Kapitel 5:

Ableitung / Differenzierbare Funktionen

Motivationen:

① bessere Approximationen einer Funktion in der Nähe von x_0?

[$f(x)$ mit eine lineare / Polynom grad 1 $(ax+b)$ approximieren]

② leichter Eigenschaften wie Monotonie überprüfen

§5.1. Definition / algebraische Eigenschaften

Idee: $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall

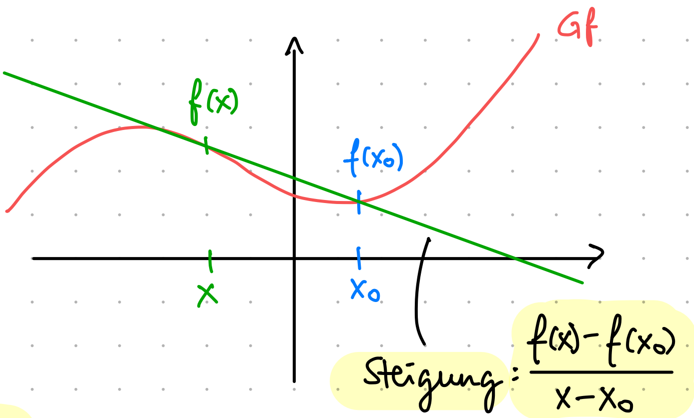
Wir suchen für $x_0 \in I$ das beste Polynom $p(x) = a(x-x_0)+b$ um $f(x)$ zu approximieren für x in der Nähe von x_0.

$$b = p(x_0) = f(x_0)$$

Ziel: $a(x-x_0) + f(x_0) \approx f(x)$

ist ungefähr

$$a \approx \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$



Definition: $I \subset \mathbb{R}$ Intervall

$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$
$x_0 \in I$

Falls der Grenzwert $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \neq x_0)}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert, sagt man:

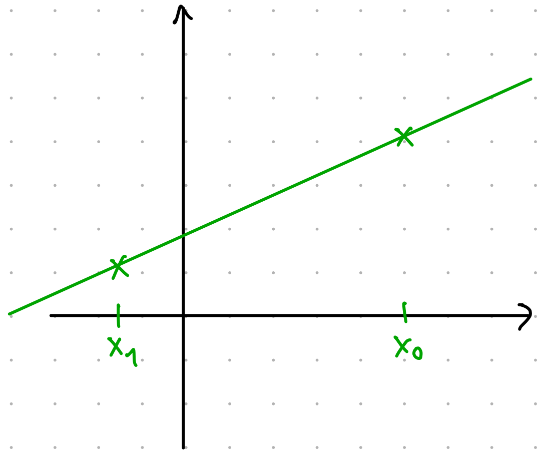
- f ist an der Stelle x_0 differenzierbar
- der Grenzwert ist die Ableitung von f an x_0, bezeichnet

$$\boxed{f'(x_0)}$$

Bem: die Gerade durch $(x_1, f(x_1))$, $(x_0, f(x_0))$ hat die Gleichung

$$\boxed{y - f(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)}$$ ← wichtig

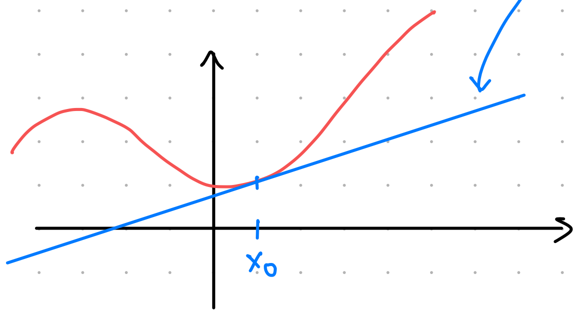
Steigung der Gerade



Def: Falls $f'(x_0)$ existiert, ist die Gerade

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

die Tangente an der Stelle x_0



Def: Falls f ist auf x_0 differenzierbar für alle $x_0 \in I$, sagt man dass f auf I differenzierbar ist; $f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst Ableitung von f.

Bemerkungen:

① f' existiert nicht immer! (es gibt $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, aber wo $f'(x_0)$ für keine Zahl existiert!)

z.B. $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(3^n x)}{3^n}$ (← Reihe konvergiert normal $\forall x$), $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig

⇒ man kann diese Funktion an keiner Stelle ableiten.

hat keine Ableitung $f'(x_0)$

Anwendungen: Physik (Quantenmechanik)

Statistik (Brownsche Bewegung)

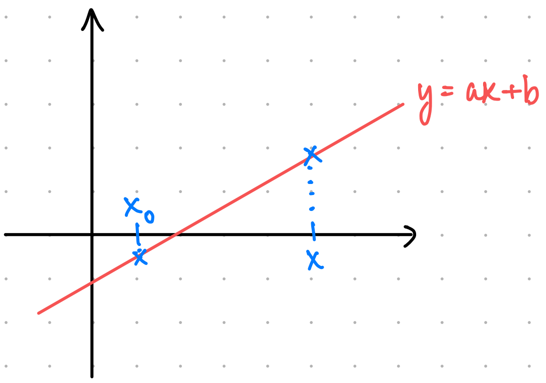
② [5.1.5]

Falls f differenzierbar an x_0 ist, ist sie auch stetig an x_0.
(aber nicht umgekehrt.) (Es gibt stetige Funktionen, die keine Ableitung haben (①).

V18

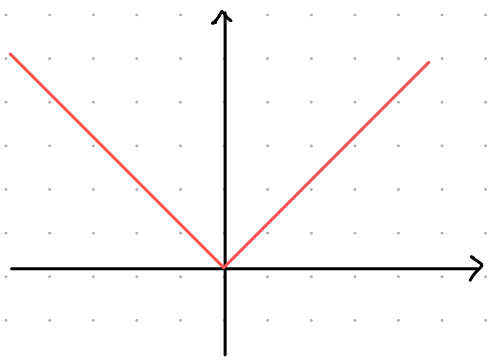
12.11.20

③ $f(x) = ax + b$ ist differenzierbar mit $f'(x) = 1a$ für alle x.



$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a$$

④



$f(x) = |x|$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

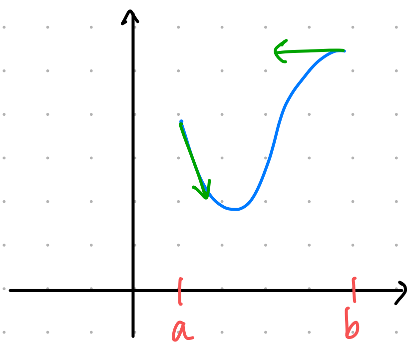
weil $\frac{f(x)}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

⑤ $I = [a, b]$, $x_0 = a$

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - a}$$

Manchmal bezeichnet: $f'_r(x_0)$

(Ableitung von Rechts)



Steigung nur für Zahlen $> a$ überlegt.

oder $f'_{l}(b)$

(Ableitung von links)

Algebraische Eigenschaften der Differenzierung

Satz: [5.1.6] $I \subset \mathbb{R}$ Intervall
$f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, differenzierbar.

alle auswendig!

(1) $f + g$ ist diff. und $(f+g)' = f' + g'$

(2) [Leibnitzsche Regel] (Produktregel) fg ist differenzierbar und
$(fg)' = f'g + fg'$

(3) (Divisionsregel) $g(x) \neq 0$ für $x \in I$ ist f/g definiert & diff.

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \qquad \left(\text{insb. } \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}\right)$$

(4) [Kettenregel] $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

f, g diff. $\Rightarrow$ $g \circ f$ ist diff. und

$$(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f) \qquad [(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x))]$$

(5) [Umkehrfunktion] f injektiv, $J = f(I)$ Bild von f, ist
$f^{-1} : J \longrightarrow I$ ist diff.

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} \qquad \left[\text{d.h. } (f^{-1})(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}\right]$$

falls $f'(x) \neq 0$, für $x \in I$

Beweis

(2) (Leibniz) $x_0 \in I$

$$\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0} = g(x)\,\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + f(x_0)\,\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

weil g stetig ist

$$g(x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

$x \to x_0$

(3)
$$\frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{g(x)\,g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0)-g(x)}{x-x_0}$$

$x \to x_0$

$$\xrightarrow[x \to x_0]{} \frac{1}{g(x_0)^2} \cdot -g'(x_0)$$

(4) [Kettenregel] $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$$\frac{g\circ f(x) - g\circ f(x_0)}{x-x_0} = \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$x \to x_0$

$$\xrightarrow[x \to x_0]{} g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

(5) Umkehrfunktion, mit Anwendung der Kettenregel

$$I \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} J$$

$$(f^{-1}\circ f)(x) = x \quad \text{für} \quad x \in I$$

Kettenregel $\Rightarrow$ $f'(x)\,(f^{-1})'(f(x)) = 1$ für $x \in I$

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

$\underline{y = f(x)}$ $\qquad (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

Satz: [5.1.7] Die wichtigsten Ableitungen

(1) Polynome: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

sind alle auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$$

insbesondere: $(x^n)' = n x^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$

$(1)' = 0$

(2) Exponential, cosinus, sinus sind auf $\mathbb{R}$ differenzierbar.

mit: $\begin{cases} \exp' = \exp \\ \cos' = -\sin \\ \sin' = \cos \end{cases}$

(3) logarithmus: $]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ ist diff. mit

$$(\log)'(x) = \frac{1}{x} \qquad \forall x$$

(4) $f(x) = x^a$ ist auf $]0, +\infty[$ diff. mit

$$f'(x) = a x^{a-1}, \quad x > 0$$

(5) $\arccos:]-1, 1[\longrightarrow]0, \pi[$

$\arcsin:]-1, 1[\longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sind diff. mit

