Lina De Windt - ldewindt@ethz.ch

IV.5 Substitutionsregel (Sk. 8.5)

IV.5.1 Erinnerung: n=1:

$f \in C^1(\mathbb{R})$, $g \in C^1([a,b])$

$$\boxed{\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\, dy}$$

Proposition 6.1.7 (Kowalski)
Sk. 6.1.5

Der Fall wo $g'(x) > 0$ auf $[a,b]$

g bildet ein Diffeomorphismus zw. $[a,b]$ und $[g(a), g(b)]$

f und f^{-1} sind C^1 (f^{-1} ist so glatt wie f)

IV.5.2 Wiederholung

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Sei $\phi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$

Die Abbildung ϕ bildet einen Diffeomorphismus, falls:

- $\phi: U \longrightarrow \phi(U)$ ist bijektiv
  offen
- Die Umkehrabbildung ϕ^{-1} ist auch C^1

$\not\Leftarrow$ $\det(d\phi(x)) \neq 0 \quad \forall x \subset U$

falls ϕ einen Diffeom. bildet

Weil: $\phi(\phi^{-1}(x)) = \phi \circ \phi^{-1}(x) = x$

$$d\phi_{(\phi^{-1}(x))} \cdot d\phi^{-1}(x) = I_n = \begin{array}{c} \overset{n}{\longleftrightarrow} \\ \begin{pmatrix} 1 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \Big\updownarrow n$$

Umgekehrt: Sei $\phi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ mit ϕ injektiv ($\Rightarrow \phi$ bijektiv von U nach $\phi(U)$) und $\det d\phi(x) > 0$

$\not\Rightarrow$ ϕ bildet einen Diffeomorphismus

Umkehrsatz

□

Bsp. Diffeomorphismus (Erinnerung daran, dass wir das zusammen besprochen haben.)

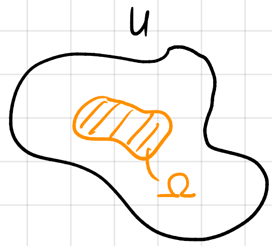
sei $\phi : \underbrace{(0,+\infty)\times(-\pi,\pi)}_{=U} \longmapsto \underbrace{\mathbb{R}^2 - \{(x,0) \text{ mit } x\leq 0\}}_{=\phi(U)}$ ← Polarkoordinaten

$(r,\varphi) \longmapsto (r\cos\varphi \,,\, r\sin\varphi)$

$\Rightarrow$ ϕ bildet einen Diffeo.

IV.5.3 Transformationssatz (Sk. 8.5.1)

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, ϕ C^1 Diffeo zw. U und $V = \phi(U)$.



Sei $\Omega \subset U$ beschränkt (d.h. Ω ist kompakt)

mit $\overline{\Omega} \subset U$, Ω ist Jordan-Messbar.

Dann ist $\phi(\Omega)$ auch Jordan-Messbar. (und $\phi(\Omega)$ ist auch kompakt)

$$\boxed{\mu(\phi(\Omega)) = \int \chi_{\phi(\Omega)}\, d\mu = \int_\Omega |\det(d\phi)|(x)\, d\mu}$$

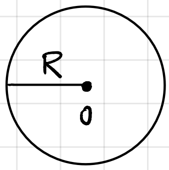
↑ Die Masse

IV.5.4 Beispiel

$B_R(0) = \{(x_1,x_2) \text{ mit } x_1^2 + x_2^2 < R^2\}$

$\cap$
$\mathbb{R}^n$

$B_R(0) - \{(x,0)\,,\, -R < x \leq 0\} = V = \phi(\overbrace{(0,R)\times(-\pi,+\pi)}^{U})$

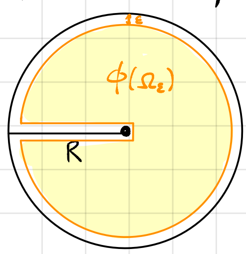


$\mu(V) = \mu(B_R(0))$

$\overset{\varepsilon>0}{\Omega_\varepsilon} = (\varepsilon, R-\varepsilon)\times(-\pi+\varepsilon,\ \pi-\varepsilon)$

$\overline{\Omega}_\varepsilon = [\varepsilon, R-\varepsilon]\times[-\pi+\varepsilon,\ \pi-\varepsilon] \subset U = (0,R)\times(-\pi,\pi)$

$\mu(\phi(\Omega_\varepsilon)) = \int_{\Omega_\varepsilon} r\, d\mu = \int_{-\pi+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{R-\varepsilon} r\, dr\, d\varphi =$



$= 2\pi - 2\varepsilon \left[\frac{r^2}{2}\right]_\varepsilon^{R-\varepsilon} = (\pi-\varepsilon)((R-\varepsilon)^2 - \varepsilon^2)$

$\Rightarrow \mu(\phi(\Omega)) = \underline{\underline{\pi R^2}}$ = Flächeninhalt der Kreisscheibe mit Radius R

IV.5.5 Satz (Substitutionsregel Sk. 8.5.2)

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\phi \subset C^1(U, \mathbb{R}^n)$

ϕ ist ein Diffeo zwischen U und $\phi(U)$

$\Omega \subset U$ sodass $\overline{\Omega} \subset U$ und Ω ist beschränkt und Jordan-Messbar.

