Kapitel 4: Folgen / Reihen von Funktionen:

Ziel: Neue (insb. stetige) Funktionen definieren mit "unendlich vielen" Operationen, d.h. f definieren durch

$$\boxed{f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)}$$

wo $f_n : I \longrightarrow \mathbb{C}$ sind Funktionen sodass $\boxed{(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}}$ konvergent.

[z.B.: $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{C}$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad |x|<1 \,]$$

Bem: Folge von Funktionen: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Für jede x ist $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zahlen.

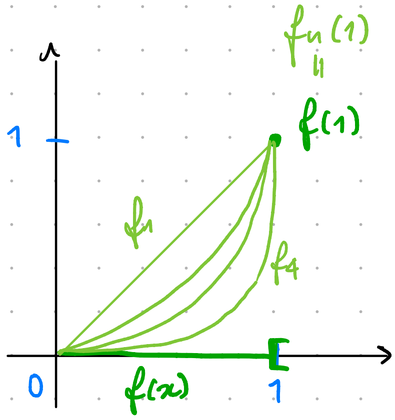
§ 4.1. Gleichmässige Konvergenz:

z.B. $I = [0,1]$

$f_n(x) = x^n$

$$\lim_{n\to\infty} x^n = f(x) = \begin{cases} 1, & x=1 \\ 0, & 0 \le x < 1 \end{cases} \quad (0 \le x \le 1)$$

$= f(x)$



Funktion $f(x)$ vom Grenzwert von $f_n(x)$: f ist an der Stelle 1 nicht stetig!

$\boxed{f_n(x) = x^n}$

$$\lim_{n\to\infty} x^n = f(x) = \begin{cases} 1, & x=1 \\ 0, & 0 \le x < 1 \end{cases}$$

$f_n(x) = x^n$

$f_1(x) = x$

$f_2(x) = x^2$

$f_3(x) = x^3$

$\vdots$

V14

29.10.20

Def: [gleichmässige Konvergenz]

$I \subset \mathbb{C}$

$f_n : I \longrightarrow \mathbb{C}$

$f : I \longrightarrow \mathbb{C}$

f_n konvergiert gegen f gleichmässig auf I.

$$\Updownarrow$$

(*) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \boxed{\forall x \in I},\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ (Zahl N hängt nicht von x ab!!)

Interpretation: $f_n(x) \to f(x)$ "ungefähr gleich schnell an allen Stellen"

Vergleichen wir mit der Aussage dass: $\forall x \in I,\ f_n(x) \to f(x)$

(**) $\boxed{\forall x \in I},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

↳ (N hängt von x und ε ab!)

Unterschied: Im Fall der gleichmässigen Konvergenz (*) hängt N nicht von $x \in I$ ab (hängt nur von $\varepsilon > 0$ ab).

Mit gleichmässiger Konvergenz approximieren wir alle Werte (x_n) von f mit derselben Funktion f_n.

Satz: (4.1.4)

$I \subset \mathbb{C}$, (f_n) (Folge von Funktionen auf I) $f_n : I \to \mathbb{C}$

$f : I \to \mathbb{C}$

Falls $f_n \to f$ gleichmässig auf I, und f_n stetig ist für alle n, dann ist f auch stetig auf I.

Beweis: $x_0 \in I$ $\quad$ x_0 ist beliebige Zahl in I

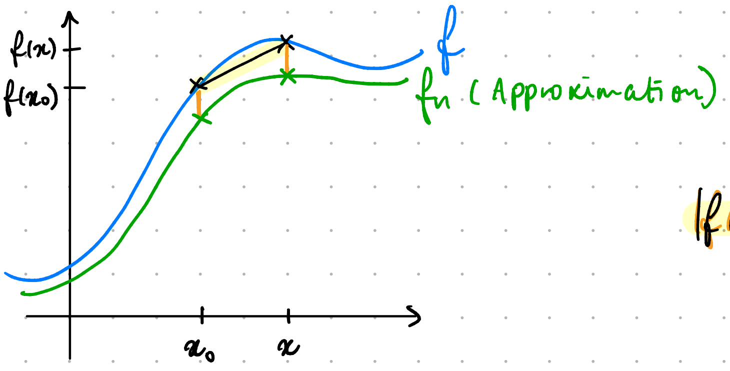
"klein" für x nah genug von x_0, weil f_n stetig.

$$x \in I, \quad \underbrace{|f(x) - f(x_0)|}_{\text{Abstand zw. } f(x) \text{ und } f(x_0) \text{ abschätzen}} \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

(Dreiecksungleichung)

"klein" für n gross weil $f_n(x) \to f(x)$

(bzw. $f_n(x_0) \to f(x_0)$)



$|f(x)-f(x_0)| <$ als der Abstand $|$ + $|$

[Problem: wie gross n ist, hängt von x ab; doch dies ist kein Problem mit (bei) gleichmässiger Konvergenz!]

$\varepsilon > 0$

wir benutzen die gleichm. Konvergenz: Es gibt $n \in \mathbb{N}$ sodass

$$|f(x)-f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ für } \underline{\underline{\text{alle}}} \ x \in I$$

[gleichm. Konvergenz]

$\Rightarrow$ für alle $x \in I$ ist

$$|f(x)-f(x_0)| < \frac{2\varepsilon}{3} + |f_n(x)-f_n(x_0)|$$

die 2 roten Teile von oben.

f_n ist stetig: $\Rightarrow$ Es gibt $\delta > 0$ s.d.

$$|f_n(x)-f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ für } |x-x_0| < \delta.$$

D.h. für alle x mit $|x-x_0| < \delta$ folgt (aus der Dreiecksungleichung)

$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ sodass f stetig ist.

Beispiel:

(1) $I=[0,1]$ $x \in I$

$f_n(x) = x^n$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x=1 \\ 0, & x \neq 1 \end{cases}$

$$|f_n(x)-f(x)| = \begin{cases} 0, & x=1 \\ x^n, & 0 \le x < 1 \end{cases} \le x^n$$

$f_n(x) \to f(x)$

$f_1(x) = x^1$

$f_2(x) = x^2$

$f_\infty(x) = x^\infty$ für $x \neq 1$

Was bedeutet das? → Wenn

$\varepsilon = \frac{1}{2}$: wir brauchen $x^n < \frac{1}{2}$

Wie gross n sein soll, hängt von $x<1$ ab, und die kleinste Zahl n (als Funktion von x) konvergiert gegen $+\infty$ wenn $x \to 1$

$$\left[n > \underbrace{\frac{2}{\log(1/x)}}_{\log(\frac{1}{x}) \text{ konvergiert gegen } 0} \right] \to \text{konvergiert gegen } +\infty.$$

$f_n(x) \to f(x)$

(2) Was passiert bei der geometrischen Reihe?

