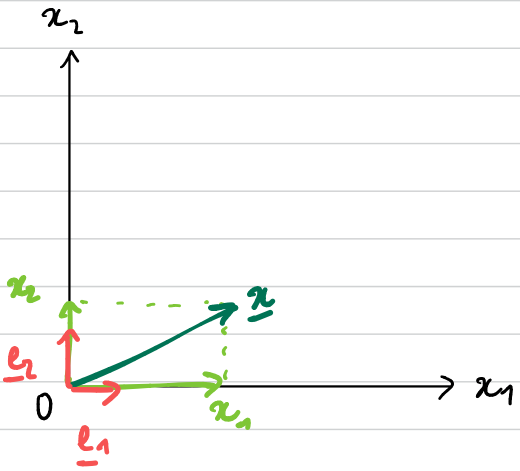
V1

§1. Lineare Gleichungssysteme

18.09.20

§ 1.1 Motivation, Vektoren, Matrizen

Schule:



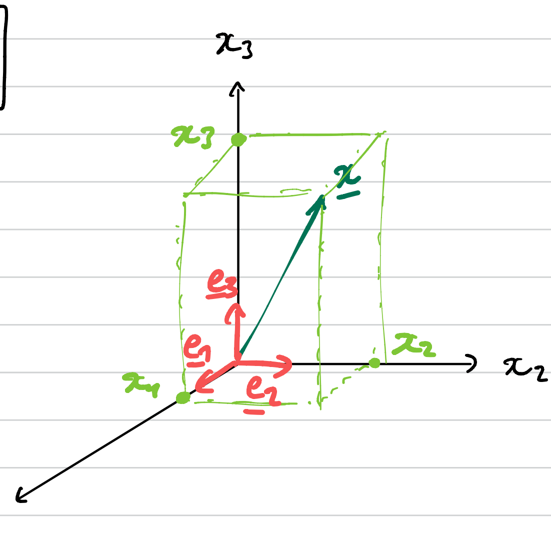
$x \in \mathbb{R}^2 \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{e}_1} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{e}_2} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2$$

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, Skalare

↑ lineare Kombination von $\underline{e}_1, \underline{e}_2$
(in Physik: Überlagerung von Kräften)

$x \in \mathbb{R}^3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$



$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{e}_1} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{e}_2} + x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{e}_3} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3$$

$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, Skalare.

↑ lineare Kombination von $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$.

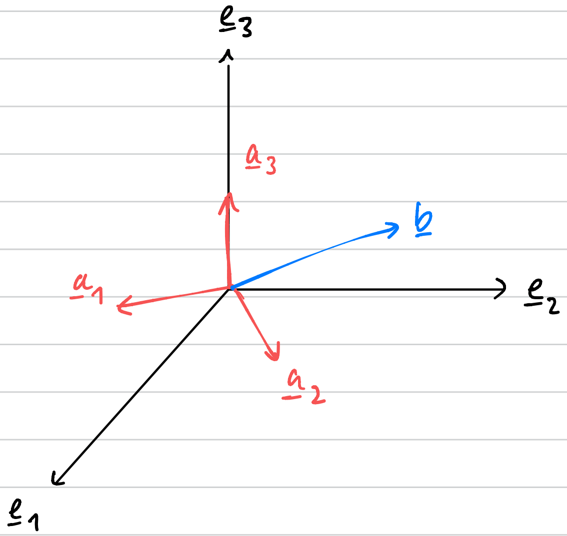
$$\mathbb{R}^n \ni \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + x_3\underline{e}_3 + \ldots + x_n\underline{e}_n$$

Standardbasis in $\mathbb{R}^n$:

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bem: Manchmal sind andere Vektoren als die Standardbasis nützlich.

Bsp: Kräfte mit Richtungen $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ wirken auf einen Punkt.



Gemessen: $\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

als Effekt von Überlagerung von den Kräften $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$.

$$\underline{b} = x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 + x_3\underline{a}_3$$

d.h. $\underline{b}$ ist eine lineare Kombination von $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$.

Aufgabe: Geg: $\underline{b}, \underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$

Ges: $x_1\ x_2\ x_3$ sodass $\underline{b} = x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 + x_3\underline{a}_3$

Bsp: $\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\underline{b} = x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 + x_3\underline{a}_3$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix} \quad \text{oder:} \quad \begin{cases} x_1 = b_1 \\ -x_1 + x_2 = b_2 \\ x_2 + x_3 = b_3 \end{cases} \Rightarrow \text{LGS.}$$

↳ das ist ein LGS mit Unbekannten x_1, x_2, x_3.

Im Allgemeinen:

$$\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \qquad \underline{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} \qquad \underline{a}_3 = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow a_{ij}$: $i =$ Komponente (= Zeile)
$j =$ Vektor (= Spalte)

$$\underline{b} = x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + x_3 \underline{a}_3 = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 a_{11} & x_2 a_{12} & x_3 a_{13} \\ x_1 a_{21} & x_2 a_{22} & x_3 a_{23} \\ x_1 a_{31} & x_2 a_{32} & x_3 a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + x_3 \boxed{a_{13}} = b_1 \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + x_3 \boxed{a_{23}} = b_2 \\ x_1 a_{31} + x_2 a_{32} + x_3 \boxed{a_{33}} = b_3 \end{cases}$$

abgekürzt:
$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \underline{\underline{A}}\, \underline{x} = \underline{b} \, ,$$

wobei $\underline{\underline{A}} = [\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3]$

Eine Matrix ist eine Ansammlung von Spalten (= Vektoren).

$\Rightarrow$ Spalten (= Vektoren) $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ "zusammengeschrieben".

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

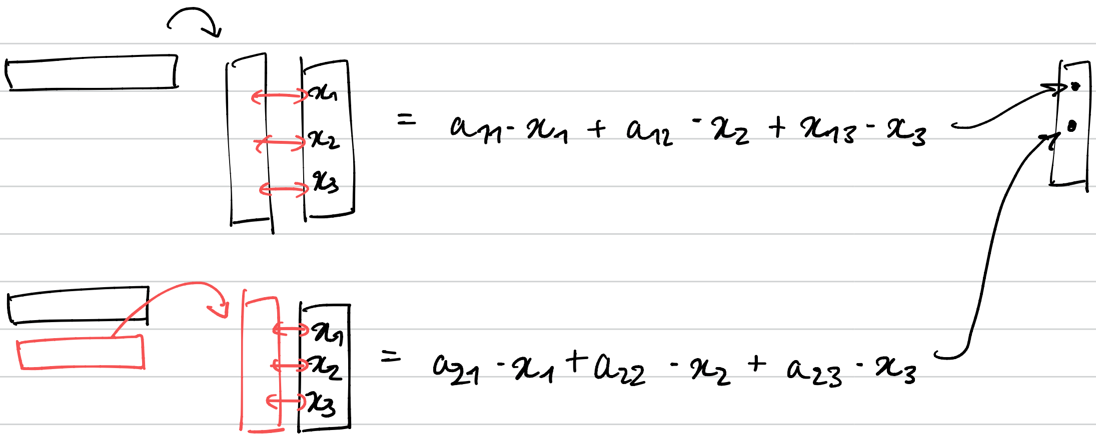
LGS $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ ← Rechte Seite.

↑ Unbekannte

Matrix der Koeffizienten

Bem: Matrix mal Vektor ist die lineare Kombination von Spalten einer Matrix mit Koeffizienten aus dem Vektor.

Bem: zum Rechnen: Matrix mal Vektor:



$$= a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + x_{13} \cdot x_3$$

$$= a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3$$

Bsp: LGS

$$\begin{cases} x_1 = b_1 \\ -x_1 + x_2 = b_2 \\ x_2 + x_3 = b_3 \end{cases} \oplus \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = b_1 \\ 0 \cdot x_1 + x_2 = b_1 + b_2 \\ x_2 + x_3 = b_3 \end{cases} \oplus \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 + b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_1 + b_2 \\ 0 \cdot x_2 + x_3 = -b_1 - b_2 + b_3 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 + b_2 \\ -b_1 - b_2 + b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_1 + b_2 \\ x_3 = -b_1 - b_2 + b_3 \end{cases} \qquad \underline{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{A}}^{-1}$ = Inverse von $\underline{\underline{A}}$.

Bsp: Gemessen $\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ $x_1 = 1$

$x_2 = 1 + 1 = 2$

$x_3 = -1 - 1 + 1 = -1$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{b}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\underline{x}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} &= \underline{b} \\ \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{b} &= \underline{x} \end{aligned}}$$

Frage: gibt es immer eine Lösung?