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$u(n) = 11^n - 1$

$u(1) = 11 - 1 = 10$ ✓

$n \to n+1$

$u(n+1) = 11^{n+1} - 1 = (10+1)\,11^n - 1 = \underbrace{11^n - 1}_{u(n)} + 10 \cdot 11^n$

$11 \cdot 11^n - 1$

$(10+1) \cdot 11^n - 1$

$10 \cdot 11^n + \underbrace{11^n - 1}_{u(n)}$

$11^{n+1} - 1$

$11^n + 11 - 1$

$(10+1)^n + 11 - 1 =$

$\underbrace{11^n - 1}_{u(n)} + 11 \qquad 10^n + 11 - 1$

$11 \cdot 11^n - 1$

$(10+1)\,11^n - 1$

$\underbrace{10 \cdot 11^n}_{\text{durch 10 teilbar}} + \underbrace{11^n - 1}_{u(n)}$

$\div 10$ teilbar

Beweis

(1) (Polynome)

Für $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, wir benutzen Induktion

$$f_0 = 1 \rightsquigarrow \text{diff. mit } f_0' = 0$$

$$f_1(x) = x \rightsquigarrow \text{diff. mit } f_1'(x) = 1 = 1 \cdot x^0$$

<u>Hyp:</u> f_n diff. mit $f_n'(x) = nx^{n-1}$

$$f_{n+1}(x) = x^{n+1} = f_n(x) f_1(x)$$

$\overset{\text{Leibniz}}{\Longrightarrow}$ f_{n+1} differenzierbar mit

$$\begin{aligned} f_{n+1}'(x) &= f_n'(x) f_1(x) + f_n(x) f_1'(x) \\ &= nx^{n-1}x + x^n \cdot 1 \\ &= (n+1)x^n \end{aligned}$$

(2) Wir benutzen

Satz: Sei $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ Potenzreihen mit Konv. Radius $R > 0$, die Summe f ist auf $]-R, R[$ diff. mit

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \end{aligned}$$

("Wie ein Polynom mit Grad $+\infty$")

Dann folgt:

<u>$\exp'(x)$</u>:

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

$$\rightsquigarrow \exp'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{\cancel{n}x^{n-1}}{\cancel{n!}} + \cdots$$

$$\frac{1}{(n-1)!}$$

$$= \exp(x).$$

$\underline{\cos'(x)}$:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \dots$$

$$\rightsquigarrow \cos'(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \dots + \underbrace{\frac{(-1)^n}{(2n)!} 2n x^{2n-1}} + \dots$$

$$= \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} x^{2n-1}$$

$$= -\sin(x)$$

(3) $\log = \exp^{-1}$ $\quad (\exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[)$

$\exp'(x) \neq 0$ für alle x

$\rightarrow$ log ist differenzierbar auf $]0, +\infty[$ mit

$$\log'(x) = \frac{1}{\exp'(\log(x))} = \frac{1}{\exp(\log(x))} = \frac{1}{x}$$

(4) $f(x) = x^a = e^{a\log(x)} = (\exp \circ g)(x)$ $\quad$ wo $g(x) = a\log(x)$

↳ diff. weil log ist

$\underline{\text{Kettenregel}}$: f diff. mit

$$f'(x) = g'(x) \cdot \exp'(g(x))$$

$$= \frac{a}{x} e^{a\log(x)} = \frac{a}{x} x^a = a x^{a-1}$$

(5) arccos = Umkehrfunktion von $\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$

$$\cos' = -\sin$$

$\sin(x) > 0$ für $0 < x < \pi$ $\rightsquigarrow$

$\arccos :]-1, 1[\longrightarrow]0, \pi[$ ist diff. mit

$$\arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(weil: $\sin(\arccos(x))^2 + \cos(\arccos(x))^2 = 1$

$$\Rightarrow \sin^2(\arccos(x)) = 1 - x^2 \quad ⊛$$

$$\Rightarrow \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x} \quad \text{weil } \arccos(x) \in [0,\pi])$$

⊛ $\cos(\arccos(x)) = x$

$f(f^{-1}(x))$

$= x$

Beispiel: $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2-1})$

$I =]1, +\infty[$

$f: \log \circ g$ wo $g(x) = x + \sqrt{x^2-1}$

$\rightsquigarrow$ f auf I differenzierbar mit

$$f' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$g'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} \quad \text{so}$$

$$f'(x) = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) \cdot \frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}}$$

$(\sqrt{x})'$

$= (x^{\frac{1}{2}})'$

$\sqrt{x} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

§ 5.2 Ableitung von Grenzwerte:

Bem: Falls $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergent gegen $f(x)$ für $x \in I$, und jede f_n differenzierbar ist, folgt <u>nicht</u> immer, dass f differenzierbar ist, auch wenn $f_n \to f$ gleichmässig.

Bsp: jede $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig sind gleichmässig Grenzwert einer Folge von Polynome.

Satz: $I \subset \mathbb{R}$ Intervall
[5.2.2]
$n \in \mathbb{N}$, $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar
$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$

$\boxed{274}$ check !

<u>Hyp.</u>
- f_n' sind stetig
- $f_n \to f$ <u>gleichmässig</u> auf I
- $f_n' \to g$ gleichmässig auf I für eine Funktion g

$\Rightarrow$ f ist auf I differenzierbar, und $f' = g$, g stetig.

$$\left[\ (\lim_n f_n)' = \lim_n f_n'\ \right]$$

<u>Beispiel:</u> (a_n), $\sum a_n x^n$ mit $R > 0$ (Konvergenzradius)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad , \quad x \in\ ]-R, R[$$

$$= \lim_{n \to \infty} S_n(x) \quad \text{wo}$$

$$S_n(x) = a_0 + a_1 x + \quad ... + a_n x^n$$

$$S_n'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ ... \ + n a_n x^{n-1}$$

$S_n \longrightarrow f$ gleichmässig auf $]-r, r[$ für $r < R$

$s_n' = $ p. Summe von $\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n}_{\text{hat } R>0 \text{ als Konvergenzradius}}$

$s_n' \longrightarrow g$ auch gleichmässig auf $]-r, r[$

<u>Satz:</u> $\Rightarrow$ f ist differenzierbar auf $]-R, R[$
mit $\underline{f'(x) = \lim s_n' = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n}$

V19

§ 5.4 Globale Eigenschaften der Ableitung:

Themen des Kapitels

$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall

f auf I differenzierbar

Wofür Ableiten?

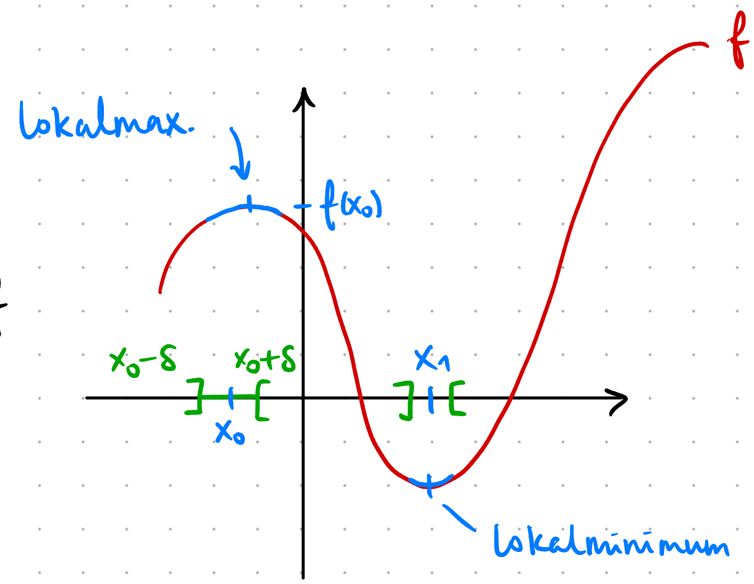
Signum von $f'(x)$ ⇝ ist f $\begin{cases} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{cases}$ oder ? beantwortbar.

⇝ Extremum finden
(Min oder Max.)

Def: (Lokalextremum)

$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, I Intervall

$x_0 \in I$



① x_0 heisst **Lokalminimum** von f falls es gibt $\delta > 0$ sodass

$$f(x) \geq f(x_0)$$

für $x \in I$ und $|x - x_0| < \delta$

② x_0 heisst <u>Lokalmaximum</u> falls es gibt $\delta > 0$ sodass $f(x) \leq f(x_0)$ für $x \in I$ und $|x - x_0| < \delta$

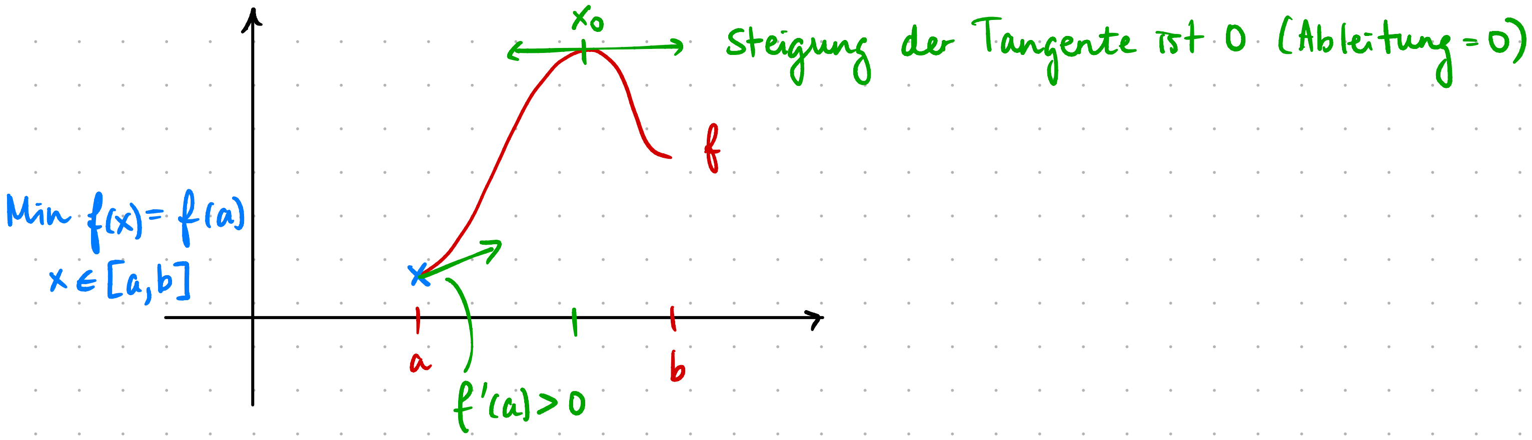
③ Falls ① oder ② gilt: **Lokalextremum** (= Lokalmin oder Lokalmax.)