$f_n(x) = 1 + \dots + x^n$, $x \in I =]-1,1[$ (partielle Summe einer geom. Reihe)

$f(x) = \frac{1}{1-x}$

$f_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, $(x \neq 1)$

$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{|1-x|}$, $x \in I$ (keine Ungleichung! :))

↳ Die Konvergenz ist nicht gleichmässig auf I!

(Warum ist das kein Problem?

→ Folge auf kleinere Teilintervalle von I beschränken.)

Was können wir machen?
Wir beschränken x auf einen Intervall $]a,b[$ mit $-1<a<b<1$ (d.h. Teilintervall der Definitionsmenge).

Für $\boxed{x \in]a,b[,}$

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{|1-x|} \leq \underbrace{\frac{\max(|a|,|b|)^{n+1}}{\min(|1-a|,|1-b|)}}_{\text{hängt nicht von } x \text{ ab!}}$$

Weil $\max(|a|,|b|)^{n+1} \longrightarrow 0$, folgt $f_n \to f$ gleichmässig auf $]a,b[$.

Satz $\Rightarrow$ f ist auf $]a,b[$ stetig.

<u>Konkreterweise:</u> wie überprüfen wir dass $f_n \to f$ gleichmässig?

Man versucht, $|f_n(x) - f(x)| \leq b_n$ zu finden, wo

$$\begin{cases} b_n \text{ hängt nicht von } \underline{x} \text{ ab} \\ b_n \to 0 \end{cases}$$

<u>z.B.</u> falls $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ für $x \in I$ folgt gleichm. Konvergenz.

Es gibt auch ein Cauchy-Kriterium für gleichmässige Konvergenz:

Satz (4.1.6): $I \subset \mathbb{C}$

(f_n) Funktionen $f_n : I \longrightarrow \mathbb{C}$

Es gibt $f : I \to \mathbb{C}$ sodass $f_n \to f$ gleichmässig $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall m \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

§ 4.2. Normal Konvergenz von Reihen:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \longrightarrow s_n$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \longleftrightarrow$ Folge der partiellen Summen $s_n : I \longrightarrow \mathbb{C}$

$f_n : I \to \mathbb{C}$

$s_n(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x)$

(falls f_n stetig sind, so ist s_n)

Wir suchen ein Kriterium für gleichmässige Konvergenz der Reihe.

($\to$ ein bisschen wie Cauchy-Kriterium)

Seien n, m in $\mathbb{N}$, $m \geq n$, $|s_m(x) - s_n(x)| = |f_{n+1}(x) + \dots + f_m(x)|$

(Dreiecksungleichung benutzen:) $\leq |f_{n+1}(x)| + \dots + |f_m(x)|$

① Wir <u>nehmen an</u>: es gibt eine nicht negative Zahl $b_n \in \mathbb{R}_+$ mit für alle $x \in I$, $|f_n(x)| \leq b_n$

[z.B. $I = [a,b]$, f_n stetig

$\Rightarrow f_n$ beschränkt (Extremumsatz)]

$$|s_m(x) - s_n(x)| \leq \underbrace{b_{n+1} + \dots + b_m}_{= t_m - t_n}$$

wo t_n = partielle Summe für die Reihenmitglieder b_n $(t_1 = b_1 + \dots + b_n)$

② Wir nehmen weiter an: die Reihe $\sum b_n$ konvergiert (d.h. part. Summen sind beschränkt $\hookrightarrow (b_m)$)

⇒ **Satz:** (4.2.2) Falls die zwei Hypothesen erfüllt sind, ist die Summe der Reihe $\sum f_n$ gleichmässig konvergent auf I.

Kor: Falls die zwei Hypothesen erfüllt sind und jede f_n stetig auf I ist, dann ist $\sum f_n$ auf I stetig.

Def: Eine Reihe $\sum f_n$ **konvergiert normal** falls:

(1) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists b_n \in \mathbb{R}_n, \forall x \in I, |f_n(x)| \leq b_n$

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergiert.

→ d.h. $f_n(x) \to f(x)$ konvergiert

z.B. $(I = \mathbb{R})$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ konvergiert normal weil $\underbrace{\left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right|}_{\leq 1} \leq \frac{1}{n^2}$,

und $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

⇒ $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ ist definiert und stetig auf $\mathbb{R}$.

("Fourier-Reihe")

Bemerkung: Oft überprüft man die normal Konvergenz nur auf Teilmengen der Definitionsmenge! (S. 202)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

§ 4.3. Potenzreihen:

Potenzreihe: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

"Polynom mit Grad unendlich"

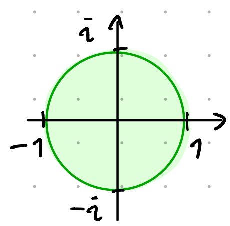
Partielle Summen: $s_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

Polynom mit Grad $\leq n$

(Alle Polynome sind Potenzreihen)

Die Gliedern $a_n x^n$ sind alle stetige Funktionen (auf $\mathbb{C}$).

[z.B. $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$ (die geom. Reihe)



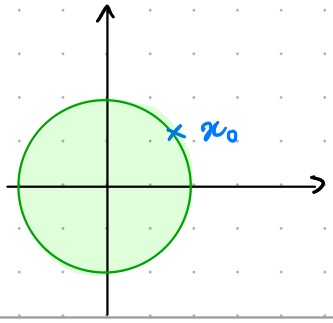
$x \in \mathbb{C}$, $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$]

Konvergenz: die Reihe $\sum a_n x^n$ konvergiert mindestens für $x = 0$, mit Summe a_0.

Satz: (4.3.1) eine Folge von komplexen Zahlen (a_n)

$0 \neq x_0 \in \mathbb{C}$ sodass $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$ konvergent

$\Rightarrow$ die Potenzreihe konvergiert normal (& gleichmässig) auf alle Mengen $D_r = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| \leq r\}$ wo $r < |x_0|$.

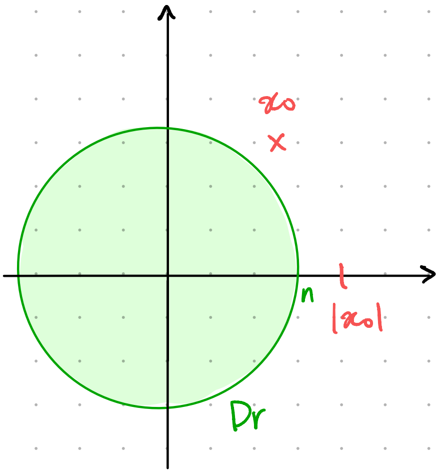


$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

V15

04.11.20

Weiter: für $|x| < |x_0|$ konvergiert $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ absolut. (für diese Stelle).



Kor. Die Summe $\sum_{n=0}^{+\infty}$ ist auf $\{x \in \mathbb{C} \mid |x| < |x_0|\}$ stetig.