Nein, aber:

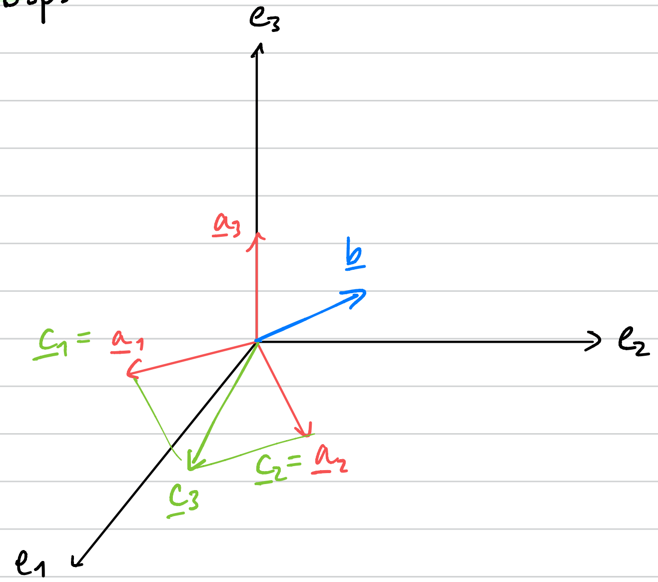
Für diese Matrix $\underline{\underline{A}}$ (im Bsp), ja.

$$\Rightarrow \underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{b} = b_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + b_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + b_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Frage: Existiert immer eine Inverse $\underline{\underline{A}}^{-1}$ für eine Matrix $\underline{\underline{A}}$?

Nein!

Bsp:



$c_1 = \underline{a}_1$

$c_2 = \underline{a}_2$

$c_3 = \underline{a}_1 + \underline{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

↑

lineare Kombination von $\underline{a}_1, \underline{a}_2$

Geometrisch: c_3 liegt auf der Ebene, die von $\underline{a}_1$ und $\underline{a}_2$ aufgespannt ist.

Intuitiv: falls $\underline{b}$ nicht auf dieser Ebene liegt, dann kann man ihn nicht darstellen als lin. Kombination (von $\underline{a}_1$ und $\underline{a}_2$)

falls $\underline{b}$ auf dieser Ebene liegt, dann existieren ∞ viele Arten, ihn als lin. Komb. (von a_1 und a_2) darzustellen.

Ausrechnen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \oplus$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 + b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad | -(-1) \quad \oplus$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 + b_2 \\ -b_1 - b_2 + b_3 \end{bmatrix}$$

⇒ Die letzte Gleichung ist $0 = -b_1 - b_2 + b_3$.

falls $-b_1 - b_2 + b_3 \neq 0$ → keine Lösung.

falls $\underbrace{-b_1 - b_2 + b_3 = 0}_{\text{Ebene (dim 2)}}$ → Kompatibilitätsbedingung erfüllt, ∞ viele Lö.

$2+1=3 \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix}$$

↑ Spalte mit kein Pivot

$x_2 + x_3 = b_1 + b_2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = b_1 + b_2 - x_3$ freie Variable

$x_1 + x_3 = b_1 \qquad\quad x_1 = b_1 - x_3$

↳ da x_3 beliebig ⇒ ∞ viele Lösungen.

Bsp: $\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow -b_1 - b_2 + b_3 = -1 \neq 0$ → keine Lösung.

$\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow -b_1 - b_2 + b_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - x_3 \\ x_2 = 2 - x_3 \\ x_3 = \text{beliebig} \end{cases} \Rightarrow$ Gerade (dim 1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot1 + 2\cdot2 + 3\cdot3 \\ 3\cdot1 + 2\cdot2 + 1\cdot3 \\ -1\cdot1 + 0\cdot2 + 1\cdot3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

§. 1.2 Gauss - Elimination:

LGS:

$$\begin{cases} \textcircled{1}\cdot x_1 + x_2 = 4 & |\cdot(-2)\ \oplus \\ \textcircled{2} x_1 + x_2 - x_3 = \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = -3 \end{cases} \quad \cdot(-1)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 & |\cdot(-3)\ \oplus \\ 0\cdot x_1 + x_2 - x_3 = -7 \\ 3\cdot x_1 - x_2 - x_3 = -3 \end{cases} \quad \cdot(-1)$$

Pivot

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ \textcircled{-} x_2 - x_3 = -7 & |\cdot(-4)\ \oplus \\ 0\cdot x_1 - 4x_2 - x_3 = -15 \end{cases} \quad \cdot(-1)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ -x_2 - x_3 = -7 \\ 0\cdot x_2 + 3x_3 = 13 \end{cases}$$

Protokollmatrix:

$$\underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \textcircled{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \textcircled{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & \textcircled{4} & 1 \end{bmatrix}}_{\text{linke untere Dreiecksform}}$$

linke
untere Dreiecksform

↳ $\underline{\underline{L}}$

In Matrixform $\underline{\underline{A}}\cdot\underline{x} = \underline{b}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} -1 & -1 \\ -4 & -1 \end{matrix}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \boxed{\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ \boxed{\begin{matrix} -7 \\ -15 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

kleineres LGS

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{\text{rechte obere Dreiecksform}} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 13 \end{bmatrix}$$

rechte
obere Dreiecksform

↳ $\underline{\underline{R}}$, $\underline{\underline{U}}$

Gauss-Elimination mit m Gleichungen & n Unbekannten:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ x_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & 1 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ 0\, x_1 + a_{22}'^{\circledast} x_2 + \dots + a_{2n}' x_n = b_2' \\ \circ\!\!\!\!\!\bigcirc a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + \dots + a_{3n} x_n = b_3 \\ \dots \qquad \dots \\ \bigcirc a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases} \quad \left| l_{31} = -\frac{a_{31}}{a_{11}} \right. \quad \oplus \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -l_{21} & 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \; 1 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}' & \dots & a_{2n}' \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

usw.

$\circledast$ $a_{22}' = a_{22} + a_{12} l_{21}$

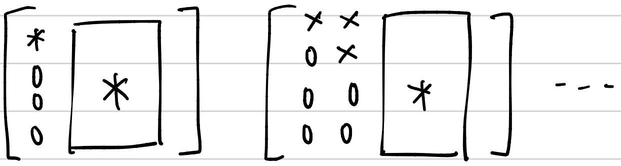
$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ 0 \quad \boxed{a_{22}' x_2 + \dots + a_{2n}' x_n = b_2' \\ 0 \quad a_{32}' x_2 + \dots + a_{3n}' x_n = b_3' \\ \vdots \quad \dots \\ 0 \quad a_{m2}' x_2 + \dots + a_{mn}' x_n = b_m'} \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -l_{21} & 1 & \dots & & 0 \\ -l_{31} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \dots & 0 \\ -l_{m1} & 0 & \dots & & 1 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \boxed{a_{22}'} & \dots & a_{2n}' \\ 0 & a_{32}' & \dots & a_{3n}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{m2}' & \dots & a_{mn}' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \boxed{x_2 \\ \vdots \\ x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \boxed{b_2' \\ b_3' \\ \vdots \\ b_m'} \end{bmatrix}$$

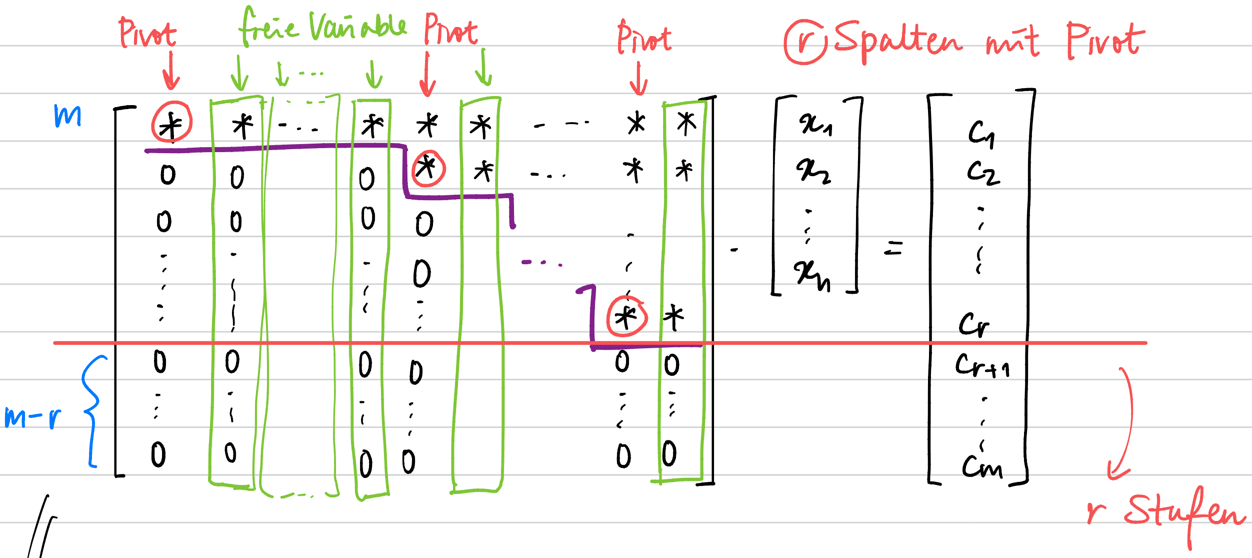
weiter so bis ...

