§ Kap. 6 Integralrechnung:

V22

$g: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $a<b$ in I

Ziel: $\int_a^b g(t)\,dt$ definieren

Anwendungen:
- eine Funktion finden mit einer gegebenen Ableitung.
- Flächeninhalte definieren (und berechnen), Längen von Kurven definieren und berechnen
- neue Funktionen definieren
- Für eine periodische Funktion $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, Zahlen a_n, b_n finden, sodass
$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

...

§ 6.1 Stammfunktionen:

Def: Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall

$g: I \longrightarrow \mathbb{R}$

Eine Funktion $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst Stammfunktion von g wenn f ist auf I differenzierbar und $f' = g$

Notation: $\int g = f$

[z.B. $\int e^x = e^x$, $\int \cos(x) = \sin(x)$ ...]

Satz: Sei $g: I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.
Falls g eine Stammfunktion f hat

(1) Alle Stammfunktionen von g sind $f+c$, $c \in \mathbb{R}$ (weil $c'=0$)

$\hookrightarrow$ es gibt nie eine eindeutige Stammfunktion.

(2) Für alle $x_0 \in I$, es gibt genau eine Stammfunktion f_{x_0} von g sodass $f_{x_0}(x_0) = 0$

Notation: $\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$

$\left[\text{z.B. } \int_{x_0}^{x_0} g(t)\,dt = 0 \right]$

Satz gilt nur, wenn wir wissen, dass es eine Stammfunktion gibt!

Warum? ①: Sei f_1 eine Stammfunktion von g.

Dann gilt $(f_1 - f)' = g - g = 0$

$\Rightarrow f_1 - f$ ist Konstant, $f_1 - f = c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f_1 = f + c$

②: Sei $f_{x_0}(x) = f(x) - f(x_0)$

f_{x_0} ist eine Stammfunktion von g mit $f_{x_0}(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0$

Falls f_1 Stammfunktion von g mit $f_1(x_0) = 0$

Wegen ① $\Rightarrow$ Es gibt $c \in \mathbb{R}$ mit $f_1 = f + c$; und $0 = f_1(x_0) = f(x_0) + c$

$\Rightarrow c = -f(x_0)$

z.B. $n \in \mathbb{N}_0$, $\int_0^x t^n\,dt = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \log(x) - \underbrace{\log(1)}_{=0} = \log(x)$$

$$\int_0^x e^t\,dt = e^x - e^0 = e^x - 1$$

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = f(x) - f(x_0) \quad (f \text{ differenzierbar})$$

Satz: (Rechenregeln)

$I \subset \mathbb{R}$ Intervall

$g_1, g_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$

① Falls g_1, g_2 Stammfunktionen haben, und a, b in $\mathbb{R}$ Zahlen sind, dann hat

$$a g_1 + b g_2$$

eine Stammfunktion, und für alle x_0, x:

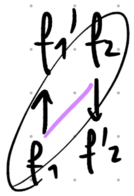
$$\int_{x_0}^{x} \left(a g_1(t) + b g_2(t)\right) dt = a \int_{x_0}^{x} g_1(t)\, dt + b \int_{x_0}^{x} g_2(t)\, dt \qquad (\text{"Linearität"})$$

② ["Partielle Integration"]

Falls g_1, g_2 differenzierbar auf I sind, <u>und</u> $g_1 g_2'$ hat eine Stammfunktion:

$\Rightarrow$ $g_1' g_2$ hat Stammfunktionen, und

$$\int_{x_0}^{x} g_1'(t)\, g_2(t) = \underbrace{g_1(x)\, g_2(x) - g_1(x_0)\, g_2(x_0)}_{[g_1 g_2]_{x_0}^{x}} - \int_{x_0}^{x} g_1(t)\, g_2'(t)\, dt$$



$f_1 f_2$

Notation: $[g(t)]_{x_0}^{x} = g(x) - g(x_0)$

<u>Warum?</u> $(g_1 g_2)' = g_1' g_2 + g_1 g_2'$ (Leibniz)

$\Rightarrow$ falls $g_1 g_2' = f'$ ist $(g_1 g_2) - f$ eine Stammfunktion für $g_1' g_2$

Beispiele

(1) Alle Polynome $g(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$

haben Stammfunktionen:

$$\int g = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \dots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x$$

(2) $g(x) = \log(x)$

$$\int_1^x g(t)\, dt = \int_1^x \log(t)\, dt$$

Trick: $\log(t) = 1 \cdot \log(t)$

$= g_1'(t)\, g_2(t)$ wo $g_1(x) = x$, $g_2(x) = \log(x)$

Part. Int. $\longrightarrow$ $$\int_1^x \log(t)\, dt = \left[t \cdot \log(t)\right]_1^x - \int_1^x t \cdot \frac{1}{t}\, dt$$

$$= x\log(x) - (x-1)$$

Bemerkung: man überprüft, dass man kein Fehler gemacht hat, wenn man am Ende weiter ableitet.

(hier: $(x\log(x))' + (-x+1)'$

$x \cdot \frac{1}{x} \cdot 1 \cdot \log(x) - 1 = \log(x)$ ✓ (gleich wie am Anfang)

(3) $$\int_0^x \underbrace{te^t}_{g_2(t)\, g_1'(t)}\, dt = \left[e^t t\right]_0^x - \int_0^x e^t\, dt = xe^x - (e^x - 1)$$

$\begin{cases} g_1(t) = e^t \\ g_2(t) = t \end{cases}$

Satz: ["Substitutionsregel"] (Kettenregel für Integrale)

$I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle

$h: I \to J$, $g: J \to \mathbb{R}$

Falls: • h ist differenzierbar

• g hat eine Stammfunktion

Dann hat $h' \cdot (g \circ h)$ Stammfunktionen und

$$\boxed{\int_{x_0}^{x} h'(t)\, g(h(t))\, dt = \int_{h(x_0)}^{h(x)} g(t)\, dt}$$

Bem: Warum "Substitutionsregel"?

wir ersetzen $u = h(t)$, $du = h'(t)\, dt$

$$\rightsquigarrow \int_{x_0}^{x} h'(t)\, g(h(t))\, dt = \int_{h(x_0)}^{h(x)} g(u)\, du$$

[Warum gilt die Substitutionsregel?

falls $f' = g$, gilt $(f \circ h)' = h' \cdot f' \circ h$

(Kettenregel) $= h' \cdot (g \circ h)$]

Beispiele:

(1) $g(x) = xe^{x^2}$ (Partielle Int. funktioniert hier nicht!)

$h(x) = x^2$

Aber: $g(x) = \frac{1}{2} 2xe^{x^2} = \frac{1}{2} h'(x) e^{h(x)}$

$u = t^2$, $du = 2t\, dt$

Substitutionsregel: $\int_0^x te^{t^2}\, dt = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} e^u\, du = \frac{1}{2} [e^u]_0^{x^2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}(e^{x^2} - 1)}}$

($y = x^2$, $\frac{dy}{dx} = 2x$, $dx = \frac{dy}{2x}$

$\int xe^{x^2}\, dx = \int_0^x \cancel{x} e^y \frac{1}{2\cancel{x}}\, dy = \left[\frac{1}{2} e^{x^2}\right]_0^x$

$\int_0^{\cancel{x}} \frac{1}{2} e^y\, dy = \frac{1}{2}[e^{x^2}]_0^x = \frac{1}{2}(e^{x^2} - 1)$ ✓)

(2) Substitution $(a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ $u = at + b$, $du = a\,dt$

$\int g(a+b)$ "=" $\frac{1}{a} \int g(u)$

$$\left[\int_{x_0}^{x} g(at+b)\, dt = \frac{1}{a} \int_{ax_0+b}^{ax+b} g(u)\, du \right]$$

$u = at + b$
$du = a\,dt$

(3) Stammfunktion für e^{x^2}?

Man kann beweisen:

1) Es gibt eine Stammfunktion f.

2) f ist <u>keine elementare Funktion</u> (d.h. nicht möglich, auszurechnen).

(Liouville, 19 Jhr)

$\Rightarrow$ nichts ' abgeleitet ergibt exakt e^{x^2}

(4) $\int_{x_0}^{x} \sqrt{1-t^2}\, dt$; $-1 \leq x_0 \leq x \leq 1$

Wir sehen nicht klar eine Funktion der Form $h' \cdot g \circ h$.

Wegen $\sqrt{1-t^2}$, versuchen wir $t = \cos(u) \Leftrightarrow u = \arccos(t)$ $u \in [0, \pi]$ zu schreiben.

$t = \cos(u) \Rightarrow dt = -\sin(u)\, du$

$$\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\cos(u)^2} \underset{\uparrow}{=} \sin(u)$$

weil $0 \leq u \leq \pi$

$$\left(\begin{array}{c} \sin^2 + \cos^2 = 1 \\ \sin^2 = 1 - \cos^2 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} \sqrt{1-t^2}\, dt = -\int_{\arccos(x_0)}^{\arccos(x)} \sin^2(u)\, du$$

$\sin^2(u)$ kann man als Kombination von $\sin(u)$, $\sin(2u)$, $\cos(u)$, $\cos(2u)$ schreiben:

$$\left(\frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i} \right)^2 = -\frac{1}{4}\left(e^{2iu} - 2 + e^{-2iu}\right) = -\frac{1}{2}\left(\cos(2u) - 1\right)$$

$$\int \cos(2u) = \frac{1}{2} \sin(2u)$$

$\rightsquigarrow$ wir können $\int_{x_0}^{x} \sqrt{1-t^2}\, dt$ berechnen

hat Stammfunktion $\to$ Funktion ist stetig.

