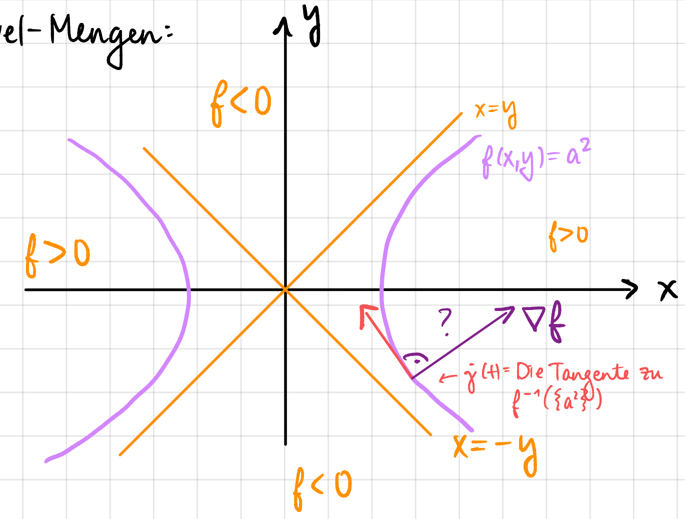
ldewindt@ethz.ch

Level-Mengen:



$$f^{-1}(\{b\}) = \left\{ (x,y),\ \frac{x^2-y^2}{2} = b \right\}$$

Achtung! das heisst nicht, dass die Funktion umkehrbar ist! → Urbild

$b=0$: z.B $f^{-1}(\{0\}) = \{x=y\} \cup \{x=-y\}$

$b = a^2 > 0$

Wir betrachten Kurven: $x^2-y^2 = 2a^2$

$$x = \pm\sqrt{2a^2+y^2}$$

$$\gamma : \underset{\mathbb{R}}{\overset{\cap}{t}} \longmapsto \begin{pmatrix} \sqrt{2a^2+t^2} = x(t) \\ t = y(t) \end{pmatrix}$$

$t \mapsto f\circ\gamma(t)$

$a^2 = f\circ\gamma(t)$

$$\boxed{0 = \frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(t) = df_{(\gamma(t))}\cdot\dot\gamma(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot\gamma \rangle}$$

Kettenregel Version 2

III.4 Wegintegrale (Skript 7.4)

III.4.1 Definition: Ein "Weg" in $\mathbb{R}^n$ ist eine C^1 Vektorfunktion der Form:

$$\gamma : t \in I \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^n \qquad \gamma \text{ ist stetig auf } \mathbb{R}^n$$

$\dot\gamma(t)$ heisst Geschwindigkeit von $\gamma(t)$ an der Stelle t.

III.4.2 Definition: Sei $\gamma : t \in [a,b] \longmapsto \mathbb{R}^n$ ein Weg

Sei $\lambda \in C^0(\mathbb{R}^n, \underbrace{L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})}_{= M_{1,n}(\mathbb{R})})$

λ ist eine stetige 1-Form

reelle Matrizen mit 1 Zeile & n Spalten

Der Ausdruck $\boxed{\int_\gamma \lambda := \int_a^b \lambda\cdot\dot\gamma\, dt = \sum_{i=1}^n \int_a^b \lambda_i(\gamma(t))\frac{d\gamma_i}{dt}\, dt}$ heisst Wegintegral von λ längs γ.

$\boxed{\int_\gamma f(z)\, dz \text{ Komplexe 1-Form}}$

III.4.3 Bemerkungen:

i) Darf man diesen Ausdruck integrieren?

d.h. besitzt $\boxed{\lambda \cdot \dot{\gamma}(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\gamma(t)) \frac{d\gamma_i}{dt}}_{\text{stetige Funktion der Variablen } t}}$ eine Stammfunktion?

$\Rightarrow$ Ja! $\rightarrow$ Beweis Kap. 6

ii) Das Wegintegral $\int_\gamma \lambda$ ist unabhängig von der Parametrisierung, solange die Orientierung der Parametrisierung erhalten bleibt (orientierungserhaltene Umparametrisierung) $\gamma(t)$