- $\circledast$ falls $a_{11} = 0$, dann vertausche Gleichungen, sodass das "neue" $a_{11} \neq 0$ wird und weiter so.
- $\circledast$ falls alle $a_{ji} = 0$ (d.h. es gibt <u>kein</u> Pivot), dann gehe zur nächsten Spalte
  - ↳ diese Unbekannte ist frei ⇒ freie Variable

Gauss-Elimination:

$\underline{\underline{A}}$ $\quad \underline{\underline{A}}'$ $\quad \underline{\underline{A}}''$





r= Rang der Matrix = Anzahl Pivote ⇒ r Spalten mit Pivot.

n−r freie Variablen

Zeilen-Stufenform

Bem: Damit mind. eine Lösung gibt, muss

$c_{r+1} = \ldots = c_m = 0$ $\qquad$ m−r Kompatibilitätsbedingungen

Bem: $r \le m$; $r \le n$ $\Rightarrow r \le \min\{m,n\}$.

Bem: Gausselimination ⇒ Zeilenstufenform $\underline{\underline{U}}$ $(= \underline{\underline{R}})$

und $\underline{\underline{L}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ * & & 1 \end{bmatrix}$

Man kann zeigen, überprüfen: $\boxed{\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{U}}}$ $(= \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{R}})$

Bem: Die Spalten, die freie Variablen enthalten, sind lineare Kombinationen von Pivotspalten.
Die letzten m−r Zeilen sind lineare Kombinationen der ersten r Zeilen.

Bem: modifizierte Gauss- Elimination:

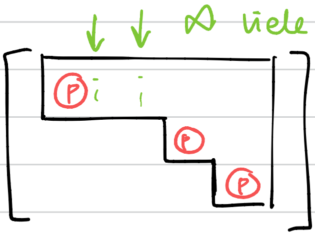
$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{C}} \cdot \overset{\nearrow \text{ reduzierte Stufenform}}{\underline{\underline{R}}}$$

↳ Teil von $\underline{A}$ entsprechend der r Pivotspalten.

Bsp. 1)
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right.$$

2)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$



∞ viele Lösungen.

V2

25.09.20

Bsp:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 3\\ -3 & -1 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}\quad |\cdot(-2)\ \oplus \qquad |\cdot 3\ \oplus$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & b_1\\ 0 & -5 & 5 & -2b_1+b_2\\ 0 & 5 & -5 & 3b_1+b_3\end{array}\right]\quad |\cdot 1\ \oplus$$

↓ freie Variable

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & b_1\\ 0 & -5 & 5 & -2b_1+b_2\\ 0 & 0 & 0 & b_1+b_2+b_3\end{array}\right]\quad r=2$$

Kompatibilitätsbedingung (KB): $b_1+b_2+b_3=0$

⇒ Wenn (KB) erfüllt ist: ∞ viele Lösungen (weil x_3 beliebig)

$$-5x_2+5x_3=-2b_1+b_2 \Rightarrow x_2=x_3+\frac{2}{5}b_1-\frac{1}{5}b_2$$

$$x_1+2x_2-x_3=b_1 \Rightarrow x_1=-2x_2+x_3+b_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1=-2x_3-\frac{4}{5}b_1+\frac{2}{5}b_2+x_3+b_1$$

$$\begin{cases} x_1=-x_3+\frac{1}{5}b_1+\frac{2}{5}b_2\\ x_2=x_3+\frac{2}{5}b_1-\frac{1}{5}b_2\\ x_3 \text{ frei}\end{cases}$$

⊛ Wenn KB nicht erfüllt ist, dann keine Lösung!

Bsp: $m=n=5$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}2 & -1 & 3 & -1 & 1 & -2\\ 2 & -1 & 3 & 0 & -1 & -3\\ -4 & 2 & -4 & 5 & -5 & 3\\ 0 & 0 & -2 & 2 & -7 & -5+s\\ -2 & 1 & -1 & 0 & 4 & 5\end{array}\right]\quad |\cdot(-1)\ \oplus \qquad |\cdot 2\ \oplus \qquad |\cdot 1\ \oplus$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & \enclose{circle}{2} & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & \enclose{circle}{-2} & 2 & -7 & -5+s \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \circlearrowleft \\ |\cdot 1 \quad |\cdot(-1) \\ \swarrow \oplus \quad \swarrow \oplus \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \enclose{circle}{2} & -1 & 3 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \enclose{circle}{2} & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \enclose{circle}{1} & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -10 & -6+s \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 8 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} |\cdot(-5) \quad |\cdot 4 \\ \swarrow \oplus \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \enclose{circle}{2} & -1 & 3 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \enclose{circle}{2} & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \enclose{circle}{1} & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1+s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Rang $r = 3$

↑ x_2 ↑ x_5 $\rightarrow$ freie Variablen

Kompatibilitätsbedingungen: $0 = -1+s \iff s = 1$

$0 = 0$

Falls $s \neq 1$: keine Lösungen

Falls $s = 1$: ∞ viele Lösungen

- $x_5 =$ frei $\Rightarrow$ aus der 3. Gleichung $x_4 = 2x_5 - 1$
- aus 2. Gleichung: $2x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -1$

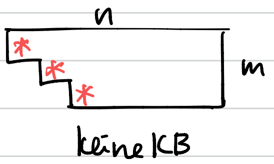
$$x_3 = -\frac{3}{2}x_4 + \frac{3}{2}x_5 - \frac{1}{2} = -3x_5 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}x_5 - \frac{1}{2} = \ldots$$

- $x_2 =$ frei
- aus 1. Gleichung: $2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = -2$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}(x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 - 2) = \ldots$$

Theorem: Wenn es keine KB gibt oder KB erfüllt sind, dann hat ein LGS mindestens eine Lösung.

Fall 1) $r = m \leq n$



Fall 2) $r < n$ $\quad c_{r+1} = c_{r+2} = \dots = c_n = 0$

$\Big\}$ dann gibt es mind. eine Lösung

Theorem: Falls es eine Lösung gibt, dann ist sie eindeutig dann und nur dann wenn $r = n$ (d.h. keine freie Variablen)

Def: Ein LGS heisst homogen falls $\underline{x} = \underline{0}$

$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{0}$ hat immer $\underline{x} = \underline{0}$ Lösung (triviale Lösung)

Bem: Ein homogenes System hat genau dann und nur dann nicht triviale Lösungen ($\underline{x} \neq \underline{0}$) wenn Rang($\underline{\underline{A}}$) $= r < n$ (dann gibt es freie Variablen)

Falls $m = n$:

$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} = \underline{b}$ lösbar für alle $\underline{b}$

$\Updownarrow$

Rang($\underline{\underline{A}}$) $= r = n$

$\Updownarrow$

$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{0} \Rightarrow \underline{x} = \underline{0}$

Falls $m = n$ quadratische Matrix:

entweder	oder
1) Rang($\underline{\underline{A}}$) $= r = n$	1) Rang($\underline{\underline{A}}$) $= r < n$
$\underline{\underline{A}}$ regulär	$\underline{\underline{A}}$ singulär
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
2) für jedes $\underline{b}$ gibt es mind.	2) für gewisse $\underline{b}$ gibt es eine

eine Lösung

$\Updownarrow$

3). für jedes $\underline{b}$ gibt es genau eine Lösung

$\Updownarrow$

4) $\underline{\underline{A}}\underline{x}=\underline{0}$ hat nur $\underline{x}=\underline{0}$ als Lösung.

eindeutige Lösung

$\Updownarrow$

3) für keine $\underline{b}$ gibt es eine eindeutige Lösung

$\Updownarrow$

4) $\underline{\underline{A}}\,\underline{x}=\underline{0}$ hat nicht triviale Lösungen.