Satz (Lokalextremumsatz):

$I \subset \mathbb{R}$, Intervall,

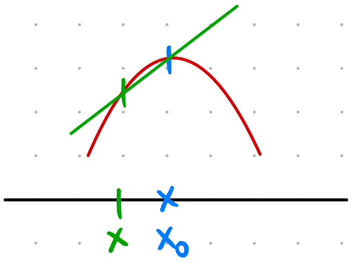
$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, differenzierbar

Sei $x_0 \in I$ ein Lokalmaximum, <u>nicht</u> $x_0 = \operatorname{Min} I$ oder $x_0 = \operatorname{Max} I$ (wenn sie existieren). Dann gilt $\boxed{f'(x_0) = 0}$



<u>Warum?</u> z.B. x_0 Lokalmaximum:

$$f(x) \le f(x_0) \quad \text{für } |x - x_0| < \delta$$



$\rightsquigarrow$ für $x < x_0$, $|x - x_0| < \delta$

$$\boxed{\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \geq 0}$$

für $x > x_0$, $|x - x_0| < \delta$

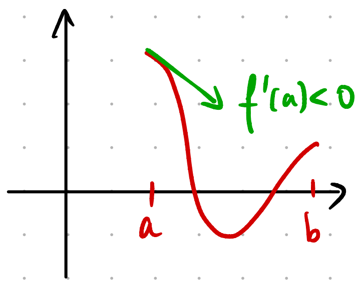
$$\boxed{\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq 0}$$

Aber $\dfrac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}]{} f'(x_0)$ sodass $\underbrace{f'(x_0) \geq 0 \quad f'(x_0) \leq 0}_{f(x_0) = 0}$

(geht nicht für Pkte, die das Max./Min. des Intervalls sind!)

Bemerkungen:

① Das (Satz) gilt <u>nicht</u> für $x_0 = \text{Min } I$ oder $x_0 = \text{Max } I$; (aber z.B. für $x_0 = \text{Min}(I)$ ein Lokalmaximum folgt $f'_r(x_0) = f'(x_0) \leq 0$.)

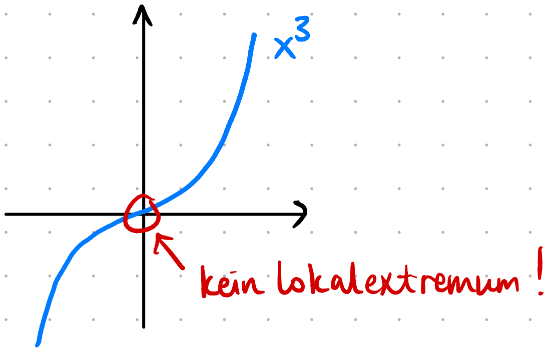


② Es kann sein, dass $f'(x_0) = 0$, (und $x_0 \neq \operatorname{Max} I$, $x_0 \neq \operatorname{Min} I$), aber x_0 ist kein Lokalextremum.

z.B. $f(x) = x^3$

$f'(0) = 0$, $I = \mathbb{R}$

aber 0 ist kein Lokalextremum!



③ Anwendung (vom Lokalelextremumsatz):

$I = [a, b]$, $a < b$

$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar

f stetig: $\Rightarrow$ es gibt x_0, x_1 mit

$$\begin{cases} f(x_0) = \operatorname{Max}_{x \in I} f(x) \\ f(x_1) = \operatorname{Min}_{x \in I} f(x) \end{cases}$$

Methode: (Max/Min finden)

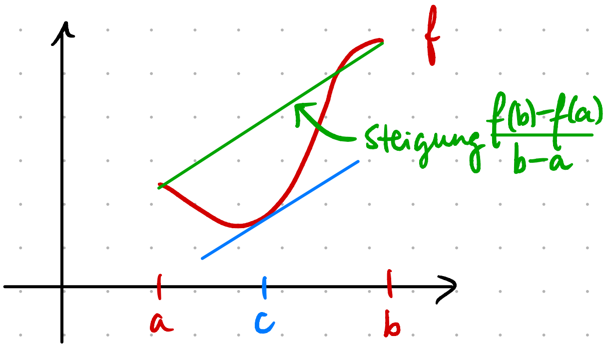
1. Lösen die Gleichung $f'(x) = 0$, $x \in I$, sei X die Lösungsmenge
2. Wir berechnen

$$\begin{cases} f(x) & \text{für } x \in X \\ f(a) \\ f(b) \end{cases}$$

und dann ist

$$\begin{cases} \operatorname{Max}_{x \in I} f(x) = \operatorname{Max} \{ f(a), f(b), f(x_0) \text{ für } x_0 \in X \} \\ \operatorname{Min}_{x \in I} f(x) = \operatorname{Min} \{ f(a), f(b), f(x_0) \text{ für } x_0 \in X \} \end{cases}$$

Satz: (Mittelwertsatz):



$I \subset \mathbb{R}$ Intervall

$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar

$a < b$ in I

Es gibt $c \in \,]a, b[$ mit $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

mindestens eine

(d.h. Steigung von c = Steigung der Geraden ab (Parallel zueinander)).

(Warum ist dieser Satz so wichtig?):

$\Rightarrow$ **Kor:** $I \subset \mathbb{R}$, Intervall

$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar

(1) f ist $\begin{cases} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{cases} \iff \begin{cases} f'(x) \geq 0 & \text{für } x \in I \\ f'(x) \leq 0 & \text{für } x \in I \end{cases}$

(2) Falls $\left| \begin{array}{ll} f'(x) > 0 & \text{für alle } x \in I \\ f'(x) < 0 & \text{für alle } x \in I \end{array} \right|$ ist

f <u>streng</u> $\begin{cases} \text{wachsend} \\ \text{fallend} \end{cases}$

<u>Warum?</u> f ist wachsend $\Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ für alle $x \neq x_0$

$\Rightarrow f'(x_0) \geq 0$

Falls $f'(x) \geq 0$ auf I und $x < y$ in I
$f'(x) > 0$

Mittelwertsatz $\Rightarrow$ $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c) \geq 0$
> 0

$\Rightarrow f(x) \leq f(y)$

$f(x) < f(y)$

z.B. (1) $f(x) = e^x \longrightarrow f'(x) = e^x > 0$

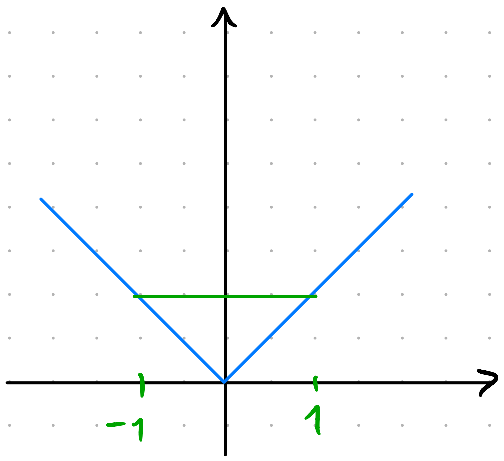
$\longrightarrow$ exp ist streng wachsend auf $\mathbb{R}$

(2) $f(x) = \cos(x)$ auf $[0, \pi]$:

$f'(x) = -\sin(x)$, $\sin(x) > 0$ für $0 < x < \pi$

$\leadsto$ cos ist auf $]0, \pi[$ streng fallend

Gegenbeispiel (zum Mittelwertsatz) $\rightarrow$ falls f nicht auf [differenzierbar ist:



$f(x) = |x|$ auf $\mathbb{R}$

$a = -1$, $b = 1$

$\Rightarrow$ Steigung $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$

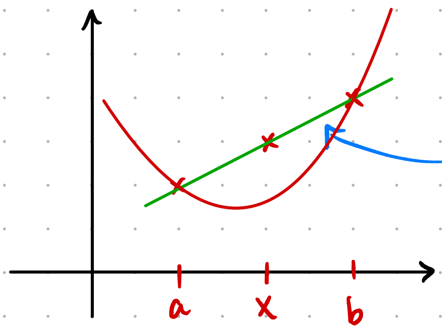
aber $f'(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

und $f'(0)$ existiert nicht.

Beweis vom Mittelwertsatz:

Idee: Lokalextremumsatz benutzen für

$$g(x) = f(x) - \underbrace{\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \right)}_{y\text{-Koordinate}}$$



$y = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$

$g: I \longrightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar und stetig

Es gibt ein Minimum / ein Maximum für g.

Weiter ist $g(a) = 0 = g(b)$

⇒ falls g nicht immer 0 ist, ist entweder das Max g oder Min g nicht 0.

(oder $g(x)=0$ für alle x ⇒ in diesem Fall ist $f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ für alle x.)

Wir nehmen an: Max $g > 0$; sei x_0 mit $g(x_0) = \text{Max}\, g(x)$; dann ist $\begin{cases} x_0 \neq a \\ x_0 \neq b \end{cases}$

<u>Lokalextremumsatz</u>: $g'(x_0) = 0$

$$\begin{array}{c} g'(x_0) = 0 \\ \| \\ f'(x_0) - \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\text{Steigung der Geraden.}} = 0 \end{array}$$

Kor 2 (Anwendungen vom Mittelwertsatz):

$I \subset \mathbb{R}$, $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ f differenzierbar

f ist konstant auf I ⇔ $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$

weil $\left[\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c) \right]$

Kor 3 (Abschätzungen von $f(x)$ und $f(y)$)

$I = [a, b]$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, mit f' stetig.