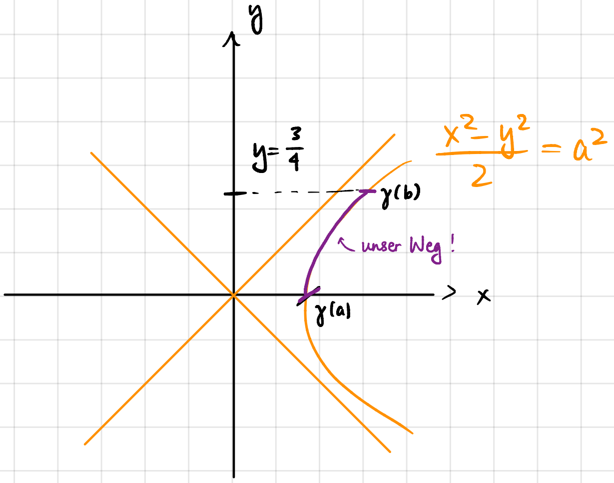
d.h konkret ... Wir gebens uns $t(s)$ sodass $\dot{t}(s) > 0$

$\bar{\gamma}(s) = \gamma \circ t(s)$ $\quad$ $t(c) = a$, $t(d) = b$

↪ wir nehmen den Weg $\bar{\gamma}$ zw. c und d, und nicht mehr zwischen a und b.

d.h $\Rightarrow$ $\boxed{\int_a^b \lambda \cdot \gamma(t)\, dt = \int_c^d \lambda \bar{\gamma}(s)\, ds}$

Bsp:



$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2a^2 + t^2} = \gamma_1(t) \\ t = \gamma_2(t) \end{pmatrix}$$

$a = 0$
$b = 3/4$

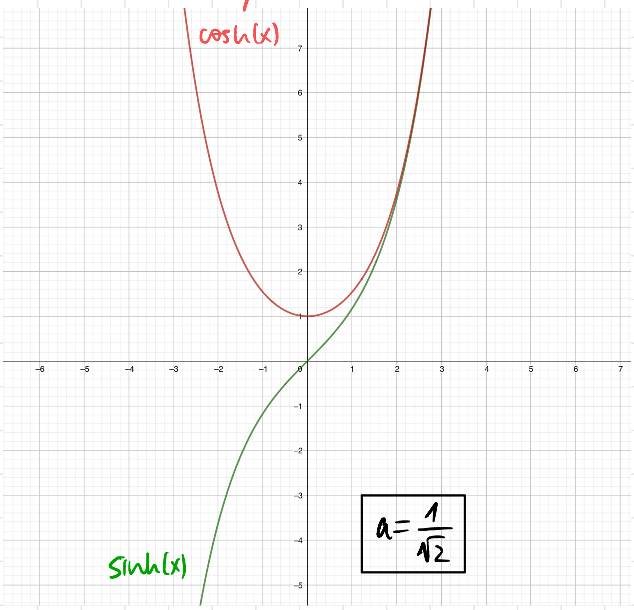
→ Tipp in Prüfungsvorbereitung: alle Serien durchlösen!

Kurze Wiederholung: Kowalski Übung 8.3, 9.3 Analysis I:

$$\boxed{\cosh(s) = \frac{e^s + e^{-s}}{2}} \; ; \; \boxed{\sinh(s) = \frac{e^s - e^{-s}}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cosh^2(s) - \sinh^2(s) = +1}$$

→ immer > 0



Nehme: $\boxed{t(s)} = \sqrt{2}\, a \sinh(s)$

$$\dot{t}(s) = \sqrt{2}\, a \cosh(s) \geq \sqrt{2}\, a$$

Sei $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$t = 0 \quad s = 0$

$t = \frac{3}{4} \quad s = \operatorname{Log} 2$

$$\left(\frac{e^{\operatorname{Log}2} - e^{-\operatorname{Log}2}}{2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4} = \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh(\operatorname{Log} 2) \right)$$

$$\bar{\gamma}(s) = \gamma(t(s)) = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + t^2(s)} \\ t(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(s) \\ \sinh(s) \end{pmatrix}$$

→ Variablenwechsel!

allgemeiner Fall: $$\int_a^b \sum_{i=1}^n \lambda_i(\gamma(t)) \frac{d\gamma_i}{dt}(t)\, dt = \int_c^d \sum_{i=1}^n \lambda_i(\bar{\gamma}(s)) \frac{d\bar{\gamma}_i(s)}{ds}\, ds$$

→ Substitutionsregel (Satz 6.1.5, Kowalski Prop. 6.1.7)

$$\boxed{\int_a^b f(t)\, dt = \int_{t^{-1}(a)}^{t^{-1}(b)} f \circ t(s) \frac{dt}{ds}\, ds}$$