§ 1.3 Operationen mit Matrizen

$\underline{b} = \underline{\underline{A}}\underline{x}$ = lineare Kombination von Spalten der Matrix $\underline{\underline{A}}$ mit Koeffizienten aus $\underline{x}$.

$$= x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \dots + x_n \underline{a}_n$$

$$b_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

$\underline{\underline{A}} = [\underline{a}_1 \ \cdots \ \underline{a}_n] = [a_{ij}]$ $\quad i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$

m Zeilen

n Spalten

m×n Matrix $\qquad \underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Transponierte Matrix

$\underline{\underline{A}}^T = [a_{ji}]$ $\quad i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$

Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

$i^2 = -1 \qquad z \in \mathbb{C} \qquad z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$

$\bar{z} = x - iy$

Hermite Transponierte Matrix $\quad \underline{\underline{A}}^H = [\bar{a}_{jk}]$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1+i & 1+3i & 1+5i \\ 1+2i & 1+4i & 1+6i \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^H = \begin{bmatrix} 1-i & 1-2i \\ 1-3i & 1-4i \\ 1-5i & 1-6i \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{A}}$ symmetrisch falls $\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}$

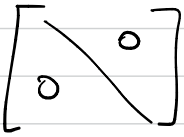
$\underline{\underline{A}}$ antisymmetrisch falls $\underline{\underline{A}}^T = -\underline{\underline{A}}$

$\underline{\underline{A}}$ Hermite symmetrisch falls $\underline{\underline{A}}^H = \underline{\underline{A}}$

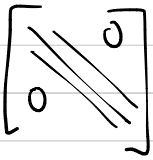
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Einheitsmatrix $m=n$ $\underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$

Diagonalmatrix

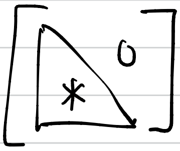


Tridiagonalmatrix



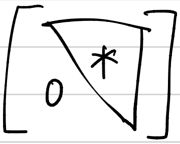
Nullmatrix $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

Untere-/ Obere Dreiecksmatrix :



,

$\underline{\underline{L}}$



$\underline{\underline{U}}, \underline{\underline{R}}$

Vektoren sind auch Matrizen $n \times 1$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n \times 1} \qquad \underline{x} \in \mathbb{C}^n$$

$$\underline{x}^T = [x_1, x_2, \dots, x_n] \qquad \underline{x}^H = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n]$$

$$\underline{x}^1 + \underline{x}^2 = \begin{bmatrix} x_1^1 \\ \vdots \\ x_n^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1^2 \\ \vdots \\ x_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^1 + x_1^2 \\ \vdots \\ x_n^1 + x_n^2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda \cdot \underline{x} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_3 \end{bmatrix} \quad \text{mit Skalar } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lambda \in \mathbb{C}$$

Gegeben: $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$, beide $m \times n$, β ein Skalar:

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} \quad \text{via} \quad C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

$$(\beta \underline{\underline{A}})_{ij} = \beta A_{ij}$$

Bsp: $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ $\quad \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -5 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{0}}$

$$2\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 10 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}} \cdot 2 \; ; \quad \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{0}} = \underline{\underline{0}} + \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}$$

Bem: $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}}$ kommutativ

$\underline{\underline{0}} + \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{0}} = \underline{\underline{A}}$ $\quad \underline{\underline{0}}$ ist neutrales Element für "+"

$\underline{\underline{A}} + (-1) \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{0}}$

$(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) + \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} + (\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}})$ assoziativ

$(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})^T = \underline{\underline{A}}^T + \underline{\underline{B}}^T$, $\quad (\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})^H = \underline{\underline{A}}^H + \underline{\underline{B}}^H$

Bem: Was tun wenn wir mehrere LGS lösen müssen, aber mit derselben Matrix $\underline{\underline{A}}$?

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x}^1 = \underline{b}^1 \qquad \underline{\underline{A}}\,\underline{x}^2 = \underline{b}^2 \qquad (\underline{\underline{A}}^{m \times n})$$

$$\underline{\underline{A}}\,[\underline{x}^1 \; \underline{x}^2] = [b^1 \; b^2]$$

p rechte Seiten:

$$\underset{\substack{\downarrow\\ m\times n}}{\underline{\underline{A}}}\,\underbrace{[x^1\ x^2\ \dots\ x^p]}_{\underline{\underline{X}}\ n\times p} = \underbrace{[b^1\ b^2\ \dots\ b^p]}_{\underline{\underline{B}}\ m\times p}$$

$$\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}}$$

$$\Rightarrow\ m\overset{n}{\begin{bmatrix} \cdots \\ a_{i1}\ \ a_{i2}\ \cdots\ a_{in} \\ \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} x_{1j} \\ \cdots\ \vdots\ \cdots \\ x_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \cdots\ b_{ij}\ \cdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Die i-te Gleichung im j-ten LGS ist: $a_{i1}x_{1j} + a_{i2}x_{2j} + \dots + a_{in}x_{nj} = b_{ij}$

$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_{kj} = b_{ij}$ → Das i-te Element im Ergebnis der Matrixmultiplikation $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}}$

Bem: $\underline{\underline{A}}\ m\times\textcircled{n}$ $\quad\underline{\underline{X}}\ \textcircled{n}\times p \Rightarrow \underline{\underline{B}}\ m\times p$

Bem: $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}$ $n\times n$. Im Allgemeinen: $\boxed{\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}} \neq \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}}$ "$\circ$" nicht kommutativ!

Bem: $\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}}\cdot\underline{\underline{A}}$ $\quad\underline{\underline{I}}$ ist neutrales Element für "$\cdot$"

$\underline{\underline{A}}\ n\times n \quad \underline{\underline{I}}\ n\times n$

Def: $\underline{\underline{A}}^0 = \underline{\underline{I}}$, $\underline{\underline{A}}^1 = \underline{\underline{A}}^0\cdot\underline{\underline{A}}$, $\dots$, $\underline{\underline{A}}^{k+1} = \underline{\underline{A}}^k\,\underline{\underline{A}}$ für $k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$

Bem: $(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})\cdot\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}\cdot(\underline{\underline{B}}\cdot\underline{\underline{C}})$ assoziativ.

$\underline{\underline{A}}\cdot\alpha\cdot\underline{\underline{B}} = \alpha\cdot\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{B}}$

$$\left.\begin{aligned} (\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}})\cdot\underline{\underline{C}} &= \underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{C}} + \underline{\underline{B}}\cdot\underline{\underline{C}} \\ \underline{\underline{A}}\cdot(\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{C}}) &= \underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{C}} \end{aligned}\right\}$$ "$\cdot$" distributiv bzgl. "$+$"

$(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^T = \underline{\underline{B}}^T\underline{\underline{A}}^T \qquad (\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^H = \underline{\underline{B}}^H\underline{\underline{A}}^H$

$(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}})^T = \underline{\underline{C}}^T\underline{\underline{B}}^T\underline{\underline{A}}^T \qquad (\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{B}}\cdot\underline{\underline{C}})^{-1} = \underline{\underline{C}}^{-1}\cdot\underline{\underline{B}}^{-1}\cdot\underline{\underline{A}}^{-1}$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} : \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{B}}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 5 & -5 & 8 & -12 \end{bmatrix}$$

§ 1.4 Inverse einer Matrix: quadratische Matrizen $n \times n$

Def: Die $n \times n$ Matrix $\underline{\underline{X}}$ heisst Inverse der $n \times n$ Matrix $\underline{\underline{A}}$, falls $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{I}}$

Bem: $\underline{\underline{X}} = [\underline{x}_1 \ \underline{x}_2 \ \cdots \ \underline{x}_n]$ Inverse von $\underline{\underline{A}}$:

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{I}} \iff \underline{\underline{A}}\,[\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{ccccc} \| & \| & & & \\ \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \cdots & & \underline{e}_n \end{array}$$

$$\iff \underline{\underline{A}}\,\underline{x}_1 = \underline{e}_1 \ , \ \underline{\underline{A}}\,\underline{x}_2 = \underline{e}_2 \ , \dots , \ \underline{\underline{A}}\,\underline{x}_n = \underline{e}_n$$

$\iff$ $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$ Lösungen von LGS $\underline{\underline{A}}\,\underline{x}_i = \underline{e}_i$ mit $i = 1, 2, \dots, n$

Sei $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ beliebig und betrachte $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Annahme $\underline{\underline{A}}$ hat eine Inverse $\underline{\underline{X}}$

Dann definiere $\underline{x} = \underline{\underline{X}}\,\underline{b} = b_1 \underline{x}_1 + b_2 \underline{x}_2 + \dots + b_n \underline{x}_n$ und rechne

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{\underline{A}}\,(\underline{\underline{X}}\,\underline{b}) = (\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}}) \cdot \underline{b} = \underline{\underline{I}} \cdot \underline{b} = \underline{b}$$

Somit $\underline{x} = \underline{\underline{X}}\,\underline{b}$ ist Lösung von $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ mit $\underline{b}$ beliebig.