⇒ $\boxed{|f(x)-f(y)| \leq M\,|x-y|}$

(Lipschitz-Stetig)

mit $M = \underset{x \in [a,b]}{\text{Max}} |f'(x)| \in \mathbb{R}_+$

weil $\left[\left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| = |f'(c)| \leq M \right]$

Beispiele:

(1) Funktionen studieren:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \text{ auf } \underbrace{\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[}_{= I}$$

tan ist differenzierbar auf I (weil $\cos(x) \neq 0$ für $x \in I$ und cos, sin sind diff.'bar)

$$\tan'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - (-\sin(x))\sin(x))}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}, \quad x \in I$$

$$\left[\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2} \right]$$

$\Rightarrow \tan'(x) > 0$

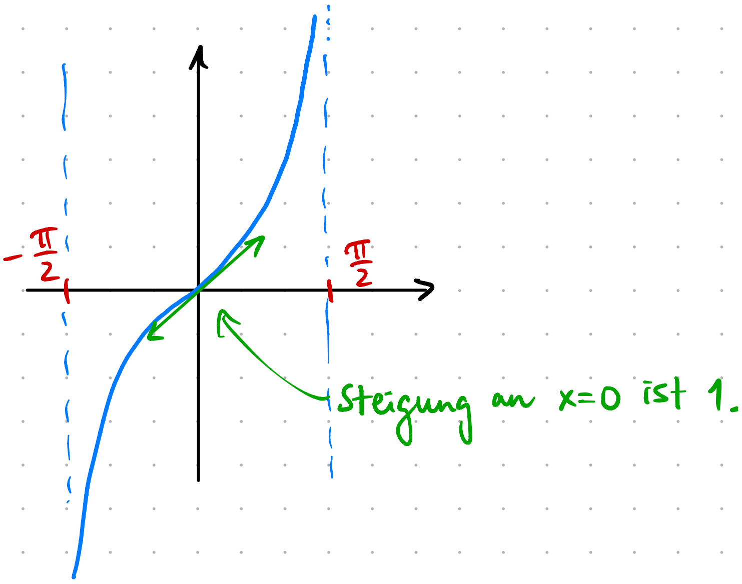
$\Rightarrow$ tan ist streng wachsend

$$\lim_{\substack{x \to -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = +\infty$$ (1 durch ein "positives 0")

Das Bild ist $\mathbb{R}$

$\tan'(0) = 1$



$\tan: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ ist bijektiv

$\arctan: \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ist die Umkehrfunktion (Sie ist auch differenzierbar.)

$$\Rightarrow \arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \quad \ldots$$

... $\left[\tan'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2} = \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2 \right.$

$\Rightarrow \tan'(\arctan(x)) = 1 + \tan(\arctan(x))^2$

$\left. = 1 + x^2 \right]$

... $\rightsquigarrow$ $\boxed{\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$

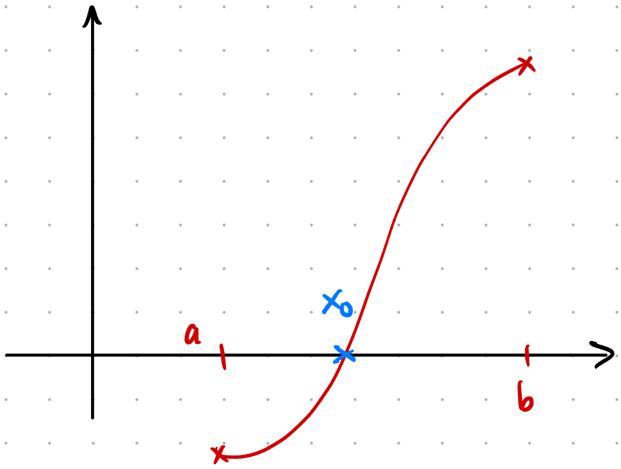
(2) Newton'sches Verfahren:

Ziel: Gleichungen $f(x) = 0$ lösen.

Hyp: (1) $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, diff'bar. , f' auch stetig

(2) $f(a) < 0 < f(b)$

(3) f streng wachsend. [$\Rightarrow$ Es gibt genau eine Lösung x_0 der Gleichung $f(x_0) = 0$]



Idee von Newton: x_0 als Grenzwert der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ finden, wo

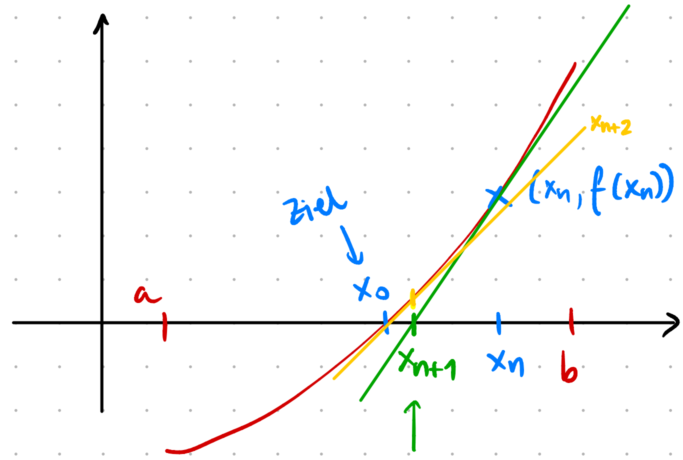
rekursive Def. $\begin{cases} x_1 = \text{eine Zahl im Intervall } I = [a,b] \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 1 \end{cases}$

Falls die Folge konvergiert gegen y, ist $y = y - \frac{f(y)}{f'(y)} \Rightarrow f(y) = 0$

"Wenn die Folge konvergiert, muss sie gegen die Lösung konvergieren"

Was ist die Bedeutung dieser Formel? Idee von Newton?

$\Rightarrow$



x_{n+1} = die x-Koordinate des Durchschnittpunktes zwischen der x-Achse und der Tangente an x_n

sind viel viel näher an der Lösung!
mit dieser Methode der Tangente

V20

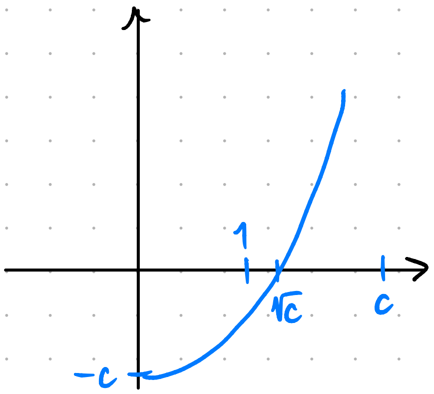
Tangente: $y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$

Durschnitt mit x-Koord. Achse:

$$y = 0 \iff -f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

$$\iff x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Beispiel: $f(x) = x^2 - c$, $c > 1$ $(a = 0, b = c)$



$f(x) = 0 \iff x = \sqrt{c}$

Newton: $x_1 = c$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= x_n - \frac{x_n^2 - c}{2x_n}$$

Skript 2.8.5 $\rightarrow$ $= \frac{x_n}{2} + \frac{c}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right)$

$\Uparrow$

diese Folge konvergiert sehr sehr sehr schnell gegen $\sqrt{c}$ ($\approx$ Anzahl der richtigen Ziffern jedes mal durch 2 multipliziert).

§ 5.5 Höhere Ableitungen

$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad I$ Intervall

f differenzierbar $\rightsquigarrow$ $f': I \longrightarrow \mathbb{R}$

Def: $k \in \mathbb{N}$, $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$

Die k-te Ableitung $f^{(k)}$ ist definiert durch folgende rekursive Definition:

$f^{(1)} = f'$ falls f diff'bar ist

und $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$ falls $f^{(k-1)}$ diff'bar ist.

Notation: $f'' = f^{(2)}$, $f''' = f^{(3)}$

Bemerkungen:

(1) falls $f^{(k)}$ existiert, dann ist $(f^{(a)})^{(b)} = f^{(a+b)}$ für $a+b \leq k$

(2) Manchmal definiert man $f^{(0)} = f$

(3) Wenn f, g k Ableitungen haben, und a, b sind in $\mathbb{R}$, ist $af + bg$ auch k-mal diff'bar und

$$(af + bg)^{(k)} = af^{(k)} + bg^{(k)}$$

Def: I Intervall in $\mathbb{R}$

$k \in \mathbb{N}$

$C^k(I) = \{ f: I \longrightarrow \mathbb{R} \mid f$ ist k-mal diff'bar und $f^{(k)}$ ist stetig $\}$

$C^\infty(I) = \{ f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in C^k(I)$ für alle $k \in \mathbb{N} \}$

$C^0(I) = C(I) = \{ f: I \longrightarrow \mathbb{R} \mid f$ stetig $\}$ (Die Menge von stetigen Funktionen.)

Bemerkungen:

(1) $C^k(I) \subset C^{k-1}(I)$

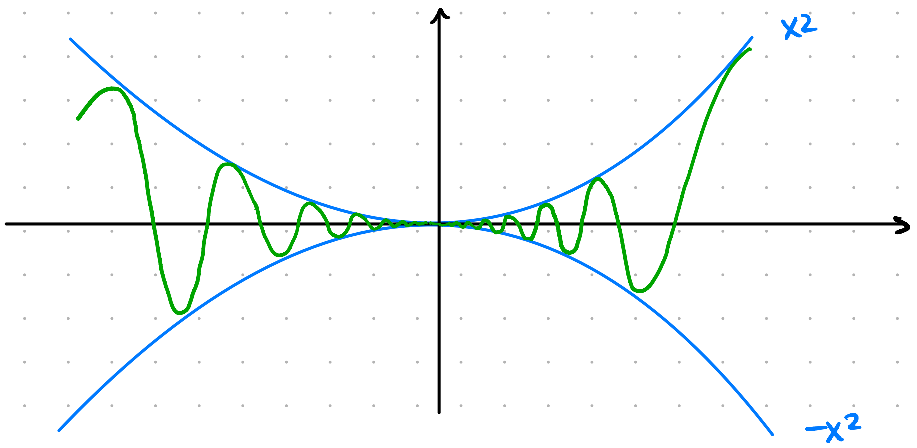
(2) $C^k(I)$, $C^\infty(I)$, $C^0(I)$ sind Vektorräume über $\mathbb{R}$.