V23

03.12.20

§6.2 Das Integral für "Regelfunktionen"

Idee: man kann beweisen:

falls (f_n), $g_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$

- g_n hat Stammfunktion f_n
- $g_n \longrightarrow g$ gleichmässig auf I

$\Rightarrow$ g hat Stammfunktion, und

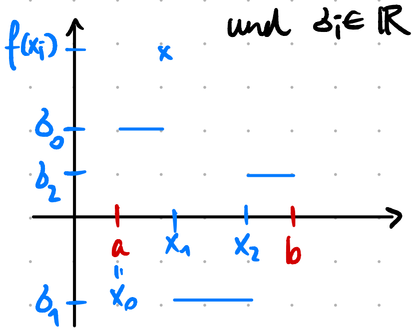
$$f_n(x) - f_n(x_0) = \int_{x_0}^{x} g_n(t)\,dt \longrightarrow \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \text{ gleichmässig.}$$

Anstatt Polynome benutzen wir Steppenfunktionen

Def: $s : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst Steppenfunktion falls:

es gibt $k \in \mathbb{N}$ und $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k = b$

und $\delta_i \in \mathbb{R}$; $0 \leq i \leq k-1$ sodass $f(x) = \delta_i$ falls $x_i < x < x_{i+1}$

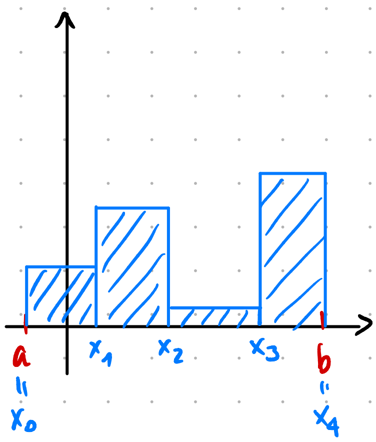


Funktion, die auf Teilintervallen stetig ist

Dann definieren wir:

$$\int_a^b s(t)\,dt = \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} \sigma_i\,(x_{i+1} - x_i)}_{\text{Summe}} \in \mathbb{R}$$

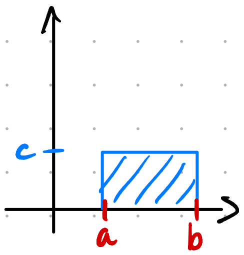
Geometrische Interpretation: falls $s \geq 0$



$$\int_a^b s(t)\,dt = \text{Flächeninhalt von}$$

$$C_s = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{l} a \leq x \leq b, \\ 0 \leq y \leq s(x) \end{array} \right\}$$

Beispiel: $s(x) = c$ auf $[a,b]$



s hat eine Stammfunktion cx

$$\rightsquigarrow \int_a^b s(t)\,dt = c(b-a) = \int_a^b s(t)\,dt$$

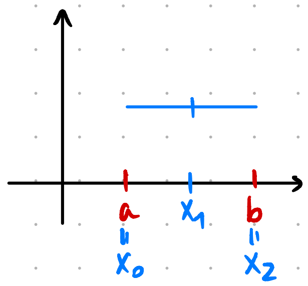
Stamm. Steppen

(kein Widerspruch bei Notation ! ü)

Satz: $I = [a,b]$, $a < b$

(1) Falls s Steppenfunktion auf I ist, $\int_a^b s(t)\,dt$ hängt nicht vom Wahl der Verteilung

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b \quad \text{ab.}$$



$\sigma_0 = \sigma_1 = c$

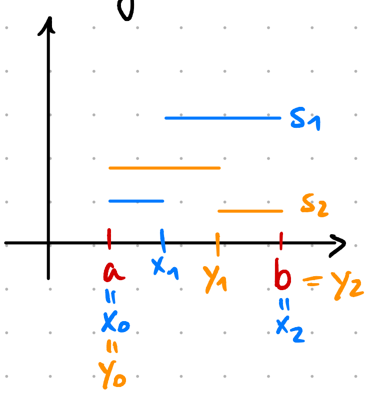
(2) (Linearität) Für s_1, s_2 Steppenfunktionen ist $s_1 + s_2$ auch eine Steppenfunktion und $\boxed{\int_a^b (s_1(t) + s_2(t))\,dt = \int_a^b s_1(t)\,dt + \int_a^b s_2(t)\,dt}$

(3) s Steppenfunktion $\Rightarrow$ $|s|$ ist Steppenfunktion, und s ist beschränkt und

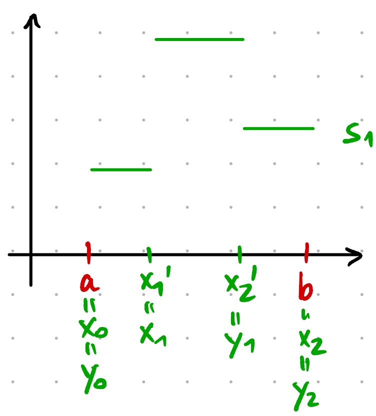
$$\boxed{\left|\int_a^b s(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |s(t)|\,dt \leq M(b-a), \text{ wo } |s(t)| \leq M \text{ für alle } t.}$$

Dreiecksungleichung für Integrale

Warum gilt (2):



$s_1 + s_2 =$



Steppenfunktion

$\Rightarrow$ s_1, s_2, s_1+s_2 sind auf $]x_i', x_{i+1}'[$ alle drei Konstanten $\Rightarrow$ das Resultat folgt leicht.

Erinnerung: (gleichm. Konvergenz): I: Intervall

(g_n) konv. gleichmässig gegen g auf I

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall t \in I, \forall n \geq N, |g_n(t) - g(t)| < \varepsilon$$

sodass für   gilt dass

Def: $I = [a, b]$, $a < b$

$g: I \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst **Regelfunktion** wenn es gibt $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $s_n: I \longrightarrow \mathbb{R}$ Steppenfunktion, sodass $s_n \longrightarrow g$ **gleichmässig**.

Satz 1: Für $g: I \longrightarrow \mathbb{R}$ Regelfunktion,

und $g = \lim s_n$ (gleichmässig), es gibt $x \in \mathbb{R}$,

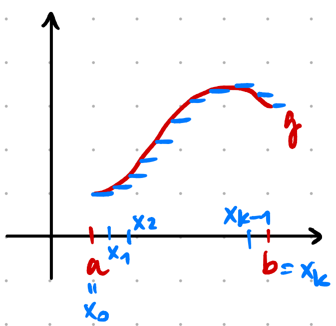
$\int_a^b s_n(t)\, dt \longrightarrow x$, x hängt nicht vom Wahl von (s_n) ab.

Def: g Regelfunktion auf I; $\boxed{\int_a^b g(t)\, dt = x}$

Satz 2: Jede stetige $g: I \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine Regelfunktion.

D.h. $\int_a^b g(t)\, dt$ existiert für alle stetige Funktionen g.

Warum gilt Satz 2?



$g: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$g(t) \approx g(a)$ für $a \leq t \leq x_1$

(z.B. $|g(t) - g(a)| < \varepsilon$)

$g(t) \approx g(x_1)$ für $x_1 \leq t \leq x_2$

$g(t) \approx g(x_i)$ für $x_i \leq t \leq x_{i+1}$

$\rightarrow s_\varepsilon$ definiert

$\rightsquigarrow |g(t) - \underset{1/n}{s_\varepsilon}(t)| < \underset{1/n}{\varepsilon}$ für alle t

$\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \to \infty$

Problem: wie kann man sichern, dass nur endlich viele x_i benutzt sind?

Def: $I \subset \mathbb{R}$ Intervall

$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst gleichmässig stetig falls:

für alle $\varepsilon > 0$, es gibt $\delta > 0$, für alle $x \in I$, $y \in I$, wenn $|x-y| < \delta$, ist $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

stetig

$$[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \forall y \in I, (|x-y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)]$$

δ hängt nicht von x ab: gleichmässig

Satz: [6.2.7]

$g: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ g ist gleichmässig stetig

(Beweis im Skript)

Beweis von Satz 1:

① $I = [a,b]$; $g: I \longrightarrow \mathbb{R}$ Regelfunktionen

(s_n) Folge von Steppenfunktionen

$s_n \rightarrow g$ gleichmässig

$x_n = \int_a^b s_n(t)\, dt \in \mathbb{R}$

Cauchy Kriterium:

(x_n) konvergiert $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m$ sodass $n \geq N, m \geq N$, ist $|x_n - x_m| < \varepsilon$

$$x_n - x_m = \int_a^b s_n(t)\, dt - \int_a^b s_m(t)\, dt = \int_a^b (s_n(t) - s_m(t))\, dt$$

$$|x_n - x_m| = \left| \int_a^b (s_n(t) - s_m(t))\, dt \right| \leq \int_a^b |s_n(t) - s_m(t)|\, dt \leq M_{n,m}(b-a)$$

(Dreiecksungleichung)

wo $M_{n,m}$ ist sodass $|s_n(t) - s_m(t)| \leq M_{n,m}$, $t \in [a,b]$

Gleichmässige Konvergent (+ Cauchy Kriterium für gleichm. Konvergenz)

$\Rightarrow$ für $\varepsilon > 0$, es gibt $N \in \mathbb{N}$ sodass

$$\left.\begin{cases} \text{für alle } t \in I \\ \text{für alle } n, m \geq N \end{cases}\right\} |s_n(t) - s_m(t)| \leq \varepsilon$$

$\Rightarrow$ für $n, m \geq N$ ist $M_{n,m} < \varepsilon$ und $|x_n - x_m| \leq (b-a)\varepsilon$

D.h. (x_n) ist eine Cauchy Folge ; sie konvergiert.

② Ziel: $\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(t)\,dt$ hängt nicht vom Wahl der Folge (s_n) ab.

Trick: seien $\begin{cases} s_n \longrightarrow g & (\text{gleichm.}) \\ u_n \longrightarrow g & (\text{gleichm.}) \end{cases}$

Wir definieren: $v_n \begin{cases} v_{2n} = s_n \\ v_{2n+1} = u_n \end{cases}$

Weil $\underset{(\text{gleichm.})}{s_n \to g}$, $\underset{(\text{gleichm.})}{u_n \to g}$, folgt $v_n \to g$ (gleichm.)

① $\Rightarrow$ $\int_a^b v_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

$$\int_a^b v_n(t)\,dt = \begin{cases} \int_a^b s_{\frac{n}{2}}(t)\,dt & , n \text{ gerade Zahl} \\ \int_a^b u_{\frac{n-1}{2}}(t)\,dt & , n \text{ ungerade Zahl} \end{cases}$$

① $\Rightarrow$ $\int_a^b s_{\frac{n}{2}}(t)\,dt \longrightarrow x$

$\int_a^b u_{\frac{n-1}{2}}(t)\,dt \longrightarrow x$

$$\Rightarrow \boxed{\lim \int_a^b s_n(t)\,dt = \lim \int_a^b u_n(t)\,dt}$$

Def: $I = [a, b]$, $a < b$

$g: I \longrightarrow \mathbb{R}$ Regelfunktion (z.B. stetige Funktion)

$\int_a^b g(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(t)\,dt$ wo (s_n) ist eine Folge von Steppenfunktionen die gleichmässig gegen g konvergiert.