$\iff$ Rang$(\underline{\underline{A}}) = n$ $\iff$ nur eine einzige Lösung hat LGS.

Bem: Auch umgekehrt:

Annahme Rang$(\underline{\underline{A}}) = n \Rightarrow n$ LGS.

$\underline{\underline{A}}\,\underline{y}_1 = \underline{e}_1$, $\underline{\underline{A}}\,\underline{y}_2 = \underline{e}_2$, ..., $\underline{\underline{A}}\,\underline{y}_n = \underline{e}_n$ haben eindeutige Lösungen.

$\Rightarrow$ Dann $\underline{\underline{Y}} = [\underline{y}_1 \ \cdots \ \underline{y}_n] \Rightarrow \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{I}}$

Theorem: $\underline{\underline{A}}$ hat eine Inverse $\Leftrightarrow$ Rang $(\underline{\underline{A}}) = n$.
Ausserdem ist die Inverse eindeutig.

Def: Falls $\underline{\underline{A}}$ eine Inverse hat, dann heisst $\underline{\underline{A}}$ invertierbar/regulär.

Notiere: $\underline{\underline{A}}^{-1}$ Inverse von $\underline{\underline{A}}$ $(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{I}})$

Theorem: Seien $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}$ invertierbare Matrizen. Dann gelten:

1) $\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}}$
2) $\underline{\underline{A}}^{-1}$ ist invertierbar und $(\underline{\underline{A}}^{-1})^{-1} = \underline{\underline{A}}$
3) $\underline{\underline{I}}$ ist invertierbar und $\underline{\underline{I}}^{-1} = \underline{\underline{I}}$
4) $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ ist invertierbar und $(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{A}}^{-1}$
5) $\underline{\underline{A}}^T$ ist invertierbar und $(\underline{\underline{A}}^T)^{-1} = (\underline{\underline{A}}^{-1})^T$

Beweis: $\underline{\underline{A}}^{-1}$ ist Inverse von $\underline{\underline{A}}$:

1) $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{I}}$

$$\underline{\underline{A}}\,(\underbrace{\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}}}_{\underline{\underline{D}}}) = (\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1})\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}} \Rightarrow \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{A}} \Leftrightarrow \underline{\underline{A}}\,\underline{d}_1 = \underline{a}_1, \ldots, \underline{\underline{A}}\,\underline{d}_n = \underline{a}_n$$

andererseits $\underline{\underline{A}}\,\underline{e}_1 = \underline{a}_1, \ldots, \underline{\underline{A}}\,\underline{e}_n = \underline{a}_n$

Rang $(\underline{\underline{A}}) = n$ (da $\underline{\underline{A}}$ invertierbar) $\Rightarrow$ LGS mit $\underline{\underline{A}}$ sind eindeutig lösbar ⊛

⊛ $\underline{d}_1 = \underline{e}_1, \ldots, \underline{d}_n = \underline{e}_n$ Somit ist $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{I}} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}}$

2) direkt aus (1): $\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}} \Rightarrow \underline{\underline{A}} = (\underline{\underline{A}}^{-1})^{-1}$

3) klar

4) $(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}})(\underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{A}}^{-1}) = \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}}\underline{\underline{B}}^{-1})\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}\underline{\underline{I}}\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{I}}$

$$\Rightarrow (\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{A}}^{-1}$$

5) $\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{I}}^T = (\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}})^T = \underline{\underline{A}}^T(\underline{\underline{A}}^{-1})^T \Rightarrow (\underline{\underline{A}}^T)^{-1} = (\underline{\underline{A}}^{-1})^T$

Theorem: Sei $\underline{\underline{A}}$ $n \times n$ Matrix. Dann äquivalent:

1) $\underline{\underline{A}}$ invertierbar

2) $\text{Rang}(\underline{\underline{A}}) = n$

3) $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ lösbar für alle $\underline{b}$

4) $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{0}$ hat nur die Lösung $\underline{x} = \underline{0}$

§ 1.5 Ausrechnen der Inverse:

$\Rightarrow$ durch Gauss – Jordan – Verfahren

Geg: $\underline{\underline{A}}$ $n \times n$ invertierbar

Ges: $\underline{\underline{X}}$ $n \times n$ sodass $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{I}}$ (d.h. $\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{A}}^{-1}$)

$$\left[\underline{\underline{A}} \,\middle|\, \underline{\underline{I}}\right] \underset{\text{Elimination}}{\rightsquigarrow} \left[\underline{\underline{I}} \,\middle|\, \underline{\underline{A}}^{-1}\right]$$

Bsp:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{2} & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \left|\, \tfrac{1}{2} \right.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \tfrac{3}{2} & -1 & \tfrac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \left|\, \tfrac{2}{3} \right.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{2} & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\tfrac{3}{2}} & -1 & \tfrac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\tfrac{4}{3}} & \tfrac{1}{3} & \tfrac{2}{3} & 1 \end{array}\right] \left|\, \tfrac{3}{4} \right.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 & 3/4 & 3/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 4/3 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{array}\right] \Big| \cdot \tfrac{2}{3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 3/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 3/2 & 0 & 3/4 & 3/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 4/3 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot 1/2 \\ \cdot 2/3 \\ \cdot 3/4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/2 & 3/4 \end{array}\right] \Rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Bem: Die Pivote waren: $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}$

Produkt der Pivoten: $2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 4$

Def: Der Produkt der Diagonalelemente nach der Gauss-Elimination heisst Determinante der Matrix $\underline{\underline{A}}$.

Bsp:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Elimination} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det \underline{\underline{A}} = 1 \cdot 2 \cdot 0 = \underline{\underline{0}} \Rightarrow \operatorname{Rang}(\underline{\underline{A}}) = 2 < 3 \Leftrightarrow \underline{\underline{A}}$ nicht invertierbar

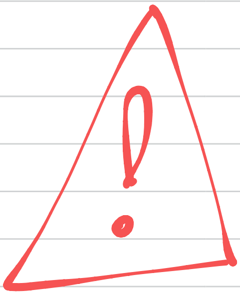
$\det \underline{\underline{A}} \neq 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{A}}$ invertierbar

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot (\underline{\underline{A}}\,\underline{x}) = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{b}$$

$$\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \Big| \quad \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{b}$$

$$\underline{\underline{I}}\,\underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{b}$$

$$\underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{b}$$



§ 1.6. LU-Zerlegung (auch LR-Zerlegung)

Gauss-Elimination für $\underline{\underline{A}} \Rightarrow$

$\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{U}}$: obere Zeilenstufenform 

$\underline{\underline{L}}$: untere Dreiecksmatrix mit 1er auf der Hauptdiagonale (Protokollmatrix)

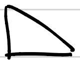
$$\begin{bmatrix}1&&&\\&1&\ddots&0\\-l_{ij}&&1&\\&&&1\end{bmatrix}$$

l_{ij} multipliziert die i-te Zeile um 0 in (ij)-Platz zu erzeugen.

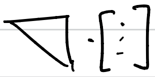
Bem: $\underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{A}}$. falls keine Zeilen vertausche.

Mit Zeilenumtauschungen: $\underline{\underline{P}}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{U}}$ ← Software

$$\underline{\underline{A}}\underline{x} = \underline{b}$$

$\underline{\underline{P}}, \underline{\underline{L}}, \underline{\underline{U}}$ gegeben mit $\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{U}}$ 

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow \underline{\underline{P}}\underline{\underline{A}}\underline{x} = \underline{\underline{P}}\underline{b} \Rightarrow \underline{\underline{L}}\underbrace{\underline{\underline{U}}\underline{x}}_{\underline{y}} = \underline{\underline{P}}\underline{b}$$



$\underline{\underline{P}}\,|$

$\underline{\underline{L}}\underline{y} = \underline{\underline{P}}\underline{b}$ schnell lösen via Vorwärtssubstitution

$\Rightarrow \underline{y}$ berechnet.

$\underline{\underline{U}}\,\underline{x} = \underline{y}$ schnell lösen via Rückwärtssubstitution.