Beispiel: (5.5.5)

Eine Funktion $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ die diff'bar ist aber nicht in $C^1(\mathbb{R})$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \end{cases}$$

Man überprüft: $f'(0) = 0$ aber $f'(x)$, $x > 0$ hat kein Grenzwert.



Oszilliert sehr sehr schnell wenn x kleiner und kleiner.

→ Ableitung oszilliert ⇒ kein Grenzwert

Satz (Leibnizsche Formel):

$k \in \mathbb{N}$, $f, g: I \longrightarrow \mathbb{R}$, k-mal diff'bar, dann ist fg auch k-mal differenzierbar und

$$(fg)^{k}(x) = f^{k}(x) g(x) + k f^{(k-1)}(x)\, g'(x) + \binom{k}{2} f^{(k-2)}(x)\, g^{(2)}(x) + \dots$$
$$+ \binom{k}{j} f^{(k-j)}(x)\, g^{(j)}(x) + \dots + g^{(j)}(x) + \dots + f(x)\, g^{(h)}(x)$$
$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{(k-j)}(x)\, g^{(j)}(x)$$

d.h.: $\underline{k=1}$: $(fg)' = f'g + fg'$

$\underline{k=2}$: $(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$

($\underline{\text{z.B.}}$ $(fg)'' = ((fg)')' = (f'g+fg')' = (f''g + f'g') + (f'g' + fg'')$

$= f''g + 2f'g' + fg''$)

Beispiel:

(1) Alle Polynome $f: I \to \mathbb{R}$ sind in $C^\infty(\mathbb{R})$; alle $f^{(k)}$ sind auch Polynome.

(2) $\exp: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist in $C^\infty(\mathbb{R})$ und $\exp^{(k)} = \exp$, für $k \in \mathbb{N}$

(3) $\cos: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind in $C^\infty(\mathbb{R})$ mit

Differential-gleichungen

$\cos' = -\sin$	$\sin' = \cos$
$\cos'' = -\cos$	$\sin^{(2)} = -\sin$
$\cos^{(3)} = \sin$	$\sin^{(3)} = -\cos$
$\cos^{(4)} = \cos$	$\sin^{(4)} = \sin$
$\vdots$	$\vdots$

(4) $\log:]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ ist in $C^\infty(]0,+\infty[)$

$\log'(x) = \frac{1}{x}$, $\log''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ ...

$$\log^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{x^k}$$

(5) $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R}$, $I =]0,+\infty[$ ist in $C^\infty(I) = C^\infty(]0,+\infty[)$

und $f'(x) = ax^{a-1}$

$f^{(k)}(x) = a\cdot(a-1) \cdots (a-k+1)\, x^{a-k}$

$\vdots$

$f^{(k)}(x) = a(a-1) \cdots (a-k+1)\, x^{a-k}$

(b) arcsin und arccos sind in $C^\infty(]-1,1[)$

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

sind unendlich mal diff'bar als Verknüpfungen von C^∞ Funktionen
[z.B. $\frac{1}{\sqrt{y}} \circ (1-x^2)$]

Satz (5.5.8)

Falls $\sum a_n x^n$ hat $R>0$ als Konv. Radius, ist die Summe
$f \in C^\infty(]-R,R[)$ [$C^\infty(\mathbb{R})$ falls $\mathbb{R} = +\infty$]

und

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\cdots(n+k)\, a_{n+k}\, x^n \qquad (k \in \mathbb{N})$$

[z.B. $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, x^n$]

<u>Insbesondere:</u> $f^{(k)}(0) = k!\, a_k$

$$\Leftrightarrow \quad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

($\Rightarrow$ die Koeffizienten (a_n) sind durch f bestimmt).

<u>Sonderfall:</u> f Polynom von Grad $k \in \mathbb{N}_0$

f ist eine Potenzreihe mit $a_n = 0$ für $n \geq k+1$

$$\Rightarrow \quad f^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{k-j} (n+1)\cdots(n+j)\, a_{n+j}\, x^n$$

<u>D.h.:</u> $f^{(k)}(x)$ = konstante Funktion $(\neq 0)$ $= k!\, a_k$
$\uparrow$
(k = Grad des Polynoms)

$f^{(j)}(x) = 0$ für $j \geq k+1$ sind alle $\underline{\underline{0}}$.

Bspe (Anwendung von höheren Ableitungen): (Beide wichtig!)

Ungleichungen:

für $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) \geq x - \frac{x^3}{6}$

$f(x) = \sin(x) - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)$

Ziel: $f(x) \geq 0$; $f(0) = 0$

$f'(x) = \cos(x) - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$

$f'(0) = 1 - 1 = 0$

$f''(x) = -\sin(x) + x$

$f''(0) = 0$

$f^{(3)}(x) = -\cos(x) + 1$

$\Rightarrow f^{(3)} \geq 0$ ($-\cos(x) + 1$ kann nicht < 0 sein!)

$\Rightarrow f^{(2)}$ ist wachsend, so

$f^{(2)}(x) \geq f^{(2)}(0)$ für $x \geq 0$ $= 0$

$\Rightarrow f'$ ist wachsend so

$f'(x) \geq f'(0) = 0$ für $x \geq 0$

$\Rightarrow f$ wachsend so

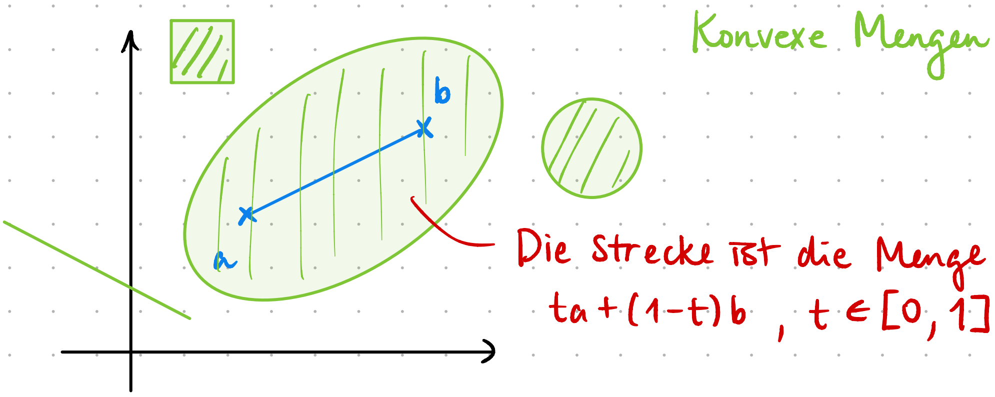
$f(x) \geq f(0) = 0$ für $x \geq 0$

$\sin(x) \geq x - \frac{x^3}{6}$ für $x \geq 0$.

$\Rightarrow$ gute Methode um Ungleichungen zu beweisen!

§ 5.6 Konvexe Funktionen:

Def: (1) Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^2$ heisst <u>konvex</u> falls:
für alle $a \neq b$ in A, die Strecke zwischen a und b in A enthalten ist.



[d.h. für alle a und b in A und $t \in [0,1]$ $\; ta + (1-t)b \in A$]

$$t(a_1, a_2) + (1-t)(b_1, b_2)$$

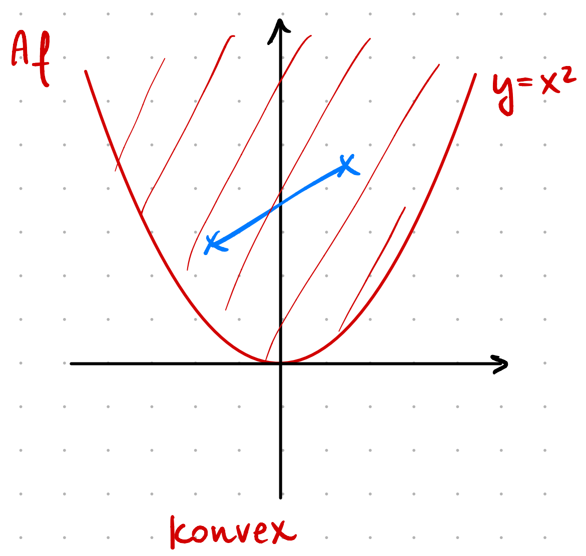
$$= (ta_1 + (1-t)b_1 \,,\, ta_2 + (1-t)b_2)$$

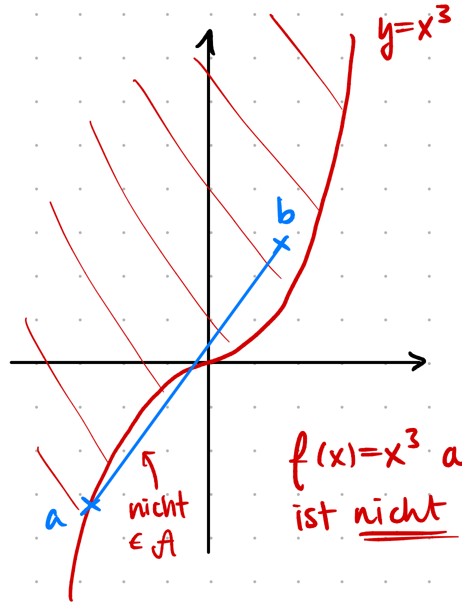
($\in$ Vektorraum in $\mathbb{R}^2$)

(2) $I \subset \mathbb{R}$ Intervall

$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst <u>konvexe Funktion</u> falls die Menge

$$\boxed{A_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq f(x)\}}$$ ist <u>konvex</u>.