[weil für $|x| < |x_0|$, es gibt $r < |x_0|$ sodass $x \in D_r$.]

Beweis der normal konvergenz auf D_r:

$D_r = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| \leq r\}$, mit $r < |x_0|$ $\qquad x_0 \neq 0$

Weil $\sum a_n x_0^n$ konvergiert ist $|a_n x_0^n|$ beschränkt; sei $M \in \mathbb{R}_+$ mit $|a_n x_0^n| \leq M$ für $n \in \mathbb{N}_0$

Für $x \in D_r$: $|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\left(\frac{x}{x_0}\right)\right|^n$ $\qquad \leftarrow$ Abschätzung

$$\leq \underbrace{M \left(\frac{r}{|x_0|}\right)^n}_{\text{hängt nicht von } x \text{ ab! gut.}}$$

die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} M\left(\frac{r}{|x_0|}\right)^n$ konvergiert für $r < |x_0|$ (geometrische Reihe)

Da sie nicht von x abhängig ist, konvergiert diese Potenzreihe <u>normal</u> auf D_r.

Def: (Konvergenzradius): $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $a_n \in \mathbb{C}$

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$: 3 Möglichkeiten:

① Die Potenzreihe konvergiert für mindestens eine Zahl x mit $|x| = r$, für alle $r \in \mathbb{R}_+$.

$\Rightarrow \sum a_n x^n$ konvergiert für $x \in \mathbb{C}$ (und ist stetig)

<u>Def</u> $\boxed{R = +\infty}$

Bsp: $a_n = \frac{1}{n!}$ (Reihe konvergiert $\forall x \in \mathbb{C}$).

② Die Potenzreihe konvergiert nur für $x = 0$

$\Rightarrow$ <u>Def</u> $\boxed{R = 0}$

③ $X = \{ r \in \mathbb{R}_+ \mid \exists x_0 \neq 0, \sum a_n x_0^n, |x_0| = r \} \neq \emptyset$

Diese Menge ist beschränkt.

$\Rightarrow$ <u>Def</u> $\boxed{R = \sup X}$

R = Konvergenzradius

<u>Bsp:</u> $\sum x^n$, $R = 1$ (Die geometrische Reihe)

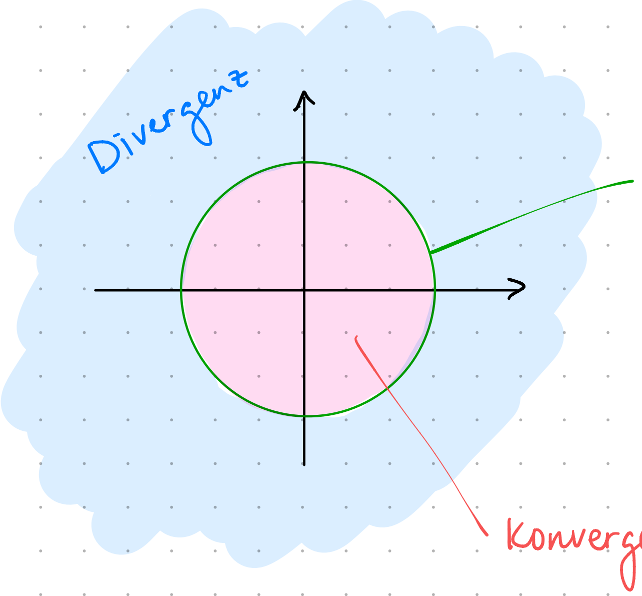
$\Rightarrow$ Also: Der Konvergenzradius ist immer definiert, aber es kann $+\infty$, 0 oder $\sup X$ sein. (3 Möglichkeiten.)

<u>Kor.</u> (4.3.3) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, R = Konvergenzradius von $\sum a_n x^n$

(1) Für $0 \leq r < R$, $\sum a_n x^n$ konvergiert normal auf

$D_r = \{ x \in \mathbb{C} \mid |x| \leq r \}$

(2) Für $|x| > R$, $\sum a_n x^n$ divergiert.



<u>Kor</u>: $\sum a_n x^n$ ist stetig auf
$D'_R = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| < R\}$.

<u>Beispiele</u>:

(1) $a_n = n!$

$$\sum a_n x^n = 1 + x + 2 \cdot x^2 + 6 \cdot x^3 + \ldots$$

(Diese Reihe konvergiert nur für $x = 0$)

In diesem Fall: $R = 0$

weil für $x \in \mathbb{C}$, $x \neq 0$: $|n!\, x| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

[z.B. $x = \frac{1}{2}$

$a_n x^n = n! \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$= 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{24}{16} = \frac{3}{2}, \frac{120}{32} \approx 4, \frac{720}{64} > 10, \ldots$] ← konvergiert gegen $+\infty$

$\left[\frac{1}{|n!\, x^n|} = \frac{1}{|x|^n n!} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \right]$

(weil Inverse konvergiert gegen 0.)

Bsp. 2.11.5]

$\rightsquigarrow$ $\sum n!\, x^n$ divergiert.

(2) $a_n = \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$, Potenzreihe: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$

$$\left|\frac{x^n}{n}\right| \leq |x|^n \rightsquigarrow R \geq 1 \text{ (wie für } \sum x^n \text{ (die geom. Reihe)).}$$

[<u>Bem</u>: Falls $|a_n| \leq |b_n|$, ist R für $\sum a_n x^n \geq R$ für $\sum b_n x^n$].

(R = Konvergenzradius)

$\sum \frac{x^n}{n}$ divergiert für $|x|>1$ weil $\left|\frac{x^n}{n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

$\Rightarrow \boxed{R=1}$ $\left(\frac{2^n}{n} \to \infty\right)$ Beispiel einer divergierenden Reihe

↳ genau wie für die geom. Reihe $\sum x^n$.

für $|x|=1$? $\underline{x=1}$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

$\underline{x=-1}$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdots$ konvergiert. (nicht absolut).