Teuer ist nur die Gauss-Elimination / LU-Zerlegung.

$$\underline{b} = \begin{bmatrix}2\\8\\10\end{bmatrix} \begin{matrix}|-2\\ \swarrow \oplus \\ \end{matrix} \Rightarrow \underline{c} = \begin{bmatrix}2\\4\\10\end{bmatrix}$$ Mit Matrix?

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix};\quad \underline{\underline{E}}\cdot\underline{b} = \begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\8\\10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\4\\10\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{E}}\,\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ -2b_1 + b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \; ; \; \underline{\underline{E}}\,\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -2a_{11}+a_{21} & -2a_{12}+a_{12} & -2a_{13}+a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{E}}_{ij}$ erhält man aus $\underline{\underline{I}}$ mit l_{ij} an der Stelle ij in $\underline{\underline{I}}$.

Der entsprechende Schritt in der Gauss-Elimination ist Multiplikation mit $\underline{\underline{E}}_{ij}$ (elementare Operation)

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow \underline{\underline{E}}_{ij}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{\underline{E}}_{ij}\,\underline{b}$$

$\underline{\underline{E}}_{ij} \,|$

l_{ij} Mult. j-te Gleichung $+$ i-te Gleichung.

Bem:

1) $\underline{\underline{E}}_{ij}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ -l_{ij} & \ddots & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \underline{\underline{E}}_{ij}\,\underline{\underline{E}}_{ij}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ 0 & \ddots & 1 \end{bmatrix}$

$\uparrow \; l_{ij} - l_{ij} = 0$

2) $\underline{\underline{E}}_{ij}\,\underline{\underline{E}}_{kr} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ l_{ij} & 1 & \ddots \\ & l_{kr} & 1 \end{bmatrix}$

3) Gauss-Elimination in Matrix-Sprache:

$$\underline{\underline{E}}_{nn-1} \cdots \underline{\underline{E}}_{31}\,\underline{\underline{E}}_{21} \,|\; \underline{\underline{A}} \Rightarrow \underline{\underline{U}}$$

$$\underline{\underline{E}}_{nn-1} \cdots \underline{\underline{E}}_{21}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{U}} \Rightarrow$$

$\underline{\underline{E}}_{nn-1}^{-1} \,|$

$$\Rightarrow \underline{\underline{E}}_{n-1\,n-2} \cdots \underline{\underline{E}}_{21}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}_{nn-1}^{-1}\,\underline{\underline{U}}$$

$\uparrow$ als $\boxed{-l_{nn-1}}$

$\underline{\underline{E}}_{n-1n-2}^{-1} \,|$

...

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}} = \underbrace{\underline{\underline{E}}_{21}^{-1}\,\underline{\underline{E}}_{31}^{-1} \cdots \underline{\underline{E}}_{nn-1}^{-1}}_{\underline{\underline{L}} = \text{Protokollmatrix}}\,\underline{\underline{U}}$$

Bsp: LU-Zerlegung mit Permutationen:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} ; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 19 \\ 20 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$$

Bem: Vertausche 2 Zeilen indem man mit Permutationsmatrix multipliziert:

$$\underline{\underline{P}}_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ aus $\underline{\underline{I}}$ tausche 1, 3 Zeile.

$$\underline{\underline{P}}_{13}\,\underline{\underline{P}}_{13} = \underline{\underline{I}} \,; \quad \underline{\underline{P}}^{-1} = \underline{\underline{P}}^{T}$$

$\underline{\underline{P}}_{13}\,\underline{\underline{B}}$ vertauscht die Zeilen 1, 3 in $\underline{\underline{B}}$

$\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{P}}_{13}$ vertauscht die Spalten 1, 3 in $\underline{\underline{B}}$.

Bsp:

$$\underline{\underline{P}}_{13}\,\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \; 1-2 \quad ; \; \underline{\underline{E}}_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{E}}_{21}\,\underline{\underline{P}}_{13}\,\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

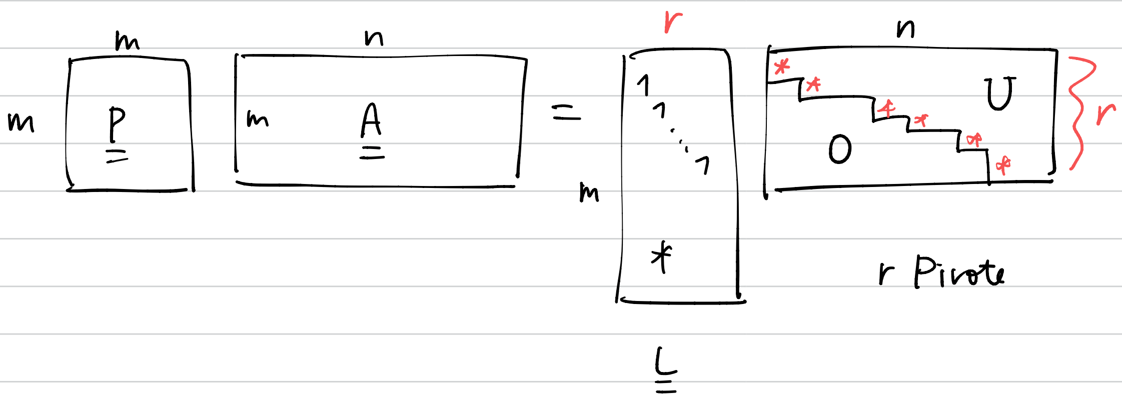
$$\underline{\underline{P}}_{23}\,\underline{\underline{E}}_{21}\,\underline{\underline{P}}_{13}\,\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} = \underline{\underline{U}} \quad \Rightarrow \underline{\underline{P}}_{23}\,\underline{\underline{E}}_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{P}}_{23}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P}}_{23}\,\underline{\underline{E}}_{21} = \underline{\underline{E}}_{31}\,\underline{\underline{P}}_{23}$$

$$\underline{\underline{E}}_{31}\,\underline{\underline{P}}_{23}\,\underline{\underline{P}}_{13}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{U}} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{A}} = \underset{\underset{\underline{\underline{L}}}{\shortparallel}}{\underline{\underline{E}}_{31}^{-1}}\,\underline{\underline{U}} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Bem: Im allgemeinen gibt die Gauss-Elimination für eine m×n-Matrix $\underline{\underline{A}}$ von Rang $r < m$:



Bem: Man kann die Elimination auch nur blockweise durchführen:

$$\left[\begin{array}{c|c} \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{0}} \\ \hline -\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} & \underline{\underline{I}} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \hline \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{D}} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \underline{\underline{I}}\cdot\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{0}}\cdot\underline{\underline{C}} & \underline{\underline{I}}\cdot\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{0}}\cdot\underline{\underline{D}} \\ \hline -\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{I}}\,\underline{\underline{C}} & -\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{I}}\,\underline{\underline{D}} \end{array}\right]$$

$$-\underline{\underline{C}}\cdot\underline{\underline{I}}+\underline{\underline{I}}\cdot\underline{\underline{C}}$$

$$-\underline{\underline{C}}+\underline{\underline{C}}=0$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \hline \underline{\underline{0}} & \underbrace{\underline{\underline{D}}-\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{B}}}_{\text{Schur Komplement}} \end{array}\right]$$

Bem: Sei $\underline{\underline{A}}$ $n \times n$ Matrix, $\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{U}}$

$$\underline{\underline{L}} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ * & & \ddots \; 1 \end{bmatrix} ; \quad \underline{\underline{U}} = \underbrace{\begin{bmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{D}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \frac{u_{12}}{d_1} & \frac{u_{13}}{d_1} & \frac{u_{14}}{d_1} \\ & 1 & \frac{u_{23}}{d_2} & \cdots \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\tilde{U}}}}$$

$\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{U}}=\underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{U}}$ LDU-Zerlegung

$\underline{\underline{A}}^T=\underline{\underline{\tilde{U}}}^T\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{L}}^T$

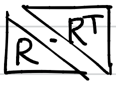
Falls $\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{A}}^T$ ($\underline{\underline{A}}$ symmetrisch) $\Rightarrow$ $\underline{\underline{L}}^T=\underline{\underline{\tilde{U}}}$, $(\underline{\underline{\tilde{U}}}^T=\underline{\underline{L}})$

$\underline{\underline{A}}$ symmetrisch $\Rightarrow$ $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{L}}^T$

Annahme: $\underline{\underline{A}}$ symmetrisch und $d_1, d_2, \dots, d_n > 0$

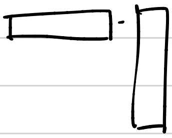
$$\underline{\underline{D}} = \sqrt{\underline{\underline{D}}}\sqrt{\underline{\underline{D}}} \quad \text{wobei } \sqrt{\underline{\underline{D}}} = \begin{bmatrix} \sqrt{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{d_n} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{L}}^T = \underbrace{\underline{\underline{L}}\sqrt{\underline{\underline{D}}}}_{\underline{\underline{R}}}\sqrt{\underline{\underline{D}}}\,\underline{\underline{L}}^T = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{R}}^T$$



$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{R}}^T$ Cholesky-Zerlegung

Bem: $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$: $\underline{x}^T\underline{y} =$

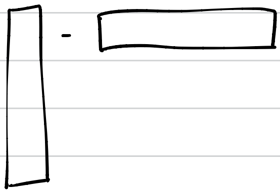


$= x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \in \mathbb{R}$

Skalarprodukt von $\underline{x}$ und $\underline{y}$.