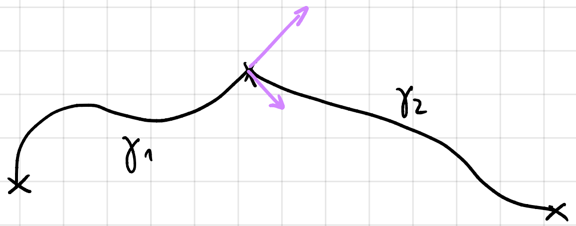
wobei $f(t) := \sum_{i=1}^n \lambda_i(\gamma(t)) \frac{d\gamma_i}{dt}(t)$

$$f(t(s)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(\gamma(t(s))) \frac{d\gamma_i}{dt}(t(s))$$

wir haben genutzt, dass $\frac{d\bar{\gamma}_i}{ds} = \frac{d\gamma_i}{dt}(t(s)) \frac{dt}{ds}$

□

iii) Anhängung von Wegen



$\gamma_1 [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\gamma_2 [b,c] \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\left.\right\} \gamma = \begin{cases} \gamma_1 & [a,b] \\ \gamma_2 & [b,c] \end{cases}$

$\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$

Aber achtung! ↳ stückweise C^1 Wege $\gamma \in C^0([a,c])$

$\gamma \in C^1([a,b]) \cap C^1([b,c])$

$$\boxed{\underbrace{\int_\gamma}_{\text{Integral von } \lambda \text{ über } \gamma} \lambda = \overbrace{\int_{\gamma_1} \lambda + \int_{\gamma_2} \lambda}^{\Sigma \text{ von den stückweisen Integralen über } \gamma}}$$

iv) Was passiert, wenn $\lambda = df$?

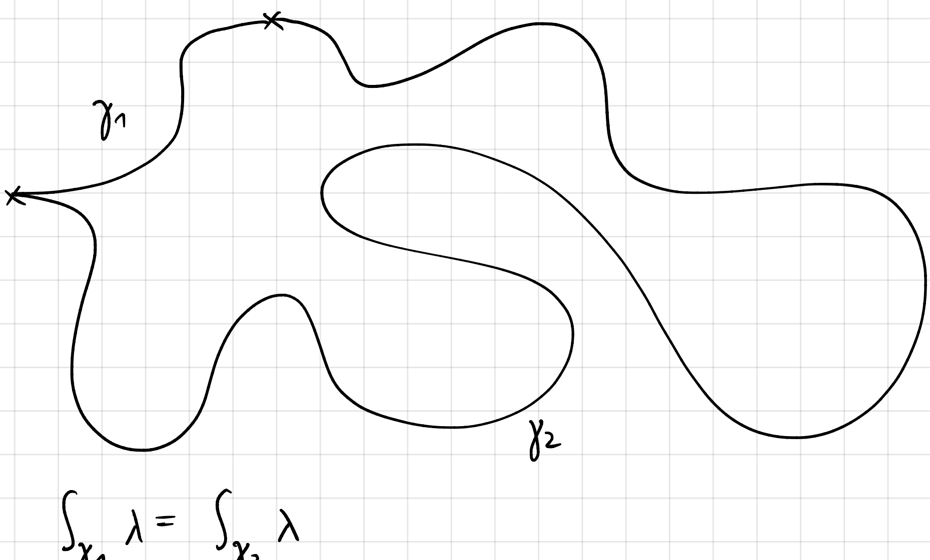
$$\int_\gamma df \overset{\uparrow}{=} \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \frac{d\gamma_i}{dt}\, dt \overset{\nearrow}{=} \int_a^b \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\, dt = \overset{\substack{f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \\ \|}}{}$$

Kettenregel 2. Version (III. 2.3)

Def. Wegintegral, ausser dass $\lambda_i(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$

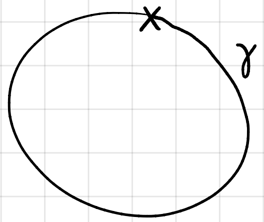
$$\Rightarrow \boxed{\int_\gamma df = f(\text{Endpunkt}) - f(\text{Anfangspunkt})}$$

↳ Das Wegintegral von einem Differential ist nur von den Werten der zugehörigen Funktion an den beiden Enden des Wegs abhängig!



$$\int_{\gamma_1} \lambda = \int_{\gamma_2} \lambda$$

Insbesondere: wenn γ abgeschlossen ist, d.h.



$$\int_\gamma df = 0$$

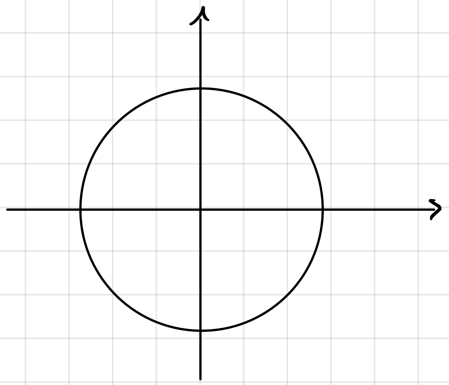
$\rightarrow$ weil Anfangspunkt = Endpunkt!