Weiter: wenn $a > b$

$$\boxed{\int_a^b g(t)\,dt \overset{\text{Def.}}{=} -\int_b^a g(t)\,dt}$$

$\left[\text{ z.B. } \int_0^{-1} g(t)\,dt = -\int_{-1}^{0} g(t)\,dt \right]$

und $\int_a^a g(t)\,dt = 0$

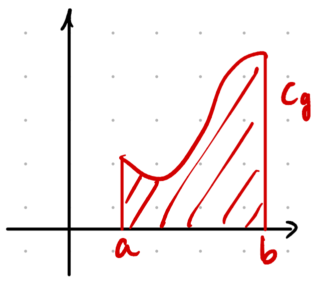
Wenn keine Grenzen: $\int -x\,dx = -\int x\,dx$

Def: $I = [a,b]$, $a < b$

$g: I \longrightarrow \mathbb{R}$ Regelfunktion $g \geq 0$

Der Flächeninhalt von $C_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$

ist definiert als $\int_a^b g(t)\,dt$



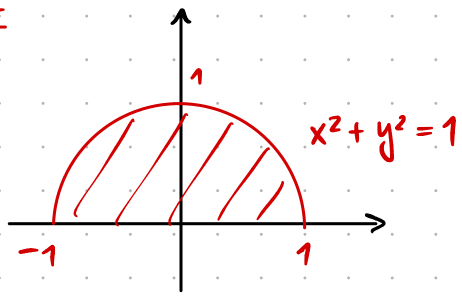
$f(\alpha x) = \alpha f(x)$

d.h. $f(-x) = f(-1 \cdot x)$

$= -1 \cdot f(x) = -f(x)$

Integral ist eine lineare Abb.!

z.B.



Flächeninhalt $= \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt$

Zentralsatz der Analysis (6.2.12)

$I = [a,b]$

$g: I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig

Dann ist die Funktion $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \int_a^x g(t)\,dt, \quad a \leq x \leq b$$

ist differenzierbar auf I, und $f' = g$

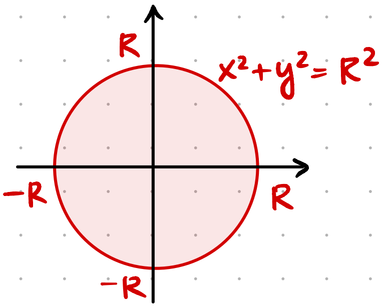
(d.h. f ist eine Stammfunktion von g)

$f \xrightarrow{\ '\ } g$

$\int g = f$

Kor. Jede stetige Funktion hat eine Stammfunktion.

Beispiel: Flächeninhalt $A(R)$ einer Kreisscheibe mit Radius $R>0$



$$A(R) = 2\times(\text{Flächeninhalt für Halbkreis})$$
$$= 2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-t^2}\,dt$$
$$\underset{\substack{\text{subst.}\\ t=Ru}}{=} 2R^2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt$$
$$\underset{\text{Zentralsatz}}{=} 2R^2\left(f(1)-f(-1)\right)$$

wo f ist Stammfunktion von $g(t)=\sqrt{1-t^2}$

$$\rightsquigarrow A(R) = 2R^2\cdot\underbrace{\frac{\pi}{2}}_{=f(1)-f(-1)}$$

$$\boxed{A(R) = \pi R^2}$$

V24 09.12.20

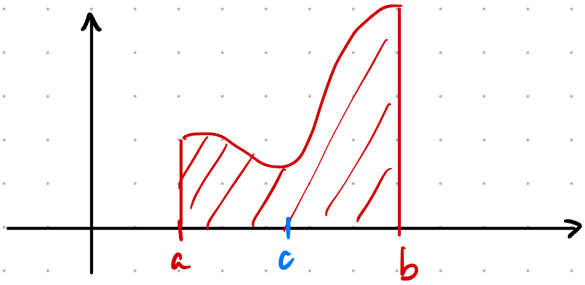
Beweis:

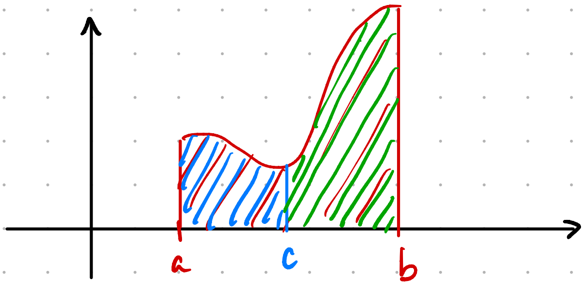
Hilfsatz: $g: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, Regelfunktion

(1) $\left|\int_a^b g(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |g(t)|\,dt \leq M(b-a)$ [Dreiecksungl.]
$\left(\text{falls } |g(t)| \leq M,\ t\in[a,b]\right)$

(2) $a \leq c \leq b \Rightarrow g$ auf $[a,c]$, $[c,b]$ Regelf. und

$$\int_a^b g(t)\,dt = \int_a^c g(t)\,dt + \int_c^b g(t)\,dt$$

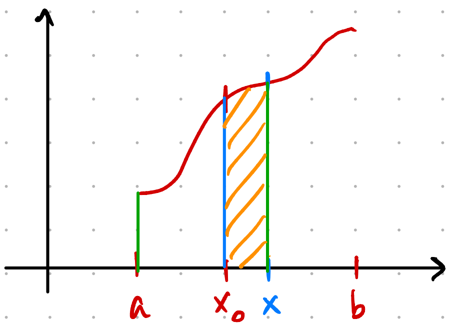




$f(x) = \int_a^x g(t)\,dt$, g stetig

$x \in [a,b]$, $a \leq x_0 < x \leq b$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\left(\int_a^x g(t)\,dt - \int_a^{x_0} g(t)\,dt\right)$$



$$= \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x g(t)\,dt$$

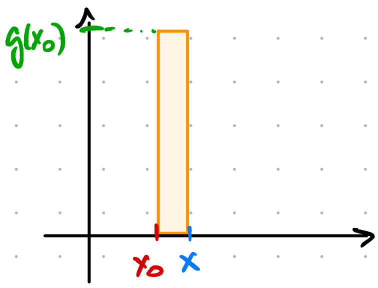
Sei $\varepsilon > 0$: Stetigkeit von g an x_0

$\Rightarrow$ es gibt $\delta > 0$ sodass

$|g(t) - g(x_0)| < \varepsilon$ für

$x_0 \leq t \leq x_0 + \delta$

$\Rightarrow$



Flächeninhalt, welches wir berechnen ist fast gleich wie der Flächeninhalt eines Rechtecks!

Rechtsdifferentierbar

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\text{Steigung}} = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x g(t)\,dt = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x \left(g(x_0) + g(t) - g(x_0)\right)dt$$

$$= \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x g(x_0)\,dt + \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x \left(g(t) - g(x_0)\right)dt$$

$\uparrow$

Linearität des Integrals

$$= g(x_0) + R$$

wo $|R| = \left| \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} (g(t) - g(x_0))\, dt \right|$

$\leq \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} \varepsilon \, dt$, falls $x_0 < x \leq x_0 + \delta$ (Dreiecksungleichung)

d.h. $|R| \leq \varepsilon$ für $x_0 < x \leq x_0 + \delta$

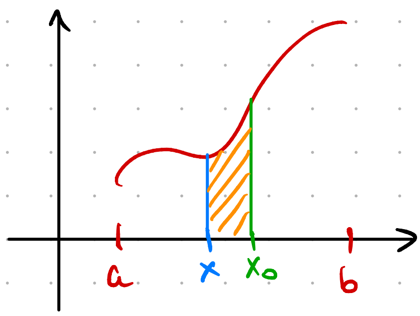
d.h. $\underbrace{f'_r}_{\text{rechte Ableitung}} (x_0) = g(x_0)$

rechte Ableitung
(weil $x > x_0$)

Ähnlicherweise: $f'_\ell (x_0) = g(x_0)$

linke Ableitung

Steigung $\left\{ \begin{array}{l} = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ \qquad \| \\ \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \end{array} \right.$



Kor: Für $g: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 g(t)\, dt$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)$$

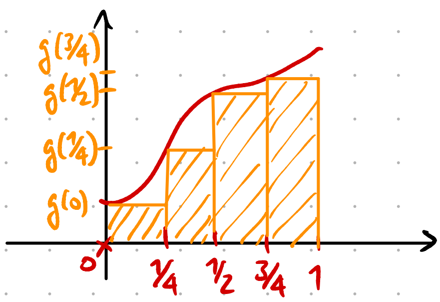
differenz $\frac{g(1)}{n} \to 0$

$S_n(t) =$ Treppenfunktion

Warum?

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(-) = \int_0^1 s_n(t)\, dt$$

wo $s_n(t) = g\left(\frac{k}{n}\right)$ für $\frac{k}{n} \leq t < \frac{k+1}{n}$, wo $0 \leq k \leq n-1$



Mit gleichmässiger Stetigkeit sieht man dass

$s_n(t) \longrightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^1 s_n(t)\, dt \longrightarrow \int_0^1 g(t)\, dt$$

z.B. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(0 + \left(\frac{1}{n}\right)^4 + \left(\frac{2}{n}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^4\right) = ?$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k-1} g\left(\frac{k}{n}\right), \text{ wo } g(t) = t^4$$

$\rightsquigarrow$ der Grenzwert existiert und ist

$$= \int_0^1 t^4\, dt$$

$$= f(1) - f(0) \qquad \text{(Zentralsatz der Analysis)}$$

wo $f' = g$; z.B. $f(t) = \frac{1}{5} t^5$

$\rightsquigarrow \boxed{\lim = \frac{1}{5}}$

<u>Weitere Anwendung:</u>

<u>Satz:</u> $g: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $a<b$ $\qquad$ g <u>Regelfunktion</u>

Falls $g = \lim\limits_{n\to\infty} g_n$ gleichmässig auf $[a,b]$, wo g_n Regelfunktion sind, dann gilt

$$\int_a^b g(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(t)\, dt$$

[<u>z.B.</u> g, g_n stetig]

<u>Beweis:</u> $\left| \int_a^b g(t)\, dt - \int_a^b g_n(t)\, dt \right|$

Linearität

$$= \left| \int_a^b (g(t) - g_n(t))\, dt \right| \leq \int_a^b |g(t) - g_n(t)| \leq (b-a)\varepsilon$$

wenn n ist gross genug sodass <u>für alle</u> $t \in [a,b]$, $|g(t) - g_n(t)| < \varepsilon$.

z.B. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $a_n \in \mathbb{R}$, sodass die Potenzreihe $\sum a_n x^n$ hat $R>0$ Konvergenzradius.

$$\rightsquigarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = g(x) \quad \text{ist auf }]-R,R[\text{ stetig.}$$

Für $|x|<R$, die Summen

$$a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$$

konvergiert gleichmässig gegen g, auf $[0,x]$.

$$\Rightarrow \int_0^x g(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^x (a_0 + \dots + a_n t^n)\,dt$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \dots + \frac{a_n}{x+1}x^{n+1}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Insbesondere:

$$|x|\leq 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

$$1 + y + y^2 + \dots =$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

hat Konvergenzradius 1.