(3) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$ hat $R=+\infty$

(4) $\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{2^n}_{a_n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^n$ hat $\boxed{R=\frac{1}{2}}$

§ 4.4 Exponential (auf $\mathbb{C}$):

Def: (Exponentialfunktion) $\exp: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

ist $\boxed{\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}}$ $= e^x$

① exp ist stetig auf $\mathbb{C}$

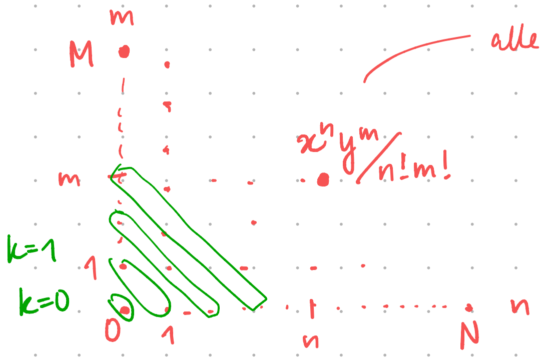
② die Beschränkung von exp auf $\mathbb{R}$ ist eine Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

[weil $\frac{1}{n!} \in \mathbb{R}$]

Satz: (4.4.2) Für alle x, y in $\mathbb{C}$ gilt $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$

Beweis: Idee: $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{y^m}{m!}\right) = ?$

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \sum_{m=0}^{M} \frac{y^m}{m!} = \sum_{\substack{n=0\\m=0}}^{N,M} \frac{x^n y^m}{n!\,m!}$$



alle Zahlen auf Gitter zusammenaddieren.

$$= \sum_{k=0}^{N+M} \left(\sum_{n+m=k} \frac{x^n y^m}{n!\,m!} \right) \qquad \begin{matrix} 0 \le n \le N \\ 0 \le m \le M \end{matrix}$$

Man kann "$N = M = +\infty$" nehmen. (Begründung: 4.4.3)

Das bedeutet:

$$\exp(x)\exp(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Bigg(\underbrace{\sum_{\substack{n+m=k \\ 0\le n \\ 0 \le m}} \frac{x^n y^m}{n!\,m!}}_{} \Bigg)$$

$$= \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n y^{k-n}}{n!\,(k-n)!}$$

Binomialentwicklung:

$$\left[\binom{k}{n} = \frac{k!}{n!\,(k-n)!} \right]$$

("n aus k")

fast gleich! (multipliziert & dividiert durch $k!$)

$$= \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{k} \frac{k!}{n!\,(k-n)!} x^n y^{k-n}$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} x^n y^{k-n}$$

$$= \frac{1}{k!} (x+y)^k$$

$$\Rightarrow \boxed{\exp(x)\exp(y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = \exp(x+y)}$$

Eigenschaften von Exponentialfunktionen:

Kor. (4.4.4) (1) $\exp(x) \neq 0$ für $x \in \mathbb{C}$, und $\frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x)$

[weil $\exp(x)\exp(-x) = \exp(x-x) = \exp(0) = 1$]

(2) für alle $x \in \mathbb{C}$, $\exp(\bar{x}) = \overline{\exp(x)}$

[weil $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\bar{x}^n}{n!} = \overline{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right)}$, weil die Funktion $c(x) = \bar{x}$ stetig ist.]

(3) Für $x \in \mathbb{R}$ ist $\exp(x) > 0$, die Funktion

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

ist streng wachsend und injektiv d.h. bijektives Bild zw. x und $\exp(x)$

Bild ist nicht nach oben beschränkt

$$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} \exp(x) = +\infty.$$

[weil: ① $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots$

$\geq 1, \quad x \in \mathbb{R}_+$

und $\exp(x) = \dfrac{1}{\exp(-x)} > 0, \quad x < 0$

② für $x < y$ in $\mathbb{R}$,

$$\exp(y) - \exp(x) = \underbrace{\exp(x)}_{0} \cdot \underbrace{(\exp(\underbrace{y-x}_{\in \mathbb{R}_+}) - 1)}_{\geq 0} > 0$$

> 0 für $y > x$

③ $\exp(x) \geq 1 + x \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \quad (x \geq 0)$

$\exp(x) = \dfrac{1}{\exp(-x)} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0 \quad (x < 0)$

(weil falls $f(x) \to +\infty$ ist $\frac{1}{f(x)} \to 0$)

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = e^x$$

$$\exp(2) = 1 + 2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{6} + \frac{2^4}{24} + \cdots = e^2 \approx 7.389\ldots$$

$$\exp(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \cdots + \frac{1^n}{n!} + \ldots = e \approx 2.718$$

Weil $\exp: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig + injektiv ist, und das Bild ist $]0,+\infty[$

$\left[\begin{array}{l} \exp(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0 \\ \exp(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \end{array}\right]$ können wir folgende Definition machen:

Def: Der Logarithmus ist die Umkehrfunktion

oder ln $\quad \log:]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ (log = für uns natürlicher Logarithmus)

von $\exp: \mathbb{R} \longrightarrow]0,+\infty[$.

Es gilt: log ist:
- streng wachsend
- stetig

$\log(1) = 0 \quad [\exp(0) = 1]$

$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$

$[$weil $ab = (\log(ab)) = \exp(\log(a) + \log(b))$

$= \exp(\log(a)) + \exp(\log(b)) = ab\ ]$

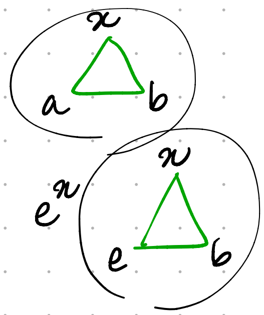
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \log(x) = +\infty$

$\log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log(a) \quad , \quad a > 0$

$a^x = b$

$\log_a(b) = x$



$\log(b) = x$

$\left(\begin{array}{l} e^2 \approx 7.389 \\ \log(7.389) \approx 2 \ ✓ \end{array} \right)$

Def: (Potenzfunktion)

$x > 0 \quad , \quad a \in \mathbb{C}$ $\qquad$ Def!

Wir definieren: $x^a = \exp(a \log(x))$

Exponential = Summe der Potenzreihe.

V16

05.11.20

Satz: (4.4.7) Seien $x>0$, $y>0$, $a, b \in \mathbb{C}$

Es gilt $x^{a+b} = x^a x^b$

$(xy)^a = x^a y^a$

$(x^a)^b = x^{ab}$

und wenn $a \in \mathbb{Z}$ ist x^a wie oben definiert dieselbe Zahl als x^a als Produkt / Inverse von x, $|a|$ mal definiert.

z.B. $x^1 = x$, $x^{-1} = \frac{1}{x}$, $x^2 = x \cdot x \cdot x$, ...

Def: Sei $e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$

Es gilt $\exp(x) = e^x$ für $x \in \mathbb{C}$.

Beweis:

$$\begin{aligned} x^{a+b} &\overset{\text{def}}{=} \exp((a+b)\log(x)) \\ &= \exp(a\log(x) + b\log(x)) \\ &= \exp(a\log(x)) \exp(b\log(x)) \\ &\underset{\text{def}}{=} x^a x^b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x^a)^b &= \exp(b\log(x^a)) \\ &= \exp(b \cdot a \cdot \log(x)) \\ &\underset{\text{def}}{=} x^{ab} \end{aligned}$$

$x^a = \exp(a \cdot \log(x))$

$\Downarrow$

$\log(x^a) = a \cdot \log(x)$

$(xy)^a = x^a y^a$: Übung (beweisen)

$x^1 = \exp(1 \cdot \log(x)) = x$

$x^{-1} = \exp(-\log(x)) = \frac{1}{\exp(\log(x))} = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow$ z.B. $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Logarithmus}}}{x^2} = x^{1+1} = x^1 \cdot x^1 = x \cdot x = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Produkt } x \cdot x}}{x^2}$, $\underbrace{\text{Induktion für } k \in \mathbb{Z}}_{\text{als Übung machen}}$

Sei $x \in \mathbb{C}$: $\exp(x) = \exp(x \cdot 1) = \exp(x \cdot \log(e)) = e^x$ $\quad (e = \exp(1))$

Beispiele:

- $e^x e^y = e^{x+y}$
- $x^{1/2} = \sqrt{x}$ weil $(x^{1/2})^2 = x^1 = x$ und $x^{1/2} > 0$
- Ähnlicherweise für $x^{1/k}$ für $k \in \mathbb{N}$ $\sqrt[k]{x}$ "k-te Wurzel von x"

Bem: Logarithmus existiert nicht für nicht-positive reelle Zahlen! (auch nicht für 0!)