$f(x) = x^3$ auf $\mathbb{R}$ ist <u>nicht</u> konvex.

Satz: (5.6.2) $I \subset \mathbb{R}$

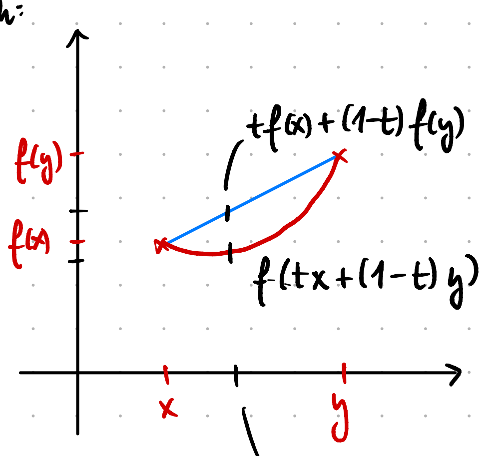
(1) $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ konvex $\Leftrightarrow$ für alle $x \neq y$ in I, und $t \in [0,1]$,

es gilt $\boxed{f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)}$

↳ Def. von konvexe Funktion.

$\Updownarrow$

Graphisch:



$tx + (1-t)y \quad , \; t \in [0,1]$

$t = 1 \rightarrow tx + (1-t)y = x$
$t = 0 \rightarrow tx + (1-t)y = y$

Geometrisch: Der Graph von f ist unter der Strecke zwischen $(x, f(x))$, und $(y, f(y))$

↑ konvexe Funktion: dies gilt für alle x, y

(2) Wenn $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ konvex ist, gilt:

für $\begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ x_1, \dots, x_n \text{ in } I, \; (x_i \neq x_j \text{ für } i \neq j) \\ p_1, \dots, p_n \text{ in } [0,1], \text{ mit } p_1 + \dots + p_n = 1 \end{cases}$

ist $f(p_1 x_1 + \dots + p_n x_n) \leq p_1 f(x_1) + \dots + p_n f(x_n)$ ⊛

[z.B. $n = 2$
$x_1 \neq x_2$
$p_1 + p_2 = 1$

sei $t = p_1$, $1 - t = p_2$

⊛ bedeutet: $f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq t f(x_1) + (1-t) f(x_2)$]

Satz: (5.6.4) Sei $I \subset \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$

Falls $f \in C^2(I)$ [d.h. f, f', f'' existieren auf I & sind stetig]

dann ist f <u>konvex</u> $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0$ für $x \in I$

$\Leftrightarrow$ f' ist auf I wachsend

z.B. (1) $f(x) = e^x$ auf $\mathbb{R}$ ist konvex

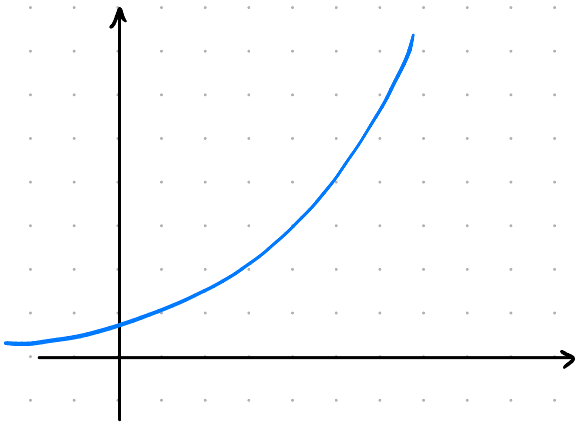
$(f'' = e^x \geq 0)$

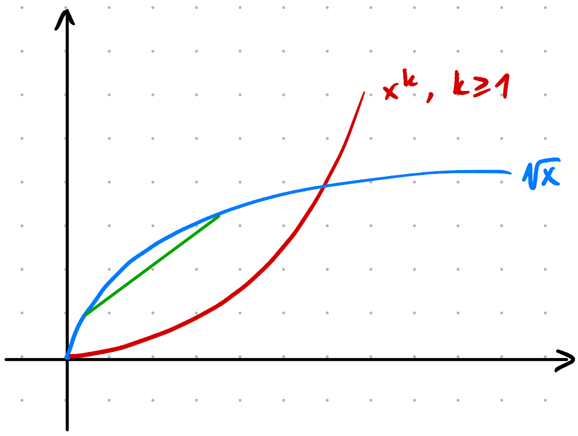
(2) $f(x) = x^k$ auf $\mathbb{R}^+$ ist konvex für $k \geq 1$ $\left[f'' = k(k-1)\, x^{k-2} \right]$

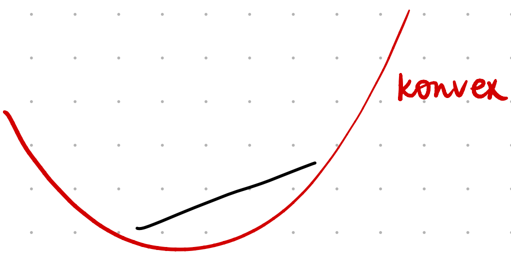
$\uparrow$ nicht <0

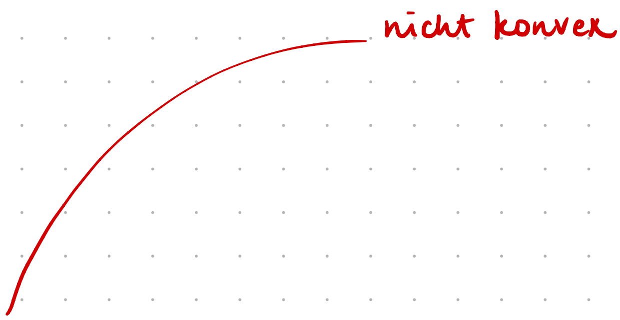
aber <u>nicht</u> konvex für $0 < k < 1$

z.B. $f(x) = \sqrt{x}$ <u>nicht</u> konvex



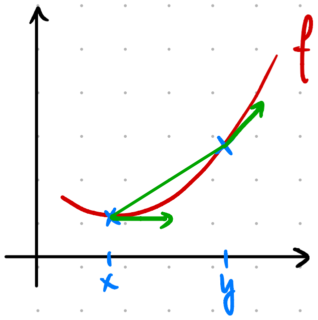






Ideen für Beweis:

Falls f konvex ist:

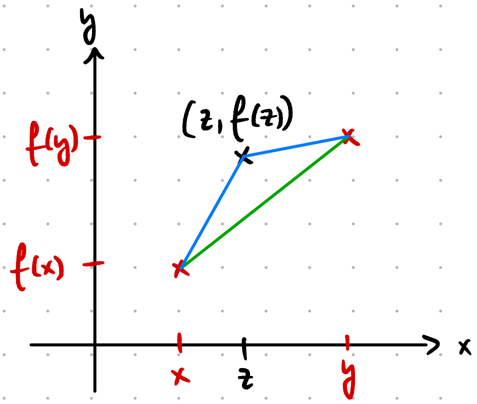


Man sieht "geometrisch", dass $f'(x) \leq f'(y)$ gilt. (für $x \leq y$)

$\Rightarrow f'$ ist wachsend

Umgekehrt: nehmen an, dass $f'' \geq 0$

$\rightarrow$ (f' ist wachsend)



Wenn der Graph nicht oberhalb der Strecke ist ...

Dann ist $\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} > \dfrac{f(y)-f(z)}{y-z}$

$$\begin{matrix} \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} & & \dfrac{f(y)-f(z)}{y-z} \\ \| & & \| \\ f'(c) & & f'(d) \\ c \in [x,z] & & d \in [z,y] \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ (Ableitung) f' ist nicht wachsend

Einige Anwendungen:

(1) (Young Ungleichung)

$p \in \,]1, +\infty[$

Es gibt genau eine Zahl $q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (z.B. $p=2 \Rightarrow q=2$, $p=4 \Rightarrow q=\frac{4}{3}$)

Für $x, y \geq 0$ gilt

$$\boxed{xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}}$$

Beweis: z.B. $f(x) = -\log(x)$ auf $]0, +\infty[$

$$f'(x) = -\frac{1}{x}, \quad f''(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow f \text{ ist } \underline{\text{konvex}}$$

Insbesondere: für $0 < x < y$:

$$-\log\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \leq -\frac{1}{p}\log(x) - \frac{1}{q}\log(y)$$

$\Rightarrow$ mit (-1) multiplizieren: $\log\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{p}\right) \geq \frac{1}{p}\log(x) + \frac{1}{q}\log(y)$

$\overset{\text{exp.}}{\Rightarrow}$ $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} \geq x^{1/p} y^{1/q}$

Für $x = u^p$, $y = v^q$ folgt

$$\boxed{uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}}$$ (Young-Ungleichung)

Kor. (5.6.6) (Hölder-Ungleichung)

① $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$k \in \mathbb{N}$, x_i, y_i, $1 \leq i \leq k$ in $\mathbb{C}$

$$\left|\sum_{i=1}^{k} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{k} |y_i|^q\right)^{1/q}$$

[z.B. $p = q = 2$

$$\left|\sum x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{k} |y_i|^2\right)^{1/2}$$]

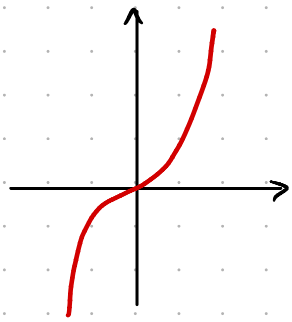
Cauchy-Schwarz-Ungleichung

② (Minkowski-Ungleichung) $k \in \mathbb{N}$, x_i, y_i in $\mathbb{C}$

$$\left(\sum_{i=1}^{k} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{k} |y_i|^p\right)^{1/p}$$

Frage: ist x^3 konvex?