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n \quad \underline{y} \in \mathbb{R}^m$

$\underline{x} \cdot \underline{y}^T =$



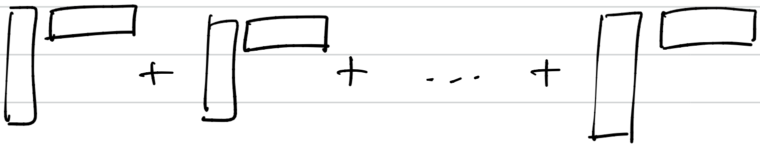
$$= \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_m \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_m \\ \vdots & & & \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

↳ Rang 1

Block-Multiplikation

Bem $$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}} = [\underline{a}_1 \; \underline{a}_2 \; \cdots \; \underline{a}_n] \begin{bmatrix} — \; \underline{x}_1^* \; — \\ — \; \underline{x}_2^* \; — \\ \cdots \\ — \; \underline{x}_n^* \; — \end{bmatrix} = \underline{a}_1\underline{x}_1^* + \underline{a}_2\underline{x}_2^* + \dots + \underline{a}_n\underline{x}_n^*$$

= Summe von Rang 1 Matrizen



Bem: Somit ist die LU-Zerlegung eine Summe von Rang 1 Matrizen.

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{U}} = \begin{bmatrix} \underline{l}_1 & \underline{l}_2 & \cdots & \underline{l}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ \vdots \\ u_r^* \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} = \underline{l}_1 \underline{u}_1^* + \underline{l}_2 \underline{u}_2^* + \ldots + \underline{l}_r \underline{u}_r^*$$

Bem: Man kann LU-Zerlegung auch so einführen:

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}, \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}}, \quad l_{41} = \frac{a_{41}}{a_{11}}$$

$$\underline{\underline{A}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \underline{l}_1}}{\begin{bmatrix} 1 \text{ mal Zeile } 1 \\ l_{21} \text{ mal Zeile } 1 \\ l_{31} \text{ mal Zeile } 1 \\ l_{41} \text{ mal Zeile } 1 \end{bmatrix}} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \;\; 0 \;\; 0 \\ 0 & \\ 0 & \boxed{\underline{\underline{A}}_2} \\ 0 & \end{bmatrix} = \underline{l}_1 \underline{u}_1^* + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \text{ mal Zeile } 2 \\ 1 \text{ mal Zeile } 2 \\ l_{32} \text{ mal Zeile } 2 \\ l_{42} \text{ mal Zeile } 2 \end{bmatrix}}_{\underline{l}_2 \cdot \underline{u}_2^*} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\boxed{\underline{\underline{A}}_3}} \\ 0 & 0 & & \end{bmatrix}$$

und so weiter

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}} = \underline{l}_1 \underline{u}_1^* + \underline{l}_2 \underline{u}_2^* + \ldots + \underline{l}_r \underline{u}_r^*$$

V3

02.10.20

§ 1.3 Inverse einer Matrix: quadratische Matrizen $n \times n$

Def: Die $n\times n$ Matrix $\underline{\underline{X}}$ heisst inverse der $n \times n$ Matrix $\underline{\underline{A}}$, falls $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{I}}$

Bem: $\underline{\underline{X}} = [\, \underline{x}_1 \;\; \underline{x}_2 \; \dots \; \underline{x}_n \,]$ inverse von $\underline{\underline{A}}$:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{I}} \Leftrightarrow \underline{\underline{A}}\, [\underline{x}_1 \;\; \underline{x}_2 \; \dots \; \underline{x}_n] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{e}_1 \; \underline{e}_2 \; \dots \; \underline{e}_n}$$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{A}}\,\underline{x}_1 = \underline{e}_1, \; \underline{\underline{A}}\,\underline{x}_2 = \underline{e}_2, \; \dots, \; \underline{\underline{A}}\,\underline{x}_n = \underline{e}_n$

$\Leftrightarrow \underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$ Lösungen von LGS $\underline{\underline{A}}\,\underline{x}_i = \underline{e}_i$ mit $i = 1, \dots, n$

Sei $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ beliebig und betrachte $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

__Annahme__ $\underline{\underline{A}}$ hat eine Inverse $\underline{\underline{X}}$

Dann definiere $\underline{x} = \underline{\underline{X}}\,\underline{b} = b_1 \underline{x}_1 + b_2 \underline{x}_2 + \dots + b_n \underline{x}_n$ und rechne
$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{\underline{A}}\,(\underline{\underline{X}}\,\underline{b}) = (\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}})\underline{b} = \underline{\underline{I}} \cdot \underline{b} = \underline{b}$

Somit $\underline{x} = \underline{\underline{X}} \cdot \underline{b}$ ist Lösung von $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ mit $\underline{b}$ beliebig.

$\Leftrightarrow$ Rang$(\underline{\underline{A}}) = n \Leftrightarrow$ nur eine einzige Lösung des LGS.

Bem: Auch umgekehrt:
Annahme Rang$(\underline{\underline{A}}) = n \rightarrow n$ LGS
$\underline{\underline{A}}\,\underline{y}_1 = \underline{e}_1, \; \underline{\underline{A}}\,\underline{y}_2 = \underline{e}_2, \; \dots, \; \underline{\underline{A}}\,\underline{y}_n = \underline{e}_n$ haben eindeutige Lösungen

$\Rightarrow$ Dann $\underline{\underline{y}} = [\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n] \Rightarrow \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{y}} = \underline{\underline{I}}$

Theorem: $\underline{\underline{A}}$ hat eine Inverse $\Leftrightarrow$ Rang$(\underline{\underline{A}}) = n$.

Ausserdem ist die Inverse eindeutig.

Def: Falls $\underline{\underline{A}}$ eine Inverse hat, dann heisst $\underline{\underline{A}}$ invertierbar / regulär.

Notiere: $\underline{\underline{A}}^{-1}$ Inverse von $\underline{\underline{A}}$ $\quad (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{I}})$

Theorem: Seien $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}$ invertierbare Matrizen. Dann:

(1) $\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}}$

(2) $\underline{\underline{A}}^{-1}$ ist invertierbar und $(\underline{\underline{A}}^{-1})^{-1} = \underline{\underline{A}}$

(3) $\underline{\underline{I}}$ ist invertierbar und $\underline{\underline{I}}^{-1} = \underline{\underline{I}}$

(4) $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ ist invertierbar und $(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1}$

(5) $\underline{\underline{A}}^{T}$ ist invertierbar und $(\underline{\underline{A}}^{T})^{-1} = (\underline{\underline{A}}^{-1})^{T}$

Beweis: A^{-1} ist Inverse von $\underline{\underline{A}}$: $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{I}}$

$$\underline{\underline{A}}\underbrace{(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1})}_{\underline{\underline{D}}} = (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1}) \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}} \Rightarrow$$

⊛ $\Rightarrow \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{A}} \Leftrightarrow \underline{\underline{A}}\,\underline{d}_1 = \underline{a}_1, \ldots, \underline{\underline{A}}\,\underline{d}_n = \underline{a}_n$

andererseits: $\underline{\underline{A}}\,\underline{e}_1 = \underline{a}_1, \ldots, \underline{\underline{A}}\,\underline{e}_n = \underline{e}_n$

Rang $(\underline{\underline{A}}) = n$ (da $\underline{\underline{A}}$ invertierbar) $\Rightarrow$ LGS mit $\underline{\underline{A}}$ sind eindeutig lösbar.

⊛ $\Rightarrow \underline{d}_1 = \underline{e}_1, \ldots, \underline{d}_n = \underline{e}_n$. Somit ist $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{I}} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}}$.

