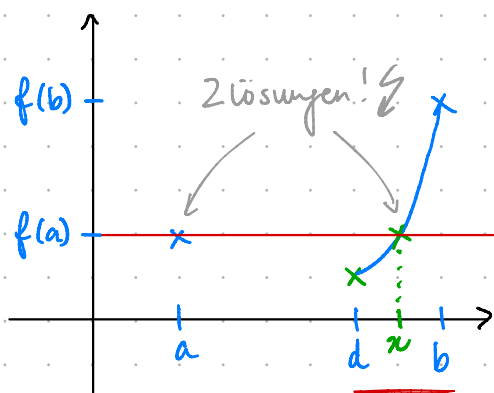
[$f(d) = f(a)$ nicht möglich weil f injektiv].

$$f(d) < f(a) < f(b)$$

Zwischenwertsatz: $\Rightarrow$ Es gibt

$$x \in [d, b] \text{ mit } f(x) = f(a),$$

Widerspruch! [f injektiv]



zwischen d & b :

$f(c)$ impliziert, dass $f(d)$ kleiner ist

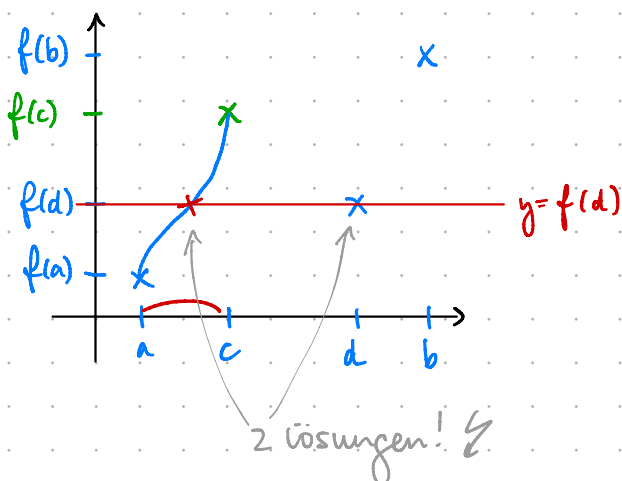
Schritt ②: $f(c) < f(d)$ überprüfen:

Falls nicht, d.h. $f(c) > f(d)$

$$f(a) < f(d) < f(c)$$

Z.W.-Satz: Es gibt $y \in [a, c]$ mit $f(y) = f(d)$

$\rightarrow$ Widerspruch! [f injektiv]



Sei: $I \subset \mathbb{R}$ Intervall
 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ injektiv, stetig

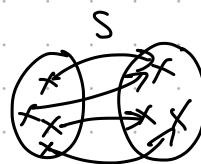
$$J = f(I) = \text{Bild von } f = \{f(x) \mid x \in I\} \subset \mathbb{R}$$

J ist ein Intervall [Zwischenwertsatz]

Interpretieren wir $f: I \rightarrow J$

Diese ist:

• injektiv



• surjektiv [jede $y \in J$ hat die Form $y = f(x)$ für mindestens ein $x \in I$]

$\Rightarrow f$ ist bijektiv

Es gibt die Umkehrfunktion

$$f^{-1}: J \rightarrow I \text{ sodass}$$

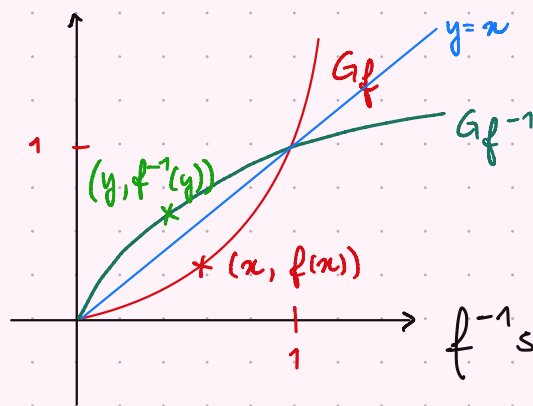
$f^{-1}(y) =$ die einzige Lösung $x \in I$ der Gleichung $f(x) = y$.