$\rightsquigarrow$ für $|x|<1$

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\left(\text{weil } \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \arctan(0) = 0\right)$$

Wir bemerken: $\arctan\Big(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}}_{<1}\Big) = \frac{\pi}{6}$ $\left(\text{weil } \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\right)$

$\frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$$

Folge von Newton ?

Man sieht dass $\left| \frac{\pi}{6} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{10} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)} \right| < 2\times 10^{-6}$

§6.3. Weitere Eigenschaften von Integralen:

Def: $a>b$, g Regelfunktion

$$\int_a^b g(t)\,dt = -\int_b^a g(t)\,dt$$

$$\int_a^a g(t)\,dt = 0$$

Dann gilt: $\boxed{\int_a^b g(t)\,dt = \int_a^c g(t)\,dt + \int_c^b g(t)}$ für alle a,b,c (egal wo c ist), wenn g ist auf diese 3 Intervalle eine Regelfunktion (z.B. stetig)

Berechnungsregeln:

[linearität] $(u,v\in\mathbb{R})$ $\int_a^b (ug_1(t)+vg_2(t))\,dt = u\int_a^b g_1(t)\,dt + v\int_a^b g_2(t)\,dt$

[partielle Integration] g_1, g_2 auf $[a,b]$ differenzierbar, C^1

$$\Rightarrow \int_a^b g_1'(t)\,g_2(t)\,dt = g_1(b)g_2(b) - g_1(a)g_2(a) - \int_a^b g_1(t)\,g_2'(t)\,dt$$

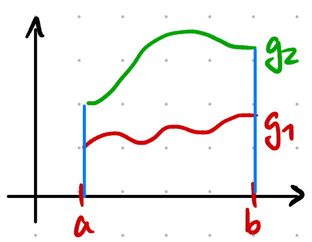
[substitutionsregel] g stetig, $h\in C^1$

$$\Rightarrow \int_a^b h'(t)\,g(h(t))\,dt = \int_{h(a)}^{h(b)} g(t)\,dt$$

Satz (6.3.2) $I=[a,b]$, $a<b$

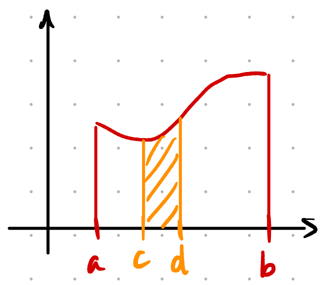
(1) g_1, g_2 stetig, $g_1(t)\le g_2(t)$ für $A\in[a,b]$

$$\Rightarrow \int_a^b g_1(t)\,dt \le \int_a^b g_2(t)\,dt$$



(2) g stetig, $g \geq 0$, $a \leq c \leq d \leq b$

$$\Rightarrow \int_c^d g(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$$



(3) g stetig, $g \geq 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \int_a^b g(t)\,dt \geq 0$

und $\left(\int_a^b g(t)\,dt = 0 \Rightarrow g(t) = 0 \text{ für alle } t \in [a,b]\right)$

Weil Integrale mit Stammfunktionen (manchmal) "berechenbar" sind, kann man Integrale benutzen um endliche Summen zu studieren!

Beispiel: wie gross ist $n!$ für n "grosse Zahl"?

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

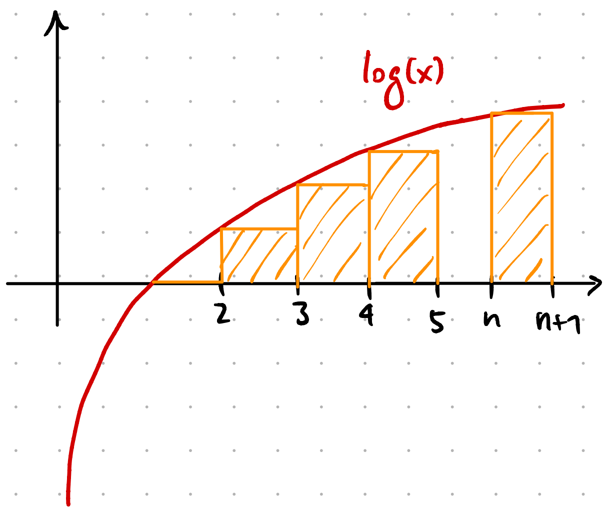
Abschätzen mithilfe von Integralen

$$\log(n!) = 0 + \log(2) + \ldots + \log(n)$$

Wir versuchen diese Summe mit $\int_1^n \log(t)\,dt$ zu vergleichen

Wir wissen: (part. Integration)

$$\int_1^x \log(t)\,dt = x\log(x) - (x-1)$$

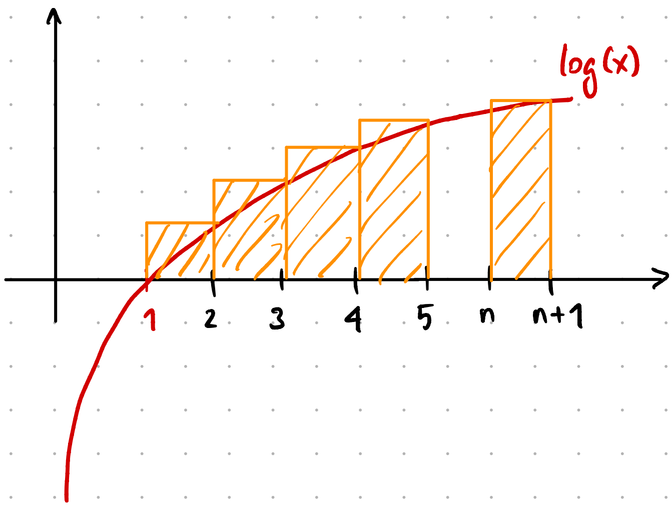


$a_n = \log(1) + \log(2) + \ldots + \log(n)$

↳ endliche Summe

$$a_n \leq \int_1^{n+1} \log(t)\,dt$$

" Flächeninhalt $\boxed{}$



$$a_n \geq \int_1^n \log(t)\,dt$$

$$\rightsquigarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n\cdot\log(n)-(n-1)} = 1$$

$$\left(\int_1^n \log(t)\,dt \leq \log(n!) \leq \int_1^{n+1} \log(t)\,dt \right)$$

Man sieht, dass diese Methode funktioniert für

$$a_n = g(1) + \dots + g(n)$$

falls $g: [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ ist

$$\left\{ \begin{matrix} \text{monoton wachsend} \\ \text{oder} \\ \text{monoton fallend} \end{matrix} \right\} \text{ ist}$$

Was die Ungleichungen für an sind, sieht man am besten mit einem Graph.

V25

10.12.20

Satz: (6.3.4) $k \in \mathbb{N}_0$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall

$f: I \to \mathbb{R}$, $(k+1)$mal differenzierbar auf I

$x_0 \in I$

Für $x \in I$ gilt

$$f(x) = T_k f(x; x_0) + \frac{1}{k!} \int_{x_0}^{x} f^{(k+1)}(t)\,(x-t)^k \, dt$$

[Lagrange: $f(x) = T_k f(x; x_0) + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!} (x-x_0)^{k+1}$, wo $c \in [x, x_0]$]

Erinnerung: $T_k f(x; x_0) = f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$

Warum?

k=0: $f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{= T_0} + \int_{x_0}^{x} f'(t) \cdot \underbrace{1}_{=(x-t)^0} \, dt = \checkmark$

k=1: $f(x) = f(x_0) + \underbrace{\int_{x_0}^{x} f'(t) \, dt}_{\int_{x_0}^{x} (x-t)^0 f'(t) \, dt}$

$\int_{x_0}^{x} \underbrace{(x-t)^0}_{= g_1'(t)} \underbrace{f'(t)}_{= g_2(t)} \, dt$, $g_1(t) = -(x-t)$

partielle Integration

$\downarrow$

$= f(x_0) + (0 - (-(x-x_0) f'(x_0)) + \int_{x_0}^{x} (x-t) f''(t) \, dt$

$= \underbrace{f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0)}_{T_1 f(x; x_0)} + \int_{x_0}^{x} (x-t) f''(t) \, dt$

k=2: $f(x) = T_1 f(x; x_0) + \int_{x_0}^{x} \underbrace{(x-t)}_{= g_1(t)} \underbrace{f''(t)}_{= g_2(t)} \, dt$

wo $g_1(t) = -\frac{1}{2}(x-t)^2$

$\leadsto f(x) = T_1 f(x; x_0) + \left(0 - \left(-\frac{1}{2}(x-x_0)^2 f''(x_0) + \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} (x-t)^2 f^{(3)}(t) \, dt\right)\right.$

$$= T_2 f(x; x_0) + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} (x-t)^2 f^{(3)}(t)\, dt \quad \checkmark$$

Dann: Induktion.