Differenzialformen von Grad 1

5) Frage: sind alle 1-Formen Differenzial von einer Funktion?

d.h. $\lambda \stackrel{?}{=} df$ $\longrightarrow$ Nein!

Beweis: Bsp: Beweis durch Widerspruch.



$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$a = 0$

$b = 2\pi$

$$\lambda_1 = x\,dx + y\,dy = d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)$$

$$\int_\gamma \lambda_1 = \int_0^{2\pi} \cos t \; dx \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \sin t \; dy \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -\cos t \sin t + \sin t \cos t \; dt = 0 \quad \checkmark$$

$\rightarrow$ Koordinaten umkehren & eine andere Form nehmen ...

Sei $\lambda_2 = -y\,dx + x\,dy$

$$\int_\gamma \lambda_2 = \int_0^{2\pi} 1 = 2\pi \neq 0 \quad \lightning$$

$\hookrightarrow$ wir können λ_2 nicht als Differenzial einer Funktion schreiben!

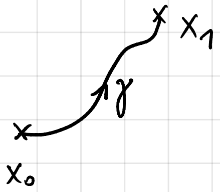
Frage: Wann ist eine 1-Form das Differenzial von einer Funktion?

... folgt gleich. aber zuerst ...

III.4.4 Satz (7.4.1 Skript):

auf $\mathbb{R}^n$: alle C^1-Funktionen mit f s.d. $df = 0$ sind konstante Funktionen

Beweis: $df \equiv 0$ und



$$0 = \int_\gamma df = f(x_1) - f(x_0) \quad \Rightarrow \quad \forall x_1, x_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$f(x_1) = f(x_0) \qquad \square$$

Wir gehen zurück zur ursprünglichen Frage...

III.4.5 Satz (Skript 7.4.2)

Sei $\lambda \in C^0(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})) = C^0(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

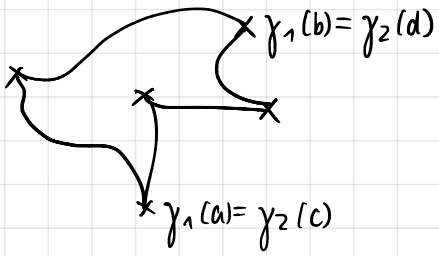
i) $\exists f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\lambda = df$

ii) $\forall \gamma_1, \gamma_2$ stückweise C^1 "piecewise" — Paare von Wegen

$\gamma_1 \in C^1_{PW}([a,b], \mathbb{R}^n)$

$\gamma_2 \in C^1_{PW}([c,d], \mathbb{R}^n)$

mit $\begin{cases} \gamma_1(a) = \gamma_2(c) \\ \gamma_1(b) = \gamma_2(d) \end{cases}$



dann: $\int_{\gamma_1} \lambda = \int_{\gamma_2} \lambda$

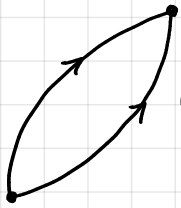
iii) $\forall$ abgeschlossene Wege γ, $\gamma_1 \in C^1_{PW}$ gilt $\int_\gamma \lambda = 0$

γ abgeschlossen

Beweis der Äquivalenz der Aussagen im Satz II.4.5

1) i) $\Leftrightarrow$ ii)

zuerst: i) $\Rightarrow$ ii):



$a = 0 = c$
$b = 1 = d$

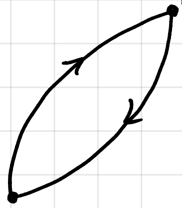
nicht abgeschlossen!

$$\Rightarrow \gamma = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [0,1] \\ \gamma_2(2-t) & t \in [1,2] \end{cases}$$

$\gamma_2(2-t) = \bar{\gamma}_2(t)$

γ bildet ein Weg zw. $[0,2] \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$



$\gamma(0) = \gamma(2)$

ist nun ein abgeschlossener Weg!

$$0 = \int_\gamma df = \int_{\gamma_1} df + \int_{\bar{\gamma}_2} df = f(\gamma_1(1)) - f(\gamma_1(0)) + f(\bar{\gamma}_2(2)) - f(\bar{\gamma}_2(1)) = 0$$

✓ :)