Bemerkungen: (1) für $k \in \mathbb{Z}$, ist x^k auch für $x \in \mathbb{C}$ (oder $x \neq 0$ $k<0$) definiert (als Produkt / Inverse ...)

(2) $e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots$ (die Reihe konvergiert sehr schnell)

man überprüft $\left| e - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \right| \leq \frac{2}{n!}$

$\rightsquigarrow$ $e = 2.718281828 45 \dots$

$e \notin \mathbb{Q}$. und e ist nicht (wie $\sqrt{2}$) eine Lösung einer Gleichung

$$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

$(n \geq 1 \ a_n \neq 0, \ a_i \in \mathbb{Q})$.

Satz (4.4.9): Für $r \in \mathbb{R}$, $a > 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} x^r e^{ax} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^r e^{-ax} = 0$$

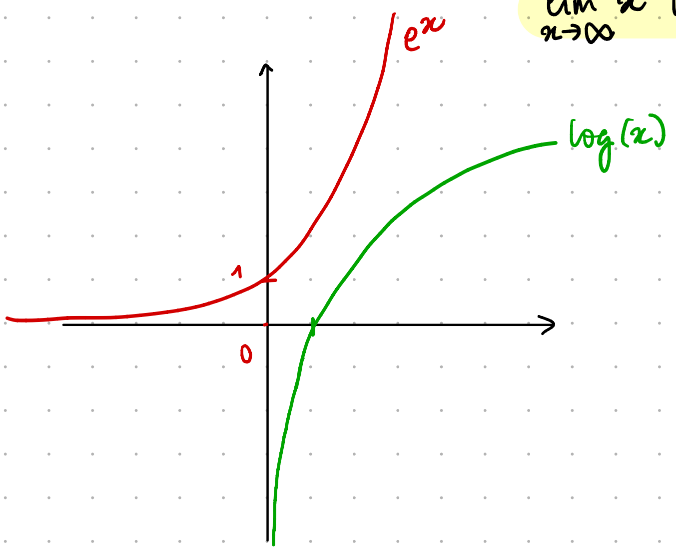
Für $r > 0$, $a \geq 0$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^r \log(x)^a = 0$$

$\left[\lim_{x \to 0} x \log(x) = 0 \right]$

$$\lim_{x \to \infty} x^r \log(x)^a = +\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} x^{-r} \log(x)^a = 0$$



(Spiegelung an $x = y$ (weil Inverse))

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log(x)^{10}}{\sqrt{x}} = 0$$

z.B. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{100}} e^{ax} = +\infty$

weil für $x \geq 0$ ist $e^{ax} = 1 + ax + \frac{(ax)^2}{2} + \dots + \frac{(ax)^n}{n!} + \dots$

$$\geq \frac{(ax)^{101}}{(101)!}$$

$$\rightsquigarrow \frac{e^{ax}}{x^{100}} \geq \frac{a^{101}}{(101)!} x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

§4.5 – Trigonometrische Funktionen

Def: $x \in \mathbb{C}$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Überprüfen/ Eigenschaften:

- $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$
- $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $e^{ix} = \cos(x) + i\cdot\sin(x)$ $\forall x \in \mathbb{C}$.

$\Rightarrow k \in \mathbb{N}$, $\boxed{\begin{aligned} e^{ikx} &= (\cos(x) + i\cdot\sin(x))^k \\ &= \cos(kx) + i\cdot\sin(kx) \end{aligned}}$ ← Def.

Satz: Für $x \in \mathbb{C}$ gilt
(4.5.2)

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Insbesondere ist $\left.\begin{array}{l} \cos(x) \in \mathbb{R} \\ \sin(x) \in \mathbb{R} \end{array}\right\}$ für $x \in \mathbb{R}$

und $\cos(x) = \operatorname{Re}(e^{ix})$, $\sin(x) = \operatorname{Im}(e^{ix})$ für $x \in \mathbb{R}$.

Beweis: $e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$, $(i^n)_{n \in \mathbb{N}_0} = (1, i, -1, -i, 1, i, \dots)$

$\Rightarrow$ periodische Reihe.

$$\Rightarrow e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n}}{(4n!)} + i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} - i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!}$$

$e^{-ix} =$ Σ's $-i$ gleich $-$ wie $+i$ oben.

verändert sich verändert sich

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$$

Signum alterniert.

Def $\Rightarrow$ $e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$

$k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $e^{ikx} = \cos(kx) + i \cdot \sin(kx)$ $\circleddash$

Aber auch $e^{ikx} = (e^{ix})^k = (\cos(x) + i \cdot \sin(x))^k$

Weitere Eigenschaften:

Satz: $x \in \mathbb{R}$

$|e^{ix}| = 1 \Leftrightarrow \cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$

Insbesondere $|\cos(x)| \leq 1$,

$|\sin(x)| \leq 1$.

Beweis: $|e^{ix}|^2 = e^{ix} \cdot \overline{e^{ix}} = e^{ix} e^{-ix}$, $x \in \mathbb{R}$

$= e^0 = 1$

$$|e^{ix}|^2 = \underbrace{\operatorname{Re}(e^{ix})^2}_{} + \underbrace{\operatorname{Im}(e^{ix})^2}_{} \text{ aus def.}$$

$$= \cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$$

Beispiele (Anwendung von $e^{ix} = \cos(x) + i\cdot\sin(x)$ für trigonometrische Formeln)

(1) Was ist $\cos(x+y)$ als Funktion von $\cos(x), \cos(y), \sin(x), \sin(y)$?

"Cos und Sin sind Funktionen, die zusammen leben"

$$\cos(x+y) + i\sin(x+y) = e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}$$

$$= (\cos(x) + i\sin(x)) \cdot (\cos(y) + i\cdot\sin(y)) = \text{(multiplikation von 2 komplexen Zahlen)}$$

$$= \cos(x)\cos(y) + i\cdot\sin(x)\cos(y) + i\cdot\cos(x)\sin(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(x+y) = \mathrm{Re}(-) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ \sin(x+y) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aus Def.}}}{\mathrm{Im}(-)} = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \end{cases}$$

(2) Was ist $\sin(x)^4$ als Funktion von $\sin(kx), \cos(kx)$ (mit $k \in \mathbb{N}$)?

$$\sin(x)^4 = \left(\frac{e^{ix} - e^{ix}}{2i}\right)^4$$

Binomialentwicklung!