Beispiel:

$$f(x) = \log(1+x), \quad \text{auf }]-1, +\infty[$$

$$x_0 = 0$$

Es gilt: $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k} \qquad k \geq 1$

Taylorformel mit Integralrestglied:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + \frac{(-1)^k}{\cancel{k!}}\int_0^x \frac{\cancel{k!}}{(1+t)^{k+1}}(x-t)^k\, dt$$

x = 1: $\left|\log(2) - \left(1 - \frac{1}{2} + \dots + (-1)^k \frac{1}{k}\right)\right|$

$$= \left|\int_0^1 \frac{(1-t)^k}{(1+t)^{k+1}}\, dt\right|$$

$$\leq \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^{k+1}}\, dt$$

weil $|(1-t)^k| \leq 1$ für $0 \leq t \leq 1$

$$= \frac{1}{k} \quad \left(\text{weil } \frac{1}{k}\frac{1}{(1+k)^k} \text{ ist Stammfunktion}\right)$$

$$\rightsquigarrow \log(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

§ 6.4. Methoden / Standard Beispiele für Integrale:

① Eine wichtige Substitution:

$$\int_{x_0}^{x} g(at+b)\,dt = \frac{1}{a}\int_{ax_0+b}^{ax+b} g(u)\,du$$

$$[u = at+b, \quad du = a\,dt]$$

z.B. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+(2t+1)^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{du}{(1+u^2)} = \frac{1}{2}\left(\arctan(3) - \arctan(1)\right)$

② Einfache Stammfunktionen:

$$\int t^a\,dt = \frac{1}{a+1}t^{a+1}, \quad a \neq -1$$

rechte Seite = eine Stammfunktion

$$\int \frac{1}{t}\,dt = \log(t)$$

$$\int e^t\,dt = e^t$$

$$\int \cos(t)\,dt = \sin(t)$$

$$\int \sin(t)\,dt = -\cos(t)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \arcsin(t)$$

$$-\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \arccos(t)$$

$$\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan(t)$$

$$\int \tan(t)\,dt = \int \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\,dt = -\int \frac{(\cos'(t))}{\cos(t)}\,dt = -\int \frac{1}{u}\,du = -\log(\cos(t))$$

Substitution: $u = \cos(t)$

$t \in [0, \frac{\pi}{2}]$
damit $\cos(t) \not< 0$

$$\int \log(t)\,dt = t\log(t) - (t-1)$$

Erinnern!

③ Substitutionsregel / Partielle Integration

④ $\int_a^b t^k e^t \, dt$ $\quad k \in \mathbb{N}_0$ $\quad \Leftarrow$ diese Form von speziellen Integralen

$\int_a^b t^k \cos(t) \, dt$, $\int_a^b t^k \sin(t) \, dt$

(oder $\cos(ct)$, $\sin(ct)$, e^{ct})

$\rightsquigarrow$ partielle Integration wo man t^k ableitet, und wiederholung bis $\int e^t \, dt$ oder $\int \cos(t) \, dt$ oder $\int \sin(t) \, dt$

$\rightsquigarrow$ Resultat: (Polynom vom Grad k) $\cdot$ e^t [oder $\cos(t)$ oder $\sin(t)$]

z.B. $\int_0^x \underset{\substack{\downarrow' \\ 1}}{t} \underset{\substack{\uparrow \\ \sin(t)}}{\cos(t)} \, dt = [t \cdot \sin(t)]_0^x - \int_0^x 1 \cdot \sin(t) \, dt$

$= x \cdot \sin(x) + [\cos(t)]_0^x$

$= x\sin(x) + \cos(x) - 1$

⑤ Produkt von trig.- × exponentialfunktionen

$r, s \in \mathbb{R}$
$r \neq 0, s \neq 0$

$\int_a^b \cos(rt) e^{st} \, dt$, $\int_a^b \sin(rt) e^{st} \, dt$

Idee: zweimal partielle Integration (man leitet die trig. Funktion ab) $\rightsquigarrow$ eine Gleichung für das Integral lösen

z.B. $I = \int_0^x \cos(t) e^t \, dt = [\cos(t) e^t]_0^x + \int_0^x \sin(t) e^t \, dt$

$= \cos(x) e^x - 1 + [\sin(t) e^t]_0^x \underbrace{- \int_0^x \cos(t) e^t \, dt}_{-I}$

$\Rightarrow 2I = \cos(x) e^x - 1 + \sin(x) e^x$

$I = \frac{1}{2}\left(e^x (\cos(x) + \sin(x)) - 1\right)$

⑥ Trig. Funktion × Trig. Funktion

$r \neq 0$, $s \neq 0$: $\int_a^b \cos(rt)\sin(st)\,dt$, $\int_a^b \cos(rt)\cos(st)\,dt$, $\int_a^b \sin(rt)\sin(st)\,dt$

zweimal part. Integration $\rightsquigarrow$ Gleichung lösen

(immer die gleiche Funktion ableiten. (sonst ergibt sich $I = I$, und das ist keine neue Information und hilft uns nicht weiter).

⑦ Potenzen von trig. Funktionen

$$\int_a^b \cos(rt)^k\,dt , \quad \int_a^b \sin(rt)^k\,dt \qquad (k \in \mathbb{N}_0,\ r \in \mathbb{R})$$

$\rightsquigarrow$ $\cos(rt)^k$ = lineare Kombination von $\cos(jrt)$, $\sin(jrt)$, $0 \leq j \leq k$

$\rightsquigarrow$ die Linearität des Integrals benutzen und

$$\int_a^b \cos(jrt)\,dt , \quad \int_a^b \sin(jrt)\,dt$$

z.B. $\int_0^x \sin(t)^3\,dt$

$$\sin(t)^3 = \underbrace{\left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^3}_{} = -\frac{1}{8i}\left(e^{3it} - 3e^{it} + 3e^{-it} - e^{-3it}\right)$$

Exponentialdarstellung der Trig. Funktion benutzen.

$$= -\frac{1}{4}\left(\sin(3t) - 3\sin(t)\right)$$

$$\rightsquigarrow \int_0^x \sin(t)^3\,dt = -\frac{1}{4}\int_0^x \sin(3t)\,dt + \frac{3}{4}\int_0^x \sin(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{4 \cdot 3}\left[\cos(3t)\right]_0^x - \frac{3}{4}\left[\cos(t)\right]_0^x$$

$$= \frac{\cos(3x)}{12} - \frac{1}{12} - \frac{3\cos(x)}{4} + \frac{3}{4}$$

⑧ Sonderfall: "Orthogonalität" von cos und sin

n, m in $\mathbb{Z}$

$$\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(nt)\cos(mt)\,dt}_{\text{Skalarprodukt}} = 0 \quad \text{falls } n \neq m$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(nt)^2\,dt = \pi \quad \text{falls } n \neq 0, \quad = 2\pi \quad \text{falls } n = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(nt)\sin(mt)\,dt = 0 \quad \text{falls } n \neq m$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(nt)^2\,dt = \pi \quad \text{falls } n \neq 0, \quad = 0 \quad \text{falls } n = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(nt)\sin(mt)\,dt = 0 \quad \text{für alle } n, m$$

$\rightsquigarrow$ Fourier-Reihen

⑨ Rationale Funktionen

$g(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, p, q Polynome, und $q(x) \neq 0$ für $x \in I$

$$\int_a^b \frac{p(t)}{q(t)}\,dt = ?$$

Mann kann es immer berechnen; $\overbrace{\text{das Resultat}}^{\text{die Stammfunktion}}$ ist immer eine Kombination von:

- Polynome (wenn $q(t) = 1$)
- Rationale Funktionen
- log(rationale Funktionen / Polynome)
- arctan(———)

weil: $(\log)' = \frac{1}{x}$, $\arctan' = \frac{1}{1+x^2}$ (rationale Funktionen)

Schritt 1: "Partialbruchzerlegung"

$\rightsquigarrow$ $g(x) =$ lineare Kombination von

$$\begin{cases} ① \bullet \text{ Polynome} \\ ② \bullet \ \dfrac{1}{(\alpha x+\beta)^k}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \beta \neq 0 \\ ③ \bullet \ \dfrac{x}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^k}, \ \dfrac{1}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^k} \quad \underbrace{(\beta^2-4\alpha\gamma<0)}_{\text{NST sind } \notin \mathbb{R} \text{ (sondern } \in \mathbb{C})} \end{cases}$$

Schritt 2: man soll nur Stammfunktionen von ①, ②, ③ finden

+ lin. Kombo. bilden für $g(x)$.

① Klar

② $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{1}{(\alpha t+\beta)^k}\,dt = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha x_0+\beta}^{\alpha x+\beta} \frac{1}{u^k}\,du$ und $\displaystyle\int \frac{1}{u^k}\,du = \begin{cases} \frac{1}{1-k}u^{1-k}, & k\neq 1 \\ \log(u), & k=1 \end{cases}$

③ $\displaystyle\int \frac{t}{(\alpha t^2+\beta t+\gamma)^k}\,dt, \quad \int \frac{dt}{(\alpha t^2+\beta t+\gamma)^k}$

$\hookrightarrow$ $\alpha t^2+\beta+\gamma = \alpha\left(\left(t+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right)$

$\hookrightarrow$ Substitution

$$\int \frac{t}{(t^2+1)^k}\,dt \quad \text{oder} \quad \int \frac{dt}{(t^2+1)^k}$$

Fall 1: $\displaystyle\int \frac{t}{(t^2+1)^k}\,dt = \frac{1}{2}\int_{x_0^2+1}^{x^2+1} \frac{du}{u^k}$

Substitution: $u=t^2+1$
$du = 2t\,dt$

Fall 2: $\displaystyle\int \frac{dt}{(t^2+1)^k} = ?$ $\qquad k \in \mathbb{N}$

Idee: Integrale als I_k bezeichnen.

$$I_1 = \arctan(b) - \arctan(a)$$

Wir finden mit partieller Integration eine rekursive Gleichung zwischen I_k und I_{k+2}:

$$\int_a^b \frac{1\cdot dt}{(t^2+1)^k} = \left[\frac{t}{(t^2+1)^k}\right]_a^b + 2k\int_a^b \frac{t^2}{(t^2+1)^{k+1}}\,dt$$

V2b

16.12.20

$$I_k = \int_a^b \frac{dt}{(t^2+1)^k} = \int_a^b \frac{1\cdot dt}{(t^2+1)^k} =$$

$g_1' = 1$, $g_1 = t$

$g_2 = \frac{1}{(t^2+1)^k}$

$$= \left[\frac{t}{(t^2+1)^k}\right]_a^b - k\int_a^b \frac{2t\,(t^2+1)^{k-1}}{(t^2+1)^{2k}}\,dt$$

aber $\int_a^b \frac{t^2}{(t^2+1)^{k+1}}\,dt = \int_a^b \frac{(t^2+1)-1}{(t^2+1)^{k+1}}\,dt = I_k - I_{k+1}$

d.h. $I_k = \frac{b}{(b^2+1)^k} - \frac{a}{(a^2+1)^k} - 2k\,(I_k - I_{k+1})$

$$\Rightarrow I_{k+1} = \frac{1}{2k}\left[(1+2k)I_k - \frac{b}{(b^2+1)^k} + \frac{a}{(a^2+1)^k}\right]$$

(z.B. $I_2 = \frac{1}{2}\left[3(\arctan(b) - \arctan(a)) - \frac{b}{(b^2+1)} + \frac{a}{(a^2+1)}\right]$)

z.B. $f(x) = \int_1^x \underbrace{\frac{t^2+t}{6t^3-t^2+t-1}}_{g(t)}\,dt = ?$

Schritt 1: (keine Polynomdivision (Zähler ÷ Nenner nötig, da Ordnung des Zählers $\leq$ Ordnung des Nenners).