Sei $f: \phi(\Omega) \to \mathbb{R}$ beschränkt und R-integrabel.

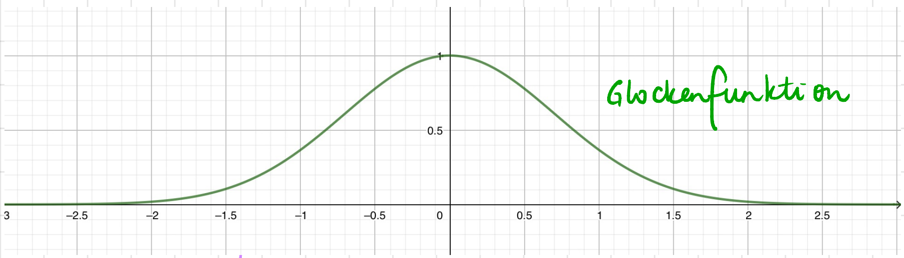
Dann ist die Funktion $f \circ \phi \, |\det d\phi|$ ebenfalls R-integrabel und

es gilt: $\boxed{\int_{\phi(\Omega)} f \, d\mu = \int_{\Omega} f \circ \phi \, |\det d\phi| \, d\mu}$

IV.5.6 Beispiel

Die Ausrechnung von $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}}$

Gauss'sche Verteilung

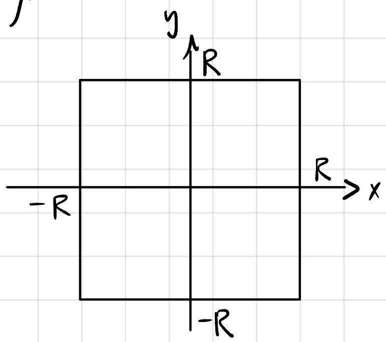


↳ Hauptfunktion in der Wahrscheinlichkeitstheorie!

2 Dimensionen:

$$\int_{Q_R} e^{-|x|^2} d\mu$$

Q_R ..



$|x|^2 = x^2 + y^2$

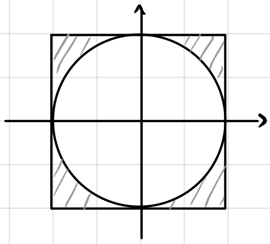
$$\Rightarrow \int_{Q_R} e^{-|x|^2} d\mu \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{-R}^{+R} \left(\int_{-R}^{+R} e^{-x^2 - y^2} dy \right) dx = \int_{-R}^{+R} e^{-x^2} \left(\int_{-R}^{+R} e^{-y^2} dy \right) dx$$

unabhängig von x!

$$= \int_{-R}^{R} e^{-y^2} dy \cdot \int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx \overset{\text{Substitution } y=x}{=} \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx \right)^2 \longrightarrow \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2$$

konvergiert sehr sehr schnell! :)

statt Quadrat:

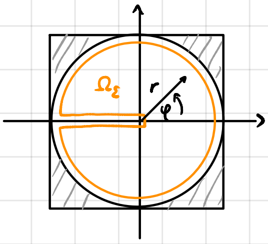


wir nehmen nun die Kugel $B_R(0)$

$$B_R(0) \subset Q_R \qquad \int_{Q_R} e^{-|x|^2}\,d\mu - \int_{B_R(0)} e^{-|x|^2}\,d\mu \leq (2R)^2\, e^{-R^2} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{B_R(0)} e^{-|x|^2}\,d\mu = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \right)^2$$

wie vorher: Ω_ε



$$U \subset \underset{\underset{r}{\Psi}}{(0,R)} \times \underset{\underset{\varphi}{\Psi}}{(-\pi,+\pi)} \supset \Omega_\varepsilon = (\varepsilon, R) \times (-\pi+\varepsilon, \pi-\varepsilon)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\phi(\Omega_\varepsilon)} e^{-|x|^2}\,d\mu = \int_{B_R} e^{-|x|^2}\,d\mu$$

$$\parallel$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega_\varepsilon} e^{-r^2} r\,d\mu = \int_{-\pi+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \left(\int_{\varepsilon}^{R} e^{-r^2} r\,dr \right) d\varphi$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\pi+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_\varepsilon^R d\varphi = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(2\pi-2\varepsilon)}{2} \left(e^{-\varepsilon^2} - e^{-R^2} \right) = \pi \left(1 - e^{-R^2} \right) \xrightarrow[R\to\infty]{} \pi$$