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$= \frac{1}{16}(e^{ix} - e^{ix})^4$$

$$= \frac{1}{16}\cdot\left((e^{ix})^4 - 4e^{3ix}\cdot e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} - 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(e^{4ix} + e^{-4ix} - 4(e^{2ix} + e^{-2ix} + 6\right)$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$$

(3) Was ist $\cos(5x)$ oder $\sin(5x)$ als Funktion von $\cos(x)^k, \sin(x)^k$?

$$(\cos(x) + i\sin(x))^k = \cos(kx) + i\cdot\sin(kx)$$ ← wichtige Formel für da.

$$\Rightarrow \cos(5x) + i\cdot\sin(5x) = (\cos(x) + i\cdot\sin(x))^5$$

$i^2 = -1$
$i^3 = -i$

Binomialentwicklung $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

$$= \cos(x)^5 + 5i\cos(x)^4\sin(x) - 10\cdot\cos(x)^3\cdot\sin(x)^2 - 10i\cos(x)^2\sin(x)^3 + 5\cos(x)\sin(x)^4 + i\sin(x)^5$$

Realteil & Imaginärteil identifizieren:

$$\Rightarrow \cos(5x) = \mathrm{Re}(\text{—})$$
$$= \cos(x)^5 - 10\cos(x)^3\sin(x)^2 + 5\cos(x)\sin(x)^4$$

$$\sin(5x) = \mathrm{Im}(\text{—})$$
$$= 5\cos(x)^4\sin(x) - 10\cos(x)^2\sin(x)^3 + \sin(x)^5$$

Zahl π definieren:

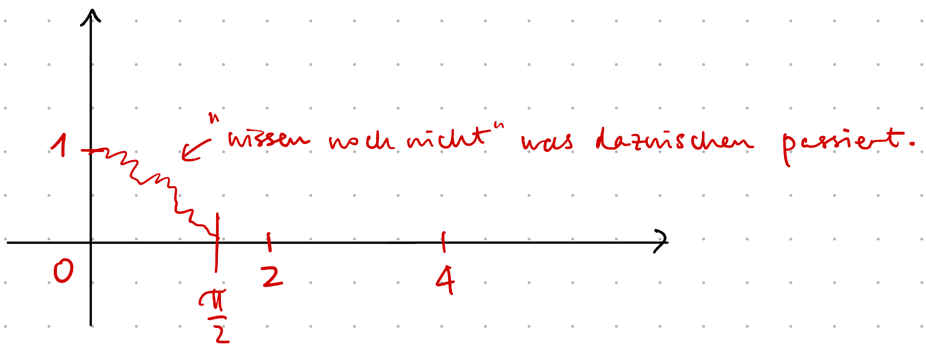
Hilfsatz: Es gibt eine Zahl $\pi \in [0,4]$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$
$$\cos(x) > 0 \quad \text{für} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$$

Weiter gilt $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$$\sin(x) > 0 \quad \text{für} \quad x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Geometrisch:



(Beweis: nächste Woche)

Satz: Für $x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(x+\pi) &= -\cos(x) \\ \sin(x+\pi) &= -\sin(x) \\ \cos(x+2\pi) &= \cos(x) \\ \sin(x+2\pi) &= \sin(x) \\ \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= -\sin(x) \\ \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos(x) \end{aligned}}$$

[insb. $\cos(\pi) = -1$]

[$\sin(\pi) = 0$]

Beweis: $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)\underbrace{\cancel{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}}_{=0} - \sin(x)\underbrace{\cancel{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}}_{=1} = -\sin(x)$ ⊛

$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)\underbrace{\cancel{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}}_{=0} + \cos(x)\underbrace{\cancel{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}}_{=1} = \cos(x)$

usw.

⊛ $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

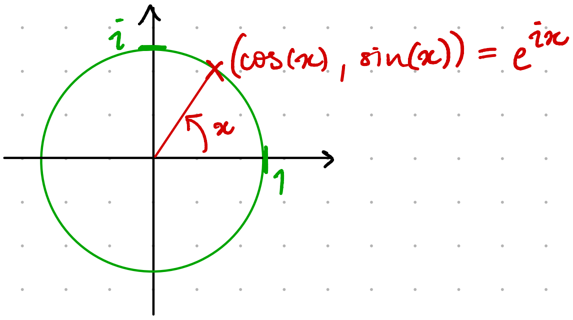
$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

Bemerkung:

$$\begin{cases} e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i \\ e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\cdot\sin(\pi) = -1 \\ e^{3i\frac{\pi}{2}} = -i \\ e^{2i\pi} = 1 \end{cases}$$

usw.

Hilfsatz: Für $\alpha \in]0, 2\pi[$ ist $e^{i\alpha} \neq 1$.



V17

Beweis

Vom Hilfsatz: Es gibt eine Zahl $\pi \in [0,4]$ s.d.

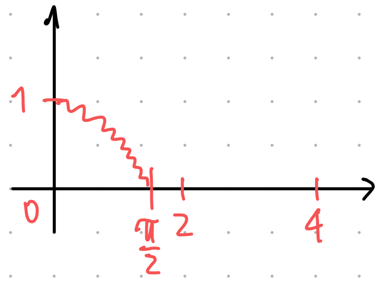
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\cos(x) > 0 \text{ für } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$$

Weiter gilt

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\sin(x) > 0 \text{ für } x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$$



Idee (warum π existiert)

$\cos(0) = 1$ $\quad \left[\frac{e^{i0} + e^{-i0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1\right]$

cos ist stetig auf $\mathbb{R}$

es ist genug zu überprüfen $\cos(2) < 0$

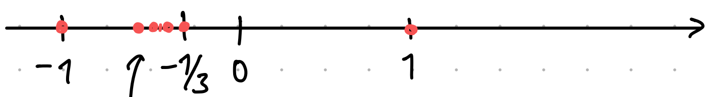
($\Rightarrow$ es gibt $x_0 \in]0, 2[$ mit $\cos(x_0) = 0$, und man kann $\frac{\pi}{2}$ als die kleinste Nullstelle definieren).

Wie? → Potenzreihe benutzen:

$$\cos(2) = \underbrace{1 - \frac{2^2}{2}}_{1-2} + \frac{2^4}{2} - \dots + \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

→ nachher alternierend (hin und zurück, hin und zurück.)