$\Rightarrow$ $6t^3-t^2+t-1 = (2t-1)(\underline{3t^2+t+1})$

In NST-Form bringen

$1^2 - 4\cdot 3 = -11 < 0$

$\Rightarrow$ Wir wollen $f(x)$ berechnen für $x \geq 1$

Wie sieht die Partialbruchzerlegung von g aus?:

$$g(t) = \frac{\alpha}{2t-1} + \frac{\beta t + \gamma}{3t^2+t+1} \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

$\underline{\underline{\alpha}}$: $\lim\limits_{t\to 1/2} (2t-1)\, g(t) = \alpha + 0$

$$\lim_{t\to\frac{1}{2}} \frac{(2t-1)(t^2+t)}{(6t^3-t^2+t-1)} = \lim_{t\to\frac{1}{2}} \frac{t^2+t}{3t^2+t+1} = \frac{3/4}{9/4} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{3}}$$

$\underline{\underline{\gamma}}$: $g(0) = -\alpha + \gamma = 0$ Def. von g benutzen

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{1}{3}}$$

$\underline{\underline{\beta}}$: Entweder $\begin{cases} t=1 & \text{benutzen} \\ t\to\infty & \text{nach Mult. mit } t \end{cases}$

$$\rightsquigarrow \boxed{\beta = 0}$$

$$\rightsquigarrow g(t) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2t-1} + \frac{1}{3t^2+t+1}\right)$$

(Einfache Kontrolle: einfach ausmultiplizieren & schauen ob es gleich ist wie die "ursprüngliche" Funktion $g(t)$.

<u>Schritt 2</u>: $f(x) = \frac{1}{3}\int_1^x \frac{dt}{2t-1} + \frac{1}{3}\int_1^x \frac{dt}{3t^2+t+1} = \frac{1}{6}\log(2x-1) + \frac{1}{3}\int_1^x \frac{dt}{3t^2+t+1}$

$$3t^2+t+1 = 3\left(t^2+\frac{t}{3}+\frac{1}{3}\right) = 3\left(\left(t+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{3}-\frac{1}{36}\right)$$

NST finden

$$= 3\left(\left(t+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{11}{36}\right)$$

$$\rightsquigarrow \int_1^x \frac{dt}{3t^2+t+1} = \frac{1}{3}\int_1^x \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{11}{36}}$$

Substitution: $u = t+\frac{1}{6}$, $du = dt$

$$= \frac{1}{3} \int_{7/6}^{x+1/6} \frac{du}{u^2 + \frac{11}{36}}$$

$$u^2 + \frac{11}{36} = \frac{11}{36}\left(\frac{36u^2}{11} + 1\right) = \frac{11}{36} \cdot \left(\left(\frac{6u}{\sqrt{11}}\right)^2 + 1\right)$$

$\rightsquigarrow$ Substitution: $v = \frac{6u}{\sqrt{11}}$, $dv = \frac{6\,du}{\sqrt{11}}$ $\Leftrightarrow$ $du = \frac{\sqrt{11}}{6} dv$

$$\frac{1}{3} \int_{7/6}^{x+1/6} \frac{du}{u^2 + \frac{11}{36}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{11}{36}} \cdot \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$= \int_{\frac{6 \cdot \frac{7}{6}}{\sqrt{11}}}^{\left(\frac{6x}{\sqrt{11}} + \frac{1}{6}\right)} \frac{dv}{v^2+1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{11}} \int_{\frac{7}{\sqrt{11}}}^{\frac{6x}{\sqrt{11}} + \frac{1}{6}} \frac{dv}{v^2+1} = \ldots \text{arctan} \ldots$$

(Bem: $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan(x) + C$)

§ 6.5 Uneigentliche Integrale:

z.B.:

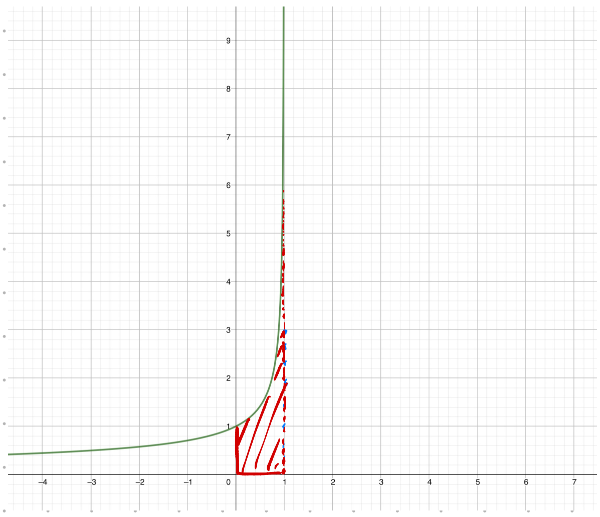
$$\int_1^{+\infty} g(t)\,dt = \;?$$

Intervalle auf unbeschränkte Intervalle

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = \;?$$

Funktion nicht stetig auf Intervall

↳ stetig auf $[0,1[$ (Undef. bei Stelle 1)

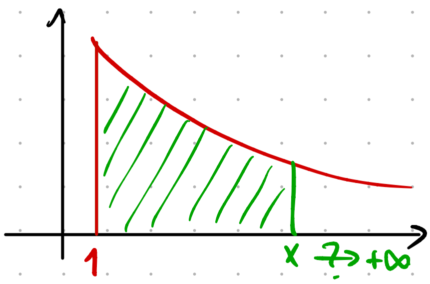


Das Integral wäre der Flächeninhalt

$$C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \leq x < 1 \\ 0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{1-x}} \end{matrix} \right\}$$

$\Rightarrow$ existiert ein solcher Flächeninhalt?

$\Rightarrow$ Vorgehensweise:



Def: Sei $g: [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Man sagt, dass $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ existiert ("uneigentliches Integral von g auf $[a,+\infty[$") wenn

$\lim\limits_{x\to\infty} \int_a^x g(t)\,dt$ existiert; man schreibt:

$$\int_a^{+\infty} g(t)\,dt = \lim_{x\to\infty} \int_a^x g(t)\,dt$$

(2) Ähnlicherweise:

$$\int_{-\infty}^{b} g(t)\,dt = \lim_{x \to -\infty} \int_{x}^{b} g(t)\,dt$$

$$\int_{a}^{b} g(t)\,dt = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \int_{a}^{x} g(t)\,dt \quad \text{(falls } g \text{ auf } [a,b[\text{ stetig ist)}$$

$$\int_{a}^{b} g(t)\,dt = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \int_{x}^{b} g(t)\,dt \quad (g \text{ auf }]a,b] \text{ stetig})$$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$ existiert falls

$\int_{-\infty}^{0} g(t)\,dt$ und $\int_{0}^{+\infty} g(t)\,dt$ existieren, und dann

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} g(t)\,dt + \int_{0}^{+\infty} g(t)\,dt$$

Warnung! diese Definition ist nicht

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt = \lim_{x \to \infty} \int_{-x}^{x} g(t)\,dt \quad !$$

(Man kann überprüfen, dass wenn $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$ existiert, ist es gleich $\lim_{x \to \infty} \int_{-x}^{x} g(t)\,dt$, aber! Das Problem ist:

Der Grenzwert kann auch dann existieren, wenn das uneigentliche Integral nicht existiert.

(4) $g:]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ stetig

$$\int_{a}^{b} g(t)\,dt = \int_{a}^{x_0} g(t)\,dt + \int_{x_0}^{b} g(t)\,dt$$

wo $x_0 \in]a,b[$ (die rechte Seite hängt nicht von x_0 ab.)

Eigenschaften:

Linearität: $\int_a^{+\infty} (\alpha g_1(r) + \beta g_2(r)\, dt = \alpha \int_a^{+\infty} g_1(t)\, dt + \beta \int_a^{+\infty} g_2(t)\, dt$

(falls g_1, g_2 uneigentliche Integrale haben).

Es gilt auch: für $b \geq a$, g stetig auf $[a, +\infty[$

$$\int_a^{+\infty} g(t)\, dt = \int_a^b g(t)\, dt + \int_b^{+\infty} g(t)\, dt$$

(auch für andere uneigentliche Integrale)

Bemerkung: uneigentliche Integrale haben viele gemeinsamen Eigenschaften mit Reihen.

Notation: man sagt auch oft " das Integral $\int_a^{+\infty} g(t)\, dt$ konvergiert"
$\equiv$ "uneigentliches Integral existiert" samesame!

Satz: (6.5.2) $g: [a, b[\to \mathbb{R}$ stetig, $b = +\infty$ erlaubt

(1) [Vergleichung] Falls es gibt $g_1: [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}_+$
mit $|g(t)| \leq g_1(t)$
und $\int_a^b g_1(t)\, dt$ existiert, dann existiert $\int_a^b g(t)\, dt$ und

$$\left| \int_a^b g(t)\, dt \right| \leq \int_a^b g_1(t)\, dt$$

$\Updownarrow$ ganz ähnlich

⊛ Kriterium für Absolutkonvergent von Reihen:

$|a_n| \leq b_n$ und $\sum b_n$ konv.