[z.B. $I = \mathbb{R}_+$
 $f(x) = x^2$
 $J = \mathbb{R}_+$
 $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$]

Umkehrfunktion einer bij. Funktion ist bij.

f^{-1} ist injektiv,

Satz: (3.4.2) f^{-1} ist stetig, sie ist streng wachsend $\Leftrightarrow f$ ist streng wachsend (bzw. fallend)



$G_{f^{-1}}$ ist die Spiegelung von G_f an der Geraden $y=x$.

f^{-1} streng wachsend $\Leftrightarrow f$ streng wachsend. (fallend)

z.B. Sei

$k \in \mathbb{N}$

$I = \mathbb{R}_+$

$f(x) = x^k$

← bijektiv, weil $k \in \mathbb{N}$
 , stetig, streng wachsend für $\forall k$

$f(I) = [0, +\infty[$

→ es gibt eine stetige, wachsende Umkehrfunktion

$$\mathbb{R}_+ \xrightarrow{f^{-1}} \mathbb{R}_+$$

bezeichnet $f^{-1}(x) = \sqrt[k]{x} = x^{\frac{1}{k}}$

§ 3.5. (Andere) Grenzwerte von Funktionen:

z.B. $I =]a, b]$

$$f:]a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

es kann sein, dass " $f(x) \rightarrow y \in \mathbb{C}$ wenn $x \rightarrow a$ "

es kann auch sein, dass " $f(x) \rightarrow +\infty$ wenn $x \rightarrow a$ "
oder $-\infty$

oder $J =]a, +\infty[$, $f: J \rightarrow \mathbb{C}$

es kann sein dass " $f(x) \rightarrow y \in \mathbb{C}$ für $x \rightarrow \infty$ "

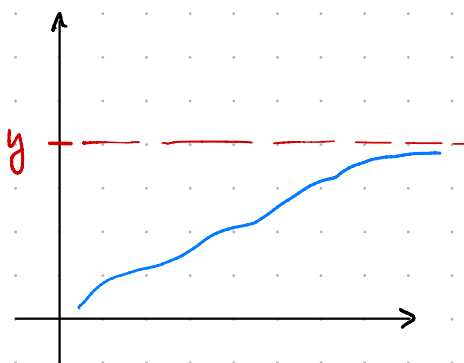
oder " $f(x) \rightarrow +\infty$ für $x \rightarrow +\infty$ "

z.B. $f:]a, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ (vielleicht nicht stetig)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y \in \mathbb{C}$$

$\Updownarrow$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists R \in \mathbb{R}, \forall x > R, |f(x) - y| < \varepsilon$$



z.B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 1}{2x^3 + 5} = \frac{1}{2} = y \in \mathbb{C}$$

Folgenkriterium: $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \beta$

$\alpha \in \mathbb{C}$ oder $+\infty$ oder $-\infty$
 β " " " "

vielleicht auch noch andere Bedingungen, wie z.B. $x > \alpha$ oder $x < \alpha$

für alle Folgen (x_n) in I (vielleicht mit anderen Bedingungen) die gegen α konvergieren, ist die Folge $(f(x_n))$ gegen β konvergent.

z.B. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ (wie z.B. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = +\infty$)

↳ d.h. für $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \beta$

und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \beta$

⇔ falls $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty$

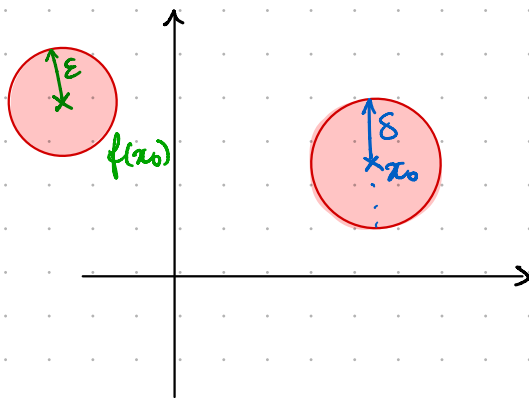
§ 3.6. Stetige Funktionen auf Teilmengen von komplexen Zahlen: $(I \subset \mathbb{C})$:

Sei $I \subset \mathbb{C}$
und $f: I \rightarrow \mathbb{C}$

Def: f ist stetig falls:

$\forall x_0 \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, für $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$, ist

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$



Resultate vom Abschnitt 3.2 sind auch OK für solche Funktionen.

(insb. $+$, $\cdot$, Verknüpfung und das Folgenkriterium)