$\Rightarrow$ (alternierende Reihe): $\cos(2) \leq 1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{24}$



alternieren hier. d.h. $\cos(2) < 0$

Weil $\frac{\pi}{2}$ die kleinste Nullstelle ist, folgt auch $\cos(x) > 0$ für $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$.

Für <u>sinus</u> auf $[0, \frac{\pi}{2}]$:

Wir wissen: $\cos(0) = 0$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \text{ oder } -1$$

aber mit der Potenzreihe / alternierende Reihen kann man beweisen, dass: $\boxed{\sin(x) \geq x - \frac{x^3}{6}}$ für $0 \leq x \leq 4$ insbesondere kann man dann beweisen, dass $\sin(x) > 0$ für $0 < x^2 < 6$, und sicher für $0 < x \leq 2$.

$$\left(e^1 = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots \right) \quad \exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

$$\exp(x) = e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1} + \frac{x^2}{2!}$$

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Warum ist $e^{i\alpha} \neq 1$ für $0 < \alpha < 2\pi$?

Falls nicht, dann gibt es eine kleinste Zahl $0 < \alpha < 2\pi$ mit $e^{i\alpha} = 1$.

$$(e^{i\alpha/4})^4 = e^{i\alpha} = 1$$

$$\rightsquigarrow e^{i\alpha/4} \in \{1, -1, i, -i\}$$

$Re(e^{i\alpha/4}) = 0$

$\cos\left(\frac{\alpha}{4}\right) = 0$, unmöglich weil $\alpha/4 < \frac{\pi}{2}$

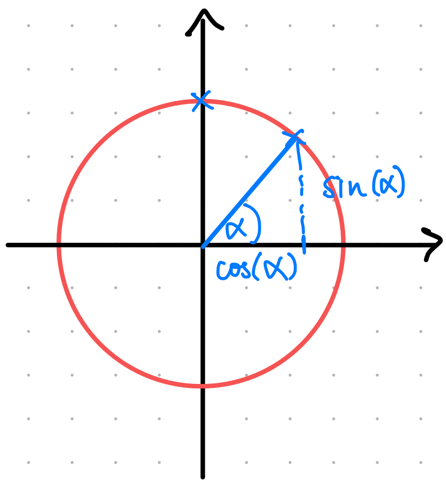
ausgeschlossen ($\alpha/4 < \alpha$)

auch nicht möglich ($e^{i\alpha/2} = 1$, $\alpha/2 < \alpha$

Satz: (1) Jede $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 = 1$

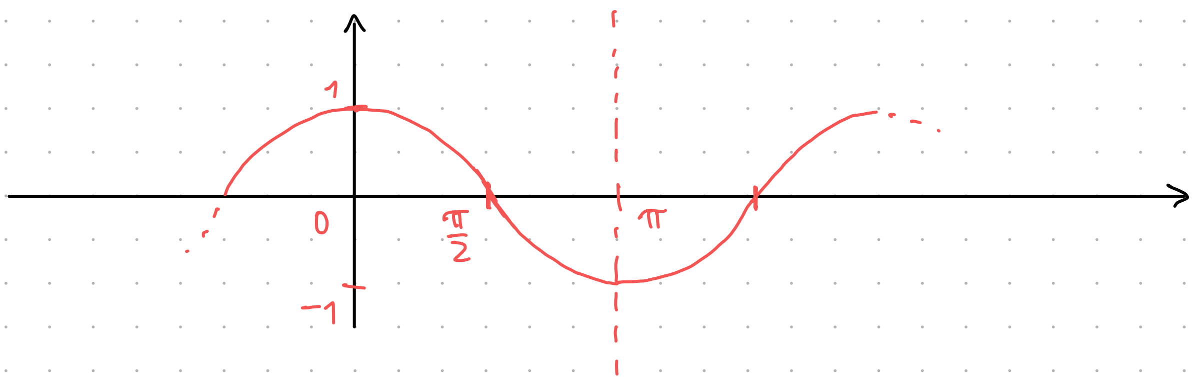
hat die Form $\begin{cases} a = \cos(\alpha) \\ b = \sin(\alpha) \end{cases}$

wo $\alpha \in [0, 2\pi[$ <u>eindeutig</u> ist

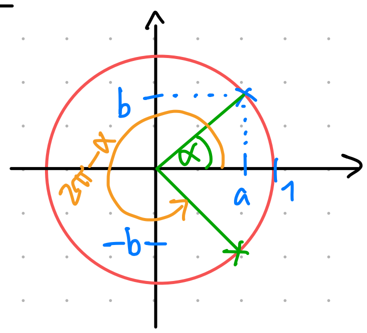


(2) cos ist streng fallend auf $[0, \pi]$

sin ist streng wachsend auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



<u>Warum?</u>



Falls $a = 1,\ b = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ ✓

Sonst $-1 \leq a < 1$

Weil $\cos(0) = 1,\ \cos(\pi) = -1$

$\rightsquigarrow \alpha \in]0, \pi],\ \cos(\alpha) = a$

Weil $\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$

$\rightsquigarrow \sin(\alpha)^2 = 1 - a^2 = b^2$

$\rightsquigarrow \boxed{\sin(\alpha) = b}$ oder $\boxed{\sin(\alpha) = -b}$

$\swarrow$ α Lösung ✓

$\swarrow$ $2\pi - \alpha$ Lösung

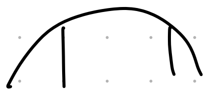
weil $\cos(2\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos(\alpha) = a$

$\sin(2\pi - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) = b$

Warum ist cosinus fallend auf $[0, \pi]$?

Man sieht, dass cos <u>injektiv</u> ist auf $[0, \pi] \Rightarrow$ streng monoton

$\Rightarrow$ streng fallend weil $\cos(0) > \cos(\pi)$



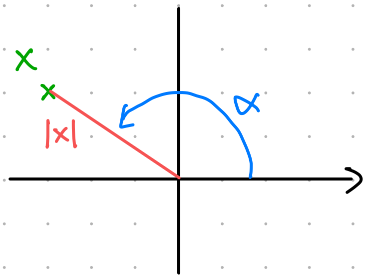
Ähnlicherweise für sinus.

Def: $x \in \mathbb{C}$

Es gibt $\alpha \in [0, 2\pi[$ eindeutig falls $x \neq 0$

mit $x = |x| e^{i\alpha}$

α: das <u>Argument</u> von x



$\left(x \neq 0 \Rightarrow \left| \frac{x}{|x|} \right| = 1 \right.$

$\Rightarrow \frac{x}{|x|} = e^{i\alpha}$ für

$\left. \alpha \in [0, 2\pi[\text{ eindeutig} \right).$

(für $|x| = 0$ α = jede beliebige $R \in \mathbb{R}$)

$\rightarrow$ nicht klar definiert.

$(|x|, \alpha)$ heissen Polarkoordinaten von x.