$\Rightarrow \sum a_n$ konv. abs.

(2) Falls $g \geq 0$, existiert $\int_a^b g(t)\,dt$ genau dann wenn es gibt $M \geq 0$ mit $\int_a^x g(t)\,dt \leq M$ für $a \leq x < b$.

$\Updownarrow$ sehr ä

eine Reihe mit nicht negativen Gliedern ist genau dann konvergent, wenn die Folge von partiellen Summen ist von oben beschränkt ist.

(3) Falls $g \geq g_1$ wo $g_1 \geq 0$ und $\int_a^b g_1(t)\,dt$ <u>existiert nicht</u>, dann hat g kein uneigentliches Integral auf $[a,b[$.

Beweise im Skript. ((1) ist Anwendung vom Cauchy-Kriterium, (2), (3) ähnlich zum Fall von Reihen)

Beispiele:

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^c}\,dt$, $c \in \mathbb{R}$

$(x \geq 1)$

$$\int_1^x \frac{1}{t^c}\,dt = \begin{cases} \frac{1}{1-c}\left(x^{1-c}-1\right), & c \neq 1 \\ \log(x), & c = 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[x \to +\infty]{} \begin{cases} \frac{1}{c-1}, & c > 1 \\ +\infty & c < 1 \\ +\infty & c = 1 \end{cases}$$

D.h. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^c}\,dt$ existiert, und ist $= \frac{1}{c-1}$ $\Leftrightarrow$ $c > 1$

(z.B. $\int_1^{+\infty} \frac{2+\cos(t)}{t}$ existiert nicht)

$\hookrightarrow$ Funktion ist $\geq \frac{1}{t}$

Bem. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^c}\,dt$ existiert genau dann wenn ($\Leftrightarrow$) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^c}$ konvergiert

(2) $\int_0^1 \frac{1}{t^c}\,dt$? $\quad c \in \mathbb{R}$

$c \leq 0 \Rightarrow$ stetig auf $[0,1]$

$0 < x \leq 1$

$$\int_x^1 \frac{1}{t^c}\,dt = \begin{cases} \frac{1}{1-c}\left(1 - x^{1-c}\right), & c \neq 1 \\ -\log(x), & c = 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[x \to 0]{} \begin{cases} \frac{1}{1-c}, & c < 1 \\ +\infty, & c > 1 \\ +\infty, & c = 1 \end{cases}$$

d.h. $\int_0^1 \frac{1}{t^c}\,dt$ existiert $\Leftrightarrow$ $c < 1$

Bsp. ① + ② $\Rightarrow$ $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^c}\,dt$ existiert für <u>keine $c \in \mathbb{R}$</u>

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^c}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{t^c}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^c}\,dt$$

Existiert für $\quad c < 1, \quad c > 1 \quad \Rightarrow$ unmöglich!

(3) $\int_0^{+\infty} e^{-at}\,dt, \quad a \in \mathbb{R}$

$(x \geq 0)$

$$\int_0^x e^{-at}\,dt = \begin{cases} -\frac{1}{a} e^{-ax} + \frac{1}{a}, & a \neq 0 \\ x, & a = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[x \to \infty]{} \begin{cases} \frac{1}{a}, & a > 0 \\ +\infty, & a < 0 \\ +\infty, & a = 0 \end{cases}$$

Anwendung: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$?

$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$?

$t^2 \geq t$ für $t \geq 1$

$\Rightarrow e^{-t^2} \leq e^{-t}$ für $t \geq 1$

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} e^{-t^2}\,dt \leq \underbrace{\int_1^{\infty} e^{-t}\,dt}$$

existiert weil $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ existiert, und

$$\int_0^{+\infty} = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$$

= Integral einer stetigen Funktion (in diesem Fall) ↳ existiert immer

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ existiert

$\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2}\,dt$?

$$\int_{-\infty}^{-1} e^{-t^2}\,dt \leq \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} e^{t}\,dt}$$

existiert auch (wie im Bsp. (3))

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{0} e^{-t^2}\,dt$ existiert

V27

17.12.20

(4) <u>Warnung</u>: viele Eigenschaften von uneig. Integralen sind ähnlich zu Eigenschaften von Reihen.

Aber!: Das gilt <u>nicht</u> für alle Eigenschaften.

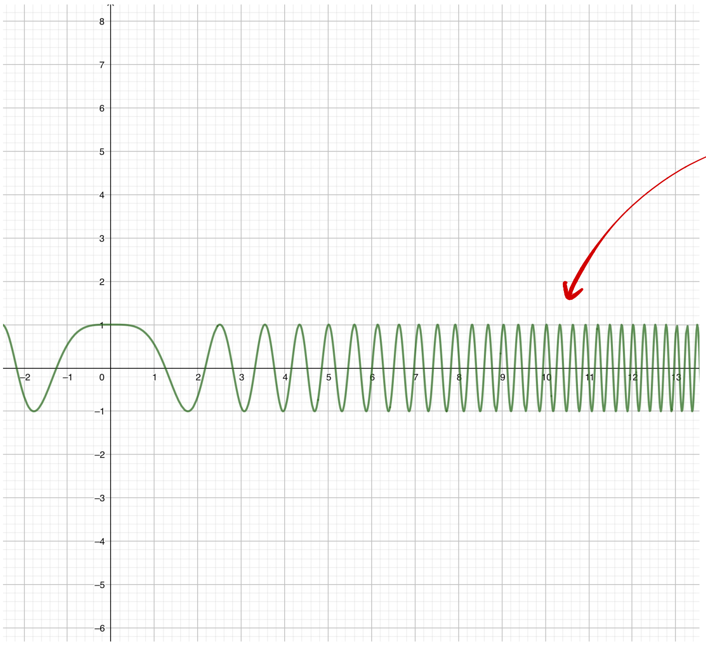
(Nicht alle Eigenschaften von Reihen kann man auf Integrale überführen).

<u>z.B.</u> $\sum a_n$ konv. $\Rightarrow$ $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ aber es gibt $g: [1, +\infty[\to \mathbb{R}$

mit (i) $g(x)$ konv.

(ii) $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ existiert

<u>Bsp:</u> Sei $g(x) = \cos(x^2)$, $x \geq 1$



oszilliert immer schneller

$\int_1^{\infty} \cos(t^2)\,dt$ existiert!

obwohl $\lim_{x\to\infty} \cos(x^2)$ nicht existiert.

$$\int_1^{x} \cos(t^2)\,dt = \int_1^{x^2} \frac{\cos(u)}{2\sqrt{u}}\,du$$

Substitution mit $u = t^2$

$t = \sqrt{u}$, $dt = \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du$

$\int_1^{\infty} \frac{1}{u^c}\,du$ existiert nur für $c > 1$ ($\Rightarrow$ aus Bsp. 1) aber $\displaystyle\int_1^{x^2} \frac{\cos(u)}{2\sqrt{u}}\,du = \frac{\sin(x^2)}{2x} - \frac{\sin(1)}{2} + \frac{1}{4}\int_1^{x^2} \frac{\sin(u)}{u^{3/2}}\,du$

$$\begin{cases} g_1' = \cos(u), & g_1 = \sin(u) \\ g_2 = \frac{1}{2\sqrt{u}}, & g_2' = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)u^{-3/2} \end{cases}$$

Als $\underline{x \to +\infty}$: $\displaystyle\frac{\sin(x^2)}{2x} - \frac{\sin(1)}{2} \longrightarrow -\frac{\sin(1)}{2}$

(Existenz überprüfen:) und $\displaystyle\left|\frac{\sin(u)}{u^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{u^{3/2}}$

und das uneig. Integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^{3/2}}$ existiert (Bsp. (1))

$\overset{\text{Satz}}{\Longrightarrow} \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^{3/2}}\,du$ existiert

d.h. $\displaystyle\int_1^{x^2} \frac{\sin(u)}{u^{3/2}}\,du \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_1^{\infty} \frac{\sin(u)}{u^{3/2}}\,du$

$\rightsquigarrow$ $\underline{\displaystyle\int_1^{+\infty} \cos(t^2)\,dt \text{ existiert.}}$

$$\left|\int_1^{x^2} \frac{\sin(u)}{u^{3/2}}\,du\right| \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{u^{3/2}}\,du$$

(5) $\displaystyle\Gamma(c) = \int_0^{+\infty} t^{c-1} e^{-t}\,dt$

"Eulersche Gamma Funktion"

→ Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist das Integral konvergent?

$g(t) = t^{c-1}e^{-t}$ ist auf $]0, +\infty[$ stetig (auf $[0, +\infty[$ stetig falls $c \geq 1$)

$\displaystyle\int_0^1 t^{c-1}e^{-t}\,dt$ existiert <u>nur</u> wenn $c-1 > -1$ $c \Rightarrow$ $c > 0$

(weil $|t^{c-1}e^{-t}| \leq t^{c-1}$, $t>0$ und $\int_0^1 \frac{dt}{t^d}$ existiert nur für $d>-1$)

(Bsp. (2))

② $\int_1^{+\infty} t^{c-1}e^{-t}\,dt$?

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{c-1}e^{-x}}{e^{-x/2}} = \lim_{x\to\infty} x^{c-1}e^{-x/2} = 0$$

$\Rightarrow \exists M \geq 0$ s.d.

$$0 \leq x^{c-1}e^{-x} \leq Me^{-x/2} \quad \text{für } x \geq 1$$

hat uneig. Integral auf $[1,+\infty[$ (Bsp. (3))

$\overset{\text{Satz}}{\rightsquigarrow} \int_1^{\infty} t^{c-1}e^{-t}\,dt$ existiert für $c \in \mathbb{R}$

①+② $\Rightarrow \Gamma(c)$ existiert für $\underline{c>0}$

<u>Satz</u>: $\Gamma(1)=1$

$\Gamma(c+1) = c\,\Gamma(c)$ für $c>0$

<u>Kor</u>: $\Gamma(n) = (n-1)!$ (z.B. $\Gamma(3)=2$)
$n \in \mathbb{N}$

黒にする.