Hängt vom Wahl des Intervalls I ab!



$f(x) = x^3$
$f'(x) = 3x^2$ für $x \in I$
$f''(x) = 6x$

$\Rightarrow$ x^3 ist auf $\mathbb{R}_+$ konvex, aber nicht auf ein Intervall I, das eine negative Zahl enthaltet.

§ 5.7 Taylor Polynome:

Idee: $f \in C^k(I)$

Ziel: Polynome mit Grad $\leq k$ finden, die f in der Nähe von x_0 "am besten" approximieren.

$k=1$: $f \in C^1(I)$

$f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0)$ Polynom vom Grad ≤ 1, das f "gut" approximiert in der Nähe von x_0

Def: $k \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall

$f: I \to \mathbb{R}$, k mal differenzierbar

$x_0 \in I$

Das Taylor-Polynom von Grad $\leq k$ an der Stelle x_0 ist:

$$f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

$f^{(0)} = f$

$$= \boxed{\sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x-x_0)^i}$$

Bezeichnen: $T_k f(x; x_0)$

(Taylor-Polynom von Grad $\leq k$ für f, evaluiert an der Stelle x_0 für x.)

z.B.

① $f(x) = e^x$

$x_0 = 0$: $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$

$$\rightsquigarrow \boxed{T_k \exp(x; 0) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^k}{k!}}$$

$x_0 = 1$: $f^{(k)}(1) = e^1 = e$

$$\rightsquigarrow \boxed{T_k \exp(x; 1) = e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 + \dots + \frac{e}{k!}(x-1)^k}$$

② $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$

$\rightsquigarrow$ $\boxed{T_k \exp(x;0) = 1 + x + \dots + x^k}$ (Σ der geom. Reihe x^k)

③ $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_d x^d$, $a_d \neq 0$

$\underline{x_0 = 0}$: $T_k f(x;0) = a_0 + \dots + a_k x^k$; $k \leq d$

$T_k f(x;0) = f(x)$; $k > d$ (weil $f^{(i)} = 0$ für $i > d$)

$\underline{x_0 \neq 0}$: $k = d$ oder $k > d$

$\rightsquigarrow$ $T_k f(x;x_0) = f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$

$$\overset{\shortparallel}{f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^d}{d!} f^{(d)}(x_0)}$$

Satz: (Verallgemeinerung vom Mittelwertsatz) "Taylor Formel mit Restglied von Lagrange"
(5.7.3)

$k \in \mathbb{N}_0$; $I \subset \mathbb{R}$ Intervall; $f: I \to \mathbb{R}$

$\underline{\text{Hyp}}$: f ist $(k+1)$ mal diff'bar

Sei $x_0 \in I$

Für $x \in I$ gibt es c zwischen x und x_0 sodass

$$f(x) = T_k f(x;x_0) + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}$$

$$= f(x_0) + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}$$

$\underline{\text{z.B.}}$ $\underline{k=0}$: $f(x) = f(x_0) = f(x_0) + f'(c)(x-x_0)$

$\rightsquigarrow$ Mittelwertsatz!

$\underline{k=1}$: $f(x) = f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x-x_0)^2$

__Beweis für $k=1$:__ $x_0 = 0$

$\underline{\text{Ziel}}$: $f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{f''(c)}{2} x^2$ finden!

Es gibt $a \in \mathbb{R}$ sodass $f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{a}{2} x^2$

Sei $g(y) = f(y) - (f(0) + yf'(0) + \frac{a^2}{2}y^2)$ für $y \in I$

Es gilt: $\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$

$g'(y) = f'(y) - (f'(0) + ay)$

$\Rightarrow g'(0) = 0$

$g'(x) = f'(x) - f'(0)$

$g''(y) = f''(y) - a$

Fall 1: $g''(x) > 0 \Leftrightarrow f''(x) > a$

Falls es gibt keine c mit $f''(c) = a$, folgt dass $f''(y) - a > 0$ für alle y

$\Rightarrow g''(y) > 0$

$\Rightarrow g'(y)$ wachsend

$\Rightarrow g'(y) \geq 0$ weil $g'(x) = 0$

$\Rightarrow g$ ist wachsend

$\Rightarrow g(0) = g(x) = 0$ Widerspruch! Fkt. muss wachsend sein.

$\Rightarrow$ nicht möglich.

V21

26.11.20

Kor: (Satz 5.7.3)

$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $k+1$ mal diff'bar

Sei $M \in \mathbb{R}_+$ sodass $|f^{(k+1)}(x)| \leq M$ für $x \in I$

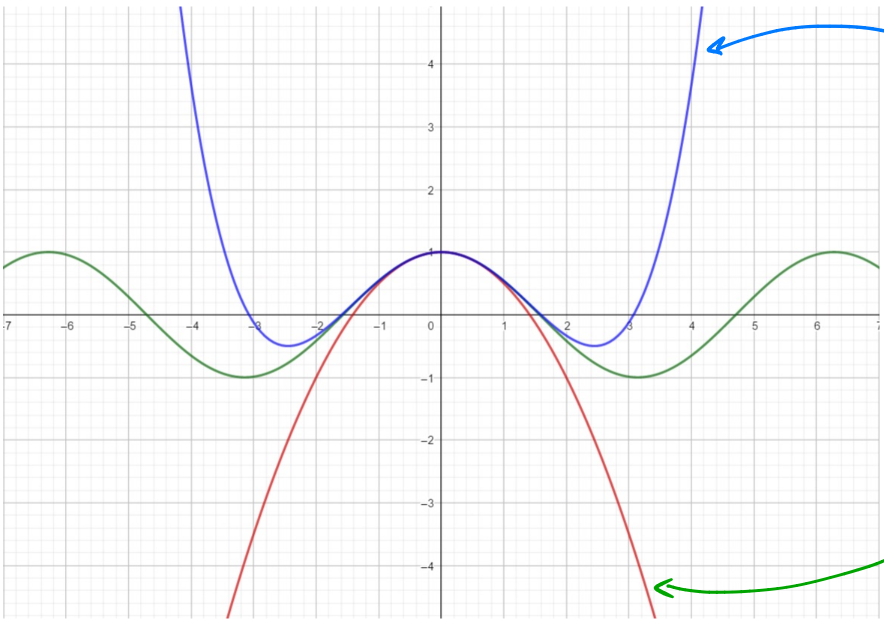
[z.B. $I = [a,b]$, $f \in C^{k+1}(I)$]

Dann gilt für $x_0 \in I$, $x \in I$

$$\boxed{|f(x) - T_k f(x; x_0)| \leq \frac{M}{(k+1)!} |x - x_0|^{k+1}}$$

[Nur nützlich wenn $|x-x_0|$ klein ist, sodass $|x-x_0|^{k+1}$ klein ist.]

z.B. $f(x) = \cos(x)$
$x_0 = 0$



$T_4 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

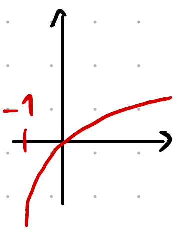
$\cos(x)$

$T_2 = 1 - \frac{x^2}{2}$

Approximation bei $x=0$ ist sehr gut, aber für x grösser schlechter & schlechter.

Bsp: $f(x) = \log(1+x)$

$I =]-1, +\infty[$, $x_0 = 0$
$f(x_0) = 0$



$f'(x) = \frac{1}{1+x}$

$f''(x) = -\frac{1}{(1+x^2)}$, $f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x^3)}$, ..., $f^{(k)}(x) = \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}(-1)^{k-1}$

$T_k f(x; 0) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$

Für $x=2$ (oder $x>1$) ist die Folge $T_k f(2;0)$ nicht konvergent:

$$T_k f(2;0) = 2 - \frac{4}{2} + \frac{8}{3} - \dots + \frac{(-1)^{k-1} 2^k}{k}$$

(Partielle Summen einer Reihe mit Gliedern nicht $\to 0$)

Sei $-1 < x < 1$: $|f^{(k+1)}(x)| \leq \frac{k!}{|1+x|^{k+1}}$

$$\Rightarrow \left| \log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}\right) \right| \leq \frac{k!}{(k+1)!} \frac{|x|^{k+1}}{|1+c|^{k+1}}, \quad c \text{ zwischen } x \text{ und } 0$$

Falls $0 \leq x < 1$: $c \geq 0$ $\Rightarrow |1+c| \geq 1$

$$\rightsquigarrow \left| \log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}\right) \right| \leq \frac{1}{k+1} |x|^{k+1} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

Später: $\lim\limits_{k \to +\infty} T_k f(x;0) = \log(1+x)$ für $-1 < x < 1$.