Anwendungen:

(1) $x = |x| e^{i\alpha}$, $y = |y| e^{i\beta}$ $\Rightarrow$ $x \cdot y = |x \cdot y| e^{i(\alpha + \beta)}$

[<u>Warnung!</u> $\alpha + \beta$ kann $> 2\pi$ sein!]

$\hookrightarrow$ (dann ist Argument $\alpha + \beta - 2\pi$)

(2) **Gleichungen**: $a \in \mathbb{C}$ gegebene Zahl

$z = \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

z.B. $z^2 = \underbrace{4i}_{a}$ $\quad a = 4i = |a| e^{i\alpha} = 4e^{\frac{\pi}{2}i}$

$x^d = a$, $\quad x \in \mathbb{C}$ unbekannte

$\underline{a = 0}$: $\quad x = 0$ einzige Lösung

$\underline{a \neq 0}$: $\quad \boxed{a = |a| e^{i\alpha}}$ ← α von a, $\quad 0 \leq \alpha < 2\pi$

z.B. $4i = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$

Die Lösungen sind:

Rechenweg

$$x_0 = |a|^{\frac{1}{d}} \; e^{\frac{i\alpha}{d}}$$

$$x_1 = |a|^{\frac{1}{d}} \; e^{\frac{i\alpha}{d} + \frac{2i\pi}{d}}$$

$$\vdots$$

$$x_{d-1} = |a|^{\frac{1}{d}} \; e^{i\frac{\alpha}{d} + \frac{(d-1)2i\pi}{d}}$$

(alle Lösungen einer Gleichung).

z.B. $z^2 = 4 = 4e^{i \cdot 0}$

$z_0 = 4^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i \cdot 0}{2}}$

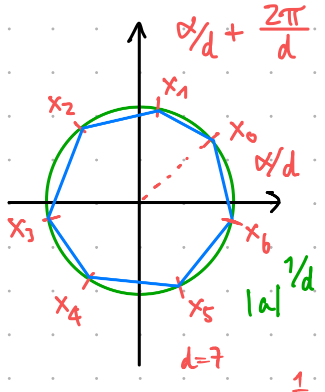
$= 2$

$z_1 = 4^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i + 2\pi}{2}}$

$= 4^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\pi i}$

$= 2 \cdot e^{\pi i} = (2 \cdot (-1)) = (-2)$

$(-2)^2 = 4$ ✓ ☺



$|a|^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{|a|}$

Kontrolle:

$$\left(x_j^{\,d} = |a| e^{i\alpha + \frac{ji2\pi}{d} \cdot d} = |a| e^{i\alpha + 2i\pi j} = |a| e^{i\alpha} = a \right) \text{ (Zurückrechnen)}$$

d.h. z.B. $z^2 = 4$

$z_1 = 2 \cdot e^{\pi i}$.

$(z_1)^2 = (2 \cdot e^{\pi i})^2 = 2 \cdot e^{2\pi i} = 4$

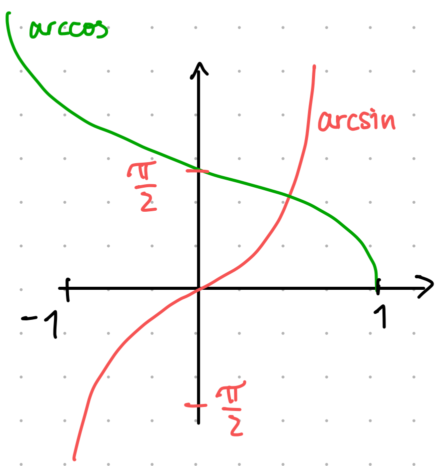
Def: (Winkelfunktionen)

Arkus Cosinus: $\quad [-1, 1] \xrightarrow{\arccos} [0, \pi]$

Umkehrfunktion von cos: $[0, \pi] \to [-1, 1]$

Arkus Sinus: $\quad [-1, 1] \xrightarrow{\arcsin} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Umkehrfunktion von sin: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$



Warnung!: $\quad \cos(\arccos(x)) = x \quad$ aber

$\arccos(\cos(x)) \neq x$ im Allgemeinen!

(weil $\arccos(y) \in [0, \pi]$)

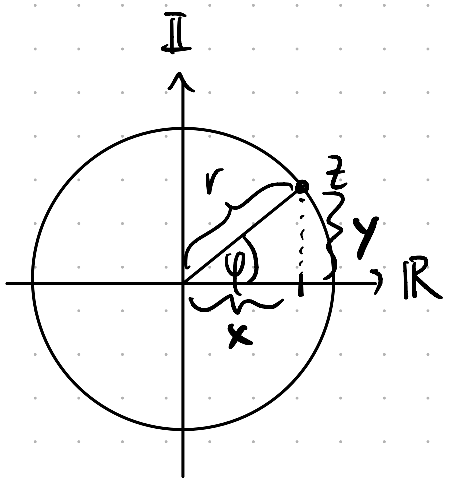
Kleine Zusammenfassung Kap. IV:

1. Gleichmässige Konvergenz (+ Stetigkeit der Grenzwert)
2. Normale Konvergenz ($\Rightarrow$ gleich. Konv.) aber leichter zu überprüfen
3. Potenzreihen / Konvergenzradius
4. Exponential / Trig. Funktionen + Umkehrfunktionen

Komplexe Zahlen, Polarform: $\boxed{z = re^{i\varphi}}$

φ = Winkel, Argument.

r = Radius.



Kartesisch: $\boxed{z = r \cdot \cos\varphi + i \cdot r \cdot \sin\varphi}$

$= \boxed{z = x + yi}$

$\cos\varphi = \frac{x}{r}$

$\varphi = \arccos\frac{x}{r}$

$\sin\varphi = \frac{y}{r}$

$\varphi = \arcsin\frac{y}{r}$

$\varphi = \dfrac{\arcsin\frac{y}{r}}{\arccos\frac{x}{r}} = \boxed{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}$

$\boxed{r = \sqrt{a^2 + b^2}}$

Polarform $\Rightarrow$ $\boxed{z = re^{i\varphi}}$

$\boxed{az^2+bz+c=0}$ lösen:

$$\left(\text{aus } x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$\boxed{z_{1,2}=\frac{-b\pm w}{2a}}$$

$$(z=a+bi)$$

mit $\boxed{w=D=b^2-4ac}$.

D ↑ Diskriminante.

falls

$w=D\geq 0\rightarrow z_1,z_2\in\mathbb{R}$

$w=D<0\rightarrow z_1,z_2\in\mathbb{C}$ &

z_1 & z_2 komplex konjugiert zueinander.

$$\boxed{\sqrt{i}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}$$

$\sqrt{i}=a+bi$

$i=a^2-b^2+2abi$

$\Rightarrow a^2-b^2=0$

$a=b$

$\Rightarrow 2abi=i$

$a^2=\frac{i}{2i}=\frac{1}{2}$ $\qquad\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$