<u>Beweis</u>: $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-t}\,dt = 1$
(Bsp. (3)) mit $a=1$

$$\Gamma(c+1) = \int_0^{+\infty} t^c e^{-t}\,dt$$

$$\Gamma(c) = \int_0^{+\infty} t^{c-1}e^{-t}\,dt$$

Wir benutzen part. Int. für $\int_0^1 + \int_0^{\infty}$:

$\int_0^1 t^c e^{-t}\,dt$?

$$\int_y^1 t^c e^{-t}\, dt = -e^{-1} + e^{-y} y^c + \int_y^1 c\, t^{c-1} e^{-t}\, dt$$

$$\begin{cases} g_1' = e^{-t} , & g_1 = -e^{-t} \\ g_2 = t^c , & g_2' = c t^{c-1} \end{cases}$$

$$\int_y^1 t^c e^{-t}\, dt \xrightarrow[y \to 0]{} -e^{-1} + \underbrace{c \int_0^1 t^{c-1} e^{-t}\, dt}_{\text{existiert.}}$$

2. Teil: $\int_1^{+\infty} t^c e^{-t}\, dt$?

$$\int_1^x t^c e^{-t}\, dt = -e^{-x} x^c + e^{-1} + c \int_1^x t^{c-1} e^{-t}\, dt$$

$$\int_1^x t^c e^{-t}\, dt \xrightarrow[x \to \infty]{} 0 + e^{-1} + c \int_1^{\infty} t^{c-1} e^{-t}\, dt$$

$$\rightsquigarrow \int_0^{+\infty} t^c e^{-t}\, dt = -e^{-1} + e^{-1} + c \int_0^{+\infty} t^{c-1} e^{-t}\, dt$$

d.h. $\boxed{\Gamma(c+1) = c\,\Gamma(c)}$

§ 6.6 Fourier-Reihen:

Was sind Fourierreihen?

Anwendungen: Teil von "harmonische Analyse"

↳ Signale (z.B. Lichtsignale, Tonwellen usw.)

in "Komponenten" zerlegen (z.B Sonnenstrahlung in Wellen mit bestimmter Energie zerlegen)

6.6 Fourier-Reihen:

Was sind Fourierreihen?

Anwendungen: Teil von "harmonische Analysis"

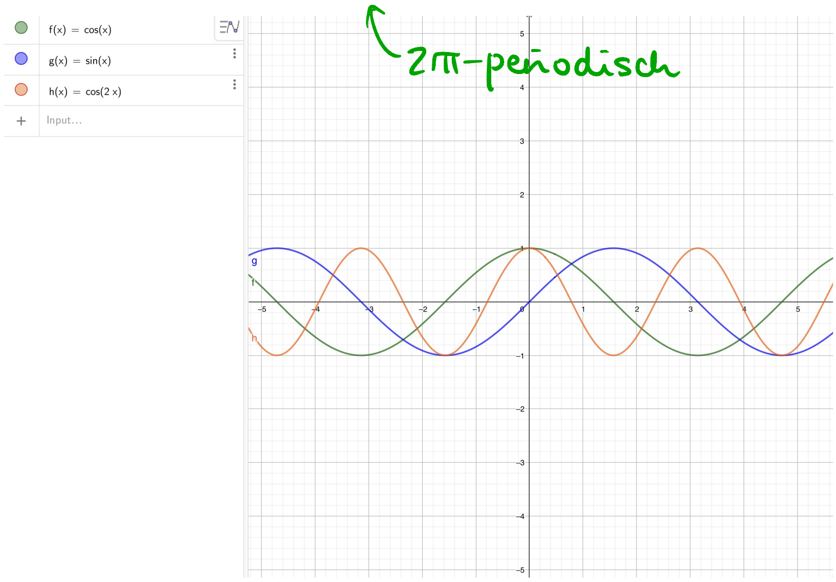
↳ Signale (z.B. Lichtsignale, Tonwellen, ...) in "Komponenten" zerlegen (z.B. Sonnenstrahlung in Wellen mit bestimmten Energien zerlegen)

Fourier-Reihen: periodisches Signal, interpretiert als eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die periodisch ist, z.B. $f(x+2\pi) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$

↳ wir versuchen, solche f als Summe / Reihe von

$\begin{cases} \cos(kx) \\ \sin(kx) \end{cases}$, $k \in \mathbb{N}_0$ darzustellen. d.h.: gibt es Zahlen a_k, b_k

2π-periodisch



mit $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$

für $x \in \mathbb{R}$?

Fourier: 19 Jhr.

"alle periodische f haben eine Fourierreihe Entwicklung"

Fragen: (1) Hat f 2π-periodisch eine solche Entwicklung?

(2) Wenn Ja, wie findet man die Koeffizienten a_k, b_k?
Sind sie eindeutig?

Satz 1: Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, 2π-periodisch, sodass f eine Fourier-Entwicklung hat.

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$ die gleichm. konvergiert auf $\mathbb{R}$ (oder $[0, 2\pi]$).

Dann ist $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, dt$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt)\, dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt)\, dt \qquad (k \in \mathbb{N})$$

blau = Fourier-Koeffizienten

Satz 2: Falls $f \in C^2(\mathbb{R})$ (d.h. 1. & 2. Ableitungen von f existieren und sind stetig auf $\mathbb{R}$)
ist 2π-periodisch

dann ist $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ wo die Konvergenz ist gleichmässig und $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, dt$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt)\, dt, \quad b_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt)\, dt$$

Bem: Satz 2 gilt nicht für alle $f \in C^0(\mathbb{R})$.

Beweis von Satz 1:

Hypothese: $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$

$m \in \mathbb{N}_0$

$$f(x)\cos(mx) = a_0 \cos(mx) + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kx) \cdot \cos(mx) + b_k \sin(kx)\cos(mx))$$

↑ konv. gleichmässig

$$\rightsquigarrow \int_0^{2\pi} f(x)\cos(mx)\, dx = a_0 \int_0^{2\pi} \cos(mx)\, dx + \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(a_k \int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(mx)\, dx \; + \quad (*)$$

$$+ b_k \int_0^{2\pi} \sin(kx) \cdot \cos(mx)\, dx \Big)$$

Eigenschaft der Orthogonalität

$\Rightarrow \sin(x) \cdot \cos(y) = 0$

$$⊛ \begin{cases} 0, & m \neq k \\ \pi, & m = k \end{cases}$$ (Orthogonalität

$$\rightsquigarrow \int_0^{2\pi} f(x) \cos(mx)\, dx = \begin{cases} 2\pi a_0, & m = 0 \\ \pi a_m, & m \geq 1 \end{cases}$$

d.h. $$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(mx)\, dx \qquad m \geq 1$$

Ähnlicherweise:

$(m \in \mathbb{N})$ $$\int_0^{2\pi} f(x) \sin(mx)\, dx = \pi b_m$$ ✓ Q.E.D.

<u>Beweis von Satz 2:</u> $f \in C^2(\mathbb{R})$

<u>Schritt 1:</u> die Reihe

$$a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

<u>konvergiert gleichmässig</u> (auf $\mathbb{R}$)

Dies folgt aus: es gibt $c \geq 0$ mit

$$|a_k| \leq \frac{c}{k^2}, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$|b_k| \leq \frac{c}{k^2}, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\Big(\Rightarrow \sum \underbrace{(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))}_{\leq \frac{2c}{k^2} \text{ für alle } x} \text{ konvergiert normal}\Big)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,dt$$

Partielle Integration: $\pi a_k = \underbrace{\left[f(t)\frac{\sin(kt)}{k}\right]}_{=0 \text{ (periodisch)}} - \int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{k}\sin(kt)\,dt$

(zwei mal)

$$= -\frac{1}{k^2}\int_0^{2\pi} f''(t)\cos(kt)\,dt$$

$$\rightsquigarrow \quad |a_k| \le \frac{1}{\pi k^2}\left|\int_0^{2\pi} f''(t)\cos(kt)\,dt\right| \le \frac{1}{\pi k^2}\int_0^{2\pi}|f''(t)|\,dt$$

d.h. $\le \frac{c}{k^2}$ mit $c = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|f''(t)|\,dt$

Ähnlicherweise für b_k ...

Schritt 2: Wir wissen, dass die Fourier-Reihe gleichm. konvergiert.

$\Rightarrow$ Beweisen, dass die Summe $g(x)$ der Fourier-Reihe ist $f(x)$.

Vorgehensweise: "Es kann nichts anderes sein!"

Warum? Sei $\varphi(x) = f(x) - g(x)$

φ ist stetig; 2π-periodisch

Fourier-Koeffizienten von φ:

$$a_k(\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x)\cos(kx)\,dx = a_k - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\cos(kx)\,dx \overset{\text{(Satz 1)}}{=} a_k - a_k = 0$$

$(k \in \mathbb{N})$

und $b_k(\varphi) = 0$, $a_0(\varphi) = 0$

Situation: φ stetig, alle Fourier Koeff. sind 0

Satz 3: φ muss 0 sein (d.h. $\varphi(x) = 0$ für alle x)

$[\Rightarrow f(x) = g(x)]$

Beweis (Satz 3) Idee: Hyp. $\Rightarrow$

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t) \left[c_0 + \sum_{k=1}^{K} \left(c_k \cos(kt) + d_k \sin(kt) \right) \right) dt = 0$$

für alle c_0, c_k, d_k (Orthogonalität)

Nehmen wir an, dass $\varphi \neq 0$

$\Rightarrow \exists x_0 \in [0, 2\pi]$, $\delta > 0$ mit $|\varphi(x)| > 0$, $|x - x_0| \leq \delta$

(Stetigkeit von φ)

Wir können annehmen: $\varphi(x) > 1$, $|x - x_0| \leq \delta$ (sonst dividieren wir mit $\frac{1}{\varphi(x_0)}$

Sei $k_n(x) = (1 - \cos(\delta) + \cos(x - x_0))^n$, $n \in \mathbb{N}$

① mit Trig. Formel: k_n ist eine endliche Komb. von $\sin(kx)$, $\cos(kx)$

② $\int_0^{2\pi} \varphi(t) k_n(t)\, dt \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$

(<u>Punkt ist:</u> $k_n(x) \geq (1 + \cos(\frac{\delta}{2}) - \cos(\delta))^n > 1$ für $|x - x_0| \leq \frac{\delta}{2}$

Widerspruch!