Kor: $k \in \mathbb{N}$

$f: I \to \mathbb{R}$, $f \in C^{k+1}(I)$

$x_0 \in I$

Es gilt: $f(x) = T_k f(x; x_0) + (x - x_0)^k r(x)$ $\quad (r(x_0) = 0)$

mit $\lim\limits_{x \to x_0} r(x) = 0$

Warum? $$\left| \frac{f(x) - T_k f(x; x_0)}{(x-x_0)^k} \right| = \frac{|f^{(k+1)}(c)|}{(k+1)!} (x - x_0)$$

beschränkt für $|x - x_0| \leq 1$ weil $f \in C^{k+1}$

Anwendung: Grenzwerte

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \begin{cases} f(x_0) = 0 \\ g(x_0) = 0 \end{cases}$$

L'Hospital Regel:

Falls f, g an x_0 diff'bar sind, und $g'(x_0) \neq 0$, ist

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{x - x_0}{g(x) - g(x_0)} \rightsquigarrow f'(x_0) \cdot \frac{1}{g'(x_0)} \right)$$

z.B. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin(x)} = \frac{1}{1} = 1$

weil: $(e^x - 1)' = e^x$

$\sin'(x) = \cos(x)$

$\longrightarrow \cos(0) = 1$

Mit Taylor-Polynome:

$\frac{f(x)}{g(x)}$: wir versuchen f, g mit Taylor Polynome zu ersetzen, sodass der Grenzwert "klar" ist:

$$f(x) = T_k f(x; x_0) + (x - x_0)^k r_1(x)$$

$$g(x) = T_{k'} g(x; x_0) + (x - x_0)^{k'} r_2(x)$$

Falls z.B. $f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, ist

für $k \geq 3$ $T_k f(x; x_0) = \frac{(x - x_0)^3}{6} f^{(3)}(x_0) + \dots$

Für k, k' gross genug, erhaltet man die Approximation

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{(x - x_0)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k-1)}(x_0)}{\frac{(x - x_0)^{k-1}}{(k'-1)!} g^{(k-1)}(x_0)}$$

$$= (x - x_0)^{k-k'} \cdot \frac{(k'-1)!}{(k-1)!} \frac{f^{(k-1)}(x_0)}{g^{(k'-1)}(x_0)}$$

z.B. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}}{\sin(x^4)}$?

$f'(x) = -\sin(x) + x \quad , \quad f'(0) = 0$

$g'(x) = 4x^3\cos(x^4), \quad g'(0) = 0 \quad \Rightarrow$ l'hospital nicht möglich ☹

anhand Taylor-Polynom approximieren:

$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - 1 + \frac{x^2}{2} + r_1(x)x^4$

$= \frac{x^4}{24} + x^4 r_1(x) \quad , \quad r_1(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$g(x)$: $\sin(y) = y + y r_2(y), \quad r_2(y) \xrightarrow[y\to 0]{} 0$

gilt $\sin(x^4) = x^4 + x^4 r_2(x^4), \quad r_2(x^4) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$$\rightsquigarrow \frac{\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}}{\sin(x^4)} = \frac{\frac{x^4}{24} + x^4 r_1(x)}{x^4 + x^4 r_2(x^4)} \qquad / \div x^4$$

$$= \frac{\frac{1}{24} + r_1(x)}{1 + r_2(x^4)} \longrightarrow \frac{\frac{1}{24}}{1} = \underline{\underline{1/24}}$$

Grenzwert existiert, und ist

Grenzwerte bestimmen:

① l'hospital'sche Regel

wenn $g'(x_0) = 0$ .. ↯

② Taylor-Polynome

Falls: $(x_0 = 0)$

$f'(0) = 0, \quad f''(0) \neq 0$

$g'(0) = 0, \quad g''(0) \neq 0$

$f(x) = \frac{x^2}{2} f''(0) + x^2 r_1(x), \quad r_1(x) \to 0$

$g(x) = \frac{x^2}{2} g''(0) + x^2 r_2(x)$

$$\rightsquigarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x^2}{2} f''(0) + x^2 r_1(x)}{\frac{x^2}{2} g''(0) + x^2 r_2(x)} \underset{/\div x^2}{=} \frac{\frac{1}{2} f''(0) + r_1(x)}{\frac{1}{2} g''(0) + r_2(x)} \longrightarrow \underbrace{\frac{f''(0)}{g''(0)}}_{\text{Grenzwert}}$$

Bemerkung: Es kann sein, dass $f \in C^\infty(I)$ (∞-mal diff'bar)

aber $\boxed{T_k f(x; x_0) \underset{k \to +\infty}{\not\to} f(x)}$

Es kann sein:

① $T_k f(x; x_0)$ konvergiert <u>nicht</u> wenn $x \neq x_0$

② $T_k f(x; x_0)$ konvergiert für alle x, <u>aber</u> gegen $g(x) \neq f(x)$ für <u>$x \neq x_0$</u>

Letzte Anwendung von Taylor-Polynome:

Satz: (5.7.9) $k \in \mathbb{N}$, $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^k(I)$
$x_0 \in I$, nicht das Max/Min von I

Falls <u>$f'(x_0) = 0$</u>, und es gibt $j \leq k$

mit $\begin{cases} f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(j-1)}(x_0) = 0 \\ f^{(j)}(x_0) \neq 0 \end{cases}$

z.B. $f'(x_0) = 0$
$f''(x_0) \neq 0$
$(j = 2)$

Dann gilt:

① falls j <u>ungerade ist</u>, ist x_0 <u>nicht</u> ein lokales Extremum.

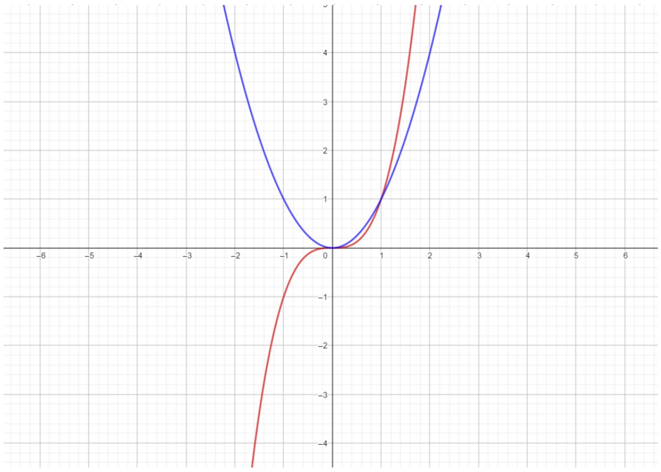
② falls j <u>gerade ist</u>, ist x_0

$\begin{cases} \text{ein \underline{lokales Max.} falls } f^{(d)}(x_0) < 0 \\ \text{ein \underline{lokales Min.} falls } f^{(d)}(x_0) > 0 \end{cases}$

<u>z.B.</u> $f(x) = x^j$, $x_0 = 0$, $j \in \mathbb{N}$

$f'(0) = \ldots = f^{(j-1)}(0) = 0$

$f^{(j)}(0) = j! > 0$



j ungerade (hier x^3)

j gerade (hier x^2)

Insbesondere: falls $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$,

$$\text{hat } f \text{ ein } \begin{cases} \text{lokales Max falls } f''(x_0) < 0 \\ \text{lokales Min falls } f''(x_0) > 0 \end{cases}$$

Warum?: $T_j f(x; x_0) = \dfrac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + f(x_0)$

$\rightsquigarrow$ $f(x) - f(x_0) \approx \dfrac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j$

hat das Signum von $f^{(j)}(x_0)(x-x_0)^j$

j ungerade: das Signum ändert sich zwischen $x < x_0$, $x > x_0$

$\Rightarrow$ kein lokales Extremum

j gerade: das Signum ist das von $f^{(j)}(x_0)$

(für x in der Nähe von x_0)

Beispiel: $n \in \mathbb{N}$

$f(x) = x^n e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ Pkt $x=0$ muss separat überlegen.

Hat f ein Min? ein Max?

$f'(x) = n x^{n-1} e^{-x} - x^n e^{-x}$

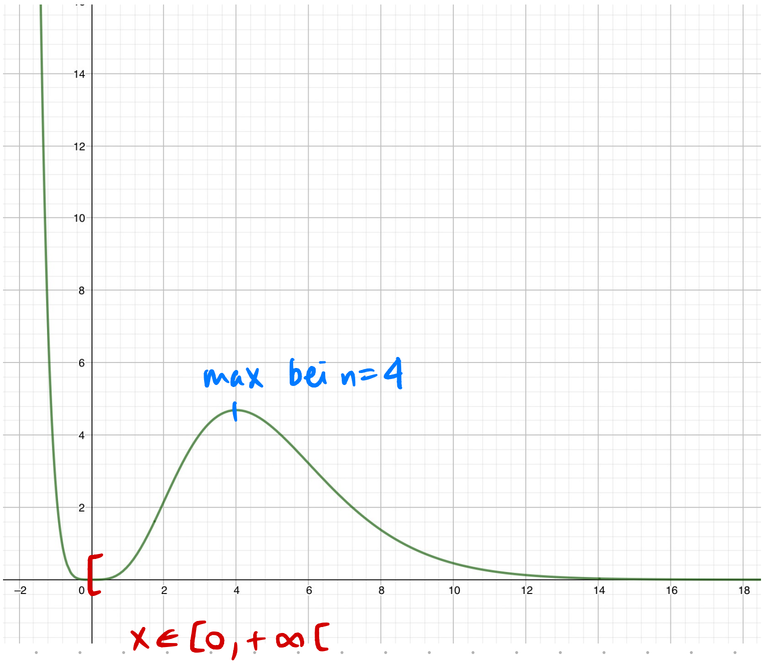
$\rightsquigarrow$ f kann nur lok. Min/Max an $x=0$ oder $x=n$ haben

$f''(x) = x^{n-2} e^{-x} [n(n-1) - 2nx + x^2]$ (berechnen) für $x=n$:

$f''(n) = -n^{n-1} e^{-n}$ $\quad < 0$

$\rightsquigarrow$ $x=n$ ist ein <u>lokales Max</u>.

für $n=4$



Kap 5 Zusammenfassung

① Def. von f' als Grenzwert (um Grenzwerte zu berechnen)

$$\text{z.B.} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \sin'(x) = 1$$

② Rechenregeln (insb. Leibniz, Kettenregel)

③ f differenzierbar $\rightarrow$ f ist stetig

④ Mittelwertsatz und Anwendungen

↳ Kriterium für ein lokales Max./Min. (+ Kriterium mit Taylor-Polynome)

⑤ $C^k(I)$

⑥ Konvexität + Kriterium mit $f'' \geq 0$

⑦ Taylor-Polynome + Lagrange Formel + Anwendungen für Grenzwerte $\frac{f(x)}{g(x)} \to ?$