Somit: $\displaystyle\int_{Q_R} e^{-|x|^2}\,d\mu = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \right)^2 = \pi$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi} \qquad \square$$

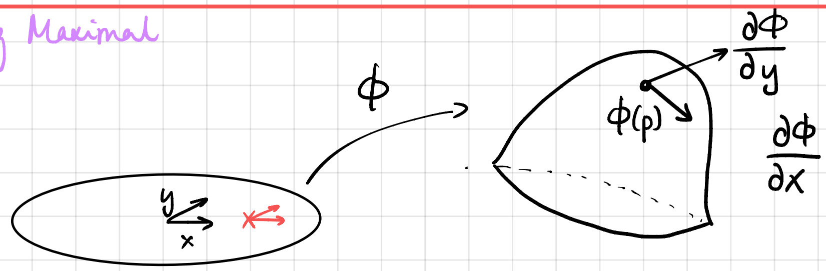
IV.6 Oberflächenmass und Flussintegral

IV.6.1 Definition (Sk. 8.6.1)

$U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $\phi \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ injektiv. ϕ heisst "lokale Immersion"

falls $\underbrace{\text{Rang } d\phi(p) = 2}_{\text{Rang Maximal}} \quad \forall p \in U$

ϕ ist injektiv.



$p = (x,y)$

$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)$

maximaler Rang

$$2 = \text{rang } d\phi \iff \frac{\partial \phi}{\partial x} \times \frac{\partial \phi}{\partial y} \neq 0$$

→ Kreuzprodukt $= 0$ ⇒ Vektoren sind parallel zueinander

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \\ \phi^3 \end{pmatrix} \qquad d\phi(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi^1}{\partial x} & \frac{\partial \phi^1}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi^2}{\partial x} & \frac{\partial \phi^2}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi^3}{\partial x} & \frac{\partial \phi^3}{\partial y} \end{pmatrix}$$

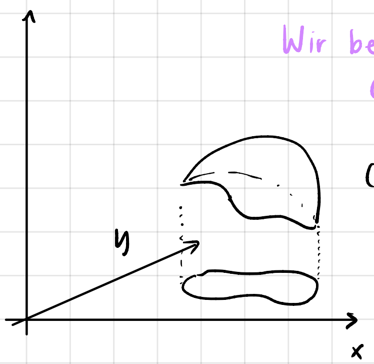
$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \times \frac{\partial \phi}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi^2}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi^2}{\partial y} - \frac{\partial \phi^3}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi^3}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi^3}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi^1}{\partial y} - \frac{\partial \phi^1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi^3}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi^1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi^2}{\partial y} - \frac{\partial \phi^2}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi^1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Sei $\psi \in C^1(U, \mathbb{R})$

$$\phi(x,y) = (x, y, \psi(x,y))$$

$$d\phi(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}(p) & \frac{\partial \psi}{\partial y}(p) \end{pmatrix}$$

Wir betrachten den Graph der Fkt. ϕ



$(x, y, \psi(x,y))$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} \times \frac{\partial\phi}{\partial y} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial\psi}{\partial x} \\ -\frac{\partial\psi}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}$$

← kann <u>nie</u> 0 sein wegen 1 ⇒ Rang ist immer 2

$$\left|\frac{\partial\phi}{\partial x} \times \frac{\partial\phi}{\partial y}\right| = \sqrt{\left|\frac{\partial\phi}{\partial x} \times \frac{\partial\phi}{\partial y}\right|^2} = \sqrt{\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|^2 + 1} = \sqrt{1+|\nabla\psi|^2}$$

wichtig!

IV.6.3 Definition (8.6.2 Sk)

Sei $\phi: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lokale Immersion

Sei Ω beschränkt & Jordan-Messbar, $\bar{\Omega} \subset U$.

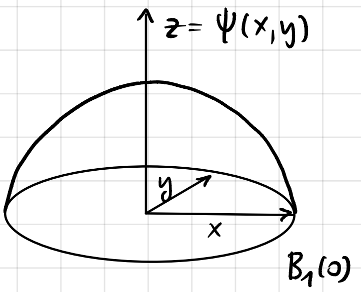
Der 2-Dimensionaler Flächeninhalt von

$\boxed{S = \phi(\Omega)}$ ist $\boxed{\text{Area}(S) = \int_\Omega \left|\frac{\partial\phi}{\partial x} \times \frac{\partial\phi}{\partial y}\right| d\mu}$

IV.6.4 Beispiel

$\psi(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

$U = B_1(0)$



$z = \sqrt{1-x^2-y^2}$

$\iff z \geq 0$

$x^2+y^2+z^2 = 1$

Flächeninhalt der Halbsphäre berechnen -- wir sollten bekommen:

$$\text{Area}(\psi(B_1(0)) = 2\pi$$