(2). direkt aus (1): $\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}} \Rightarrow \underline{\underline{A}} = (\underline{\underline{A}}^{-1})^{-1}$

(3). klar

(4). $(AB)(\underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{A}}^{-1}) = \underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{B}}^{-1})\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{I}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{I}} \Rightarrow (\underline{\underline{AB}})^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{A}}^{-1}$

(5). $\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{I}}^{-1} = (\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}})^{T} = \underline{\underline{A}}^{T}(\underline{\underline{A}}^{-1})^{T} \Rightarrow (\underline{\underline{A}}^{T})^{-1} = (\underline{\underline{A}}^{-1})^{T}$

Theorem: Sei $\underline{\underline{A}}$ $n \times n$ Matrix. Dann äquivalent:

(1) $\underline{\underline{A}}$ invertierbar

(2) Rang $(\underline{\underline{A}}) = n$

(3) $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ lösbar für alle $\underline{b}$

(4) $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{0}$ hat nur die Lösung $\underline{x} = \underline{0}$.

§ 1.4 Ausrechnen der Inverse

→ Gauss-Jordan Verfahren

Geg: $\underline{\underline{A}}$ nxn invertierbar

Ges: $\underline{\underline{X}}$ nxn sodass $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{I}}$

$$\left[\underline{\underline{A}} \,\middle|\, \underline{\underline{I}}\right] \xrightarrow[\text{Elimination}]{} \left[\underline{\underline{I}} \,\middle|\, \underline{\underline{A}}^{-1}\right]$$

Bsp:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \; \Big| \cdot \frac{1}{2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \; \Big| \cdot \frac{2}{3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \boxed{-1} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\frac{4}{3}} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right] \; \Big| \cdot \frac{3}{4}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & \boxed{-1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\frac{3}{2}} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right] \; \Big| \cdot \frac{2}{3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{2} \\ \cdot 2 \\ \cdot \frac{3}{4} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{array}\right] \Rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} & 3 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{matrix}}_{\underline{\underline{A}}^{-1}}$$

Bem: Die Pivote waren: $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}$

Produkt der Pivoten: $2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = \textcircled{4}$

Def: Der Produkt der Diagonalelemente nach der Gauss-Elimination heisst Determinante der Matrix $\underline{\underline{A}}$.

Bsp:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Elimination} \Rightarrow \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 2 & 3 \\ 0 & \textcircled{2} & 3 \\ 0 & 0 & \textcircled{0} \end{bmatrix} \quad \det \underline{\underline{A}} = 1 \cdot 2 \cdot 0 = 0$$

↳ $\text{Rang}(\underline{\underline{A}}) = 2 < 3$

$\Leftrightarrow$ $\underline{\underline{A}}$ ist nicht invertierbar

$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{A}}$ invertierbar.

⇒ Det. ist wichtig weil wir dann sofort wissen, ob eine Matrix invertierbar ist oder nicht.

⚠ Man kann nicht durch einen Vektor / eine Matrix teilen!
→ das gibt es nicht. ↯

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1}(\underline{\underline{A}}\,\underline{x}) = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{b}$$

$$\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot | \qquad (\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}})\,\underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{b}$$

$$\underline{\underline{I}} \cdot \underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{b}$$

$$\underline{x} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{b}$$

Man kann nur durch eine Matrix multiplizieren.

In der Praxis = rechnet man eig. nie mit der Inverse (aufwendig, nicht effizient).

⇒ deswegen: nächster Kap.

§ 1.5. LU - Zerlegung

Gauss-Elimination für $\underline{\underline{A}} \Rightarrow \underline{\underline{U}}$ obere Zeilenstufenform

$\underline{\underline{L}}$ untere Dreiecksmatrix mit 1er auf der Hauptdiagonale (Protokollmatrix)

$$\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ -l_{ij} & & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

l_{ij} multipliziert die i-te Zeile um 0 in (ij)-Platz zu erzeugen.

Bem: $\underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{A}}$ falls keine Zeilen vertauscht.

Mit Zeilenvertauschungen: $\underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{U}}$ ← Software

$\underline{\underline{A}}\underline{x} = \underline{b}$ effizient lösen:

$\underline{\underline{P}}, \underline{\underline{L}}, \underline{\underline{U}}$ geg. (durch Software) mit $\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{U}}$

$$\underline{\underline{A}}\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{A}}\underline{x} = \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{U}} \Rightarrow \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{U}}\underline{x} = \underline{\underline{P}}\,\underline{b}$$

$\underline{\underline{L}}y = \underline{\underline{P}}\underline{b}$ schnell lösen via Vorwärtssubstitution
⇒ y berechnet.

◹

$\underline{\underline{U}}\underline{x} = y$ schnell lösen via Rückwärtssubstitution

Teuer ist: nur die Gauss-Elimination / LU-Zerlegung.

$$\underline{b} \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} |-2 \\ \curvearrowleft + \\ \ \end{matrix} \Rightarrow \underline{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Mit Matrix?

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \underline{\underline{E}} \cdot \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{E}} \cdot \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ -2b_1 + b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}; \quad \underline{\underline{E}}\,\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -2a_{11} + a_{21} & -2a_{12} + a_{12} & -2a_{13} + a_{12} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{E}}_{ij}$ erhält man aus $\underline{\underline{I}}$ mit l_{ij} an der Stelle ij in $\underline{\underline{I}}$.

Der entsprechende Schritt in der Gauss-Elimination ist Multiplikation mit $\underline{\underline{E}}_{ij}$ (Elementare Operation)

$$\underline{\underline{A}}\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow \underline{\underline{E}}_{ij}\underline{\underline{A}}\underline{x} = \underline{\underline{E}}_{ij} \cdot \underline{b}$$

$\cdot \underline{\underline{E}}_{ij}$ |

l_{ij} mult. j-te Gleichung + i-te Gleichung.
(↳ multipliziert)

Bem: 1) $\underline{\underline{E}}_{ij}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ -l_{ij} & & 1 & \\ & & & \ddots \; 1 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $E_{ij} E_{ij}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$

$l_{ij} - l_{ij} = 0$

2) $\underline{\underline{E}}_{ij} \cdot \underline{\underline{E}}_{ar} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ l_{ij} & \ddots & \\ & l_{ar} & 1 \end{bmatrix}$

3) Gauss-Elimination in Matrix-Sprache:

$$\underline{\underline{E}}_{n\,n-1} \cdots \underline{\underline{E}}_{31} \underline{\underline{E}}_{21} \;\Big|\; \underline{\underline{A}} \Rightarrow \underline{\underline{U}}$$

in $\underline{\underline{I}}$

$$\underline{\underline{E}}_{nn-1} \cdots \underline{\underline{E}}_{21} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{U}}$$

$$\cdot \underline{\underline{E}}_{nn-1}^{-1} \;\Big|$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{E}}_{n-1\,n-2} \cdots \underline{\underline{E}}_{21} \underline{\underline{A}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{als } \boxed{-l_{nn-1}}}}{\underline{\underline{E}}_{nn-1}^{-1}} \underline{\underline{U}}$$

$$\cdot \underline{\underline{E}}_{n-1\,n-2}^{-1} \;\Big|$$

$$\cdots$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}} = \underbrace{\underline{\underline{E}}_{21}^{-1} \underline{\underline{E}}_{31}^{-1} \cdots \underline{\underline{E}}_{nn-1}^{-1}}_{} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{U}}$$

$\underline{\underline{L}}$ = Protokollmatrix

Bsp: LU-Zerlegung mit Permutation

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} ; \underline{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 19 \\ 20 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{A}}\, \underline{x} = \underline{b}$$

Bem: Vertausche 2 Zeilen indem man mit einer Permutationsmatrix multipliziert.

$$\underline{\underline{P}}_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ aus $\underline{\underline{I}}$ tausche 1. & 3. Zeile

$$\underline{\underline{P}}_{13} \underline{\underline{P}}_{13} = \underline{\underline{I}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sodass}}}{;} \underline{\underline{P}}^{-1} = \underline{\underline{P}}^{T}$$

$\underline{\underline{P}}_{13} \underline{\underline{B}}$ vertauscht die Zeilen 1,3 in $\underline{\underline{B}}$

$\underline{\underline{B}}\, \underline{\underline{P}}_{13}$ vertauscht die Spalten 1,3 in $\underline{\underline{B}}$

$$\underline{\underline{P}}_{13}\,\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \big| -2 \\ \\ \end{matrix} \quad ; \quad \underline{\underline{E}}_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{E}}_{21}\,\underline{\underline{P}}_{13}\,\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{E}}_{23}\,\underline{\underline{E}}_{21}\,\underline{\underline{P}}_{13}\,\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} = U \qquad \Rightarrow$$

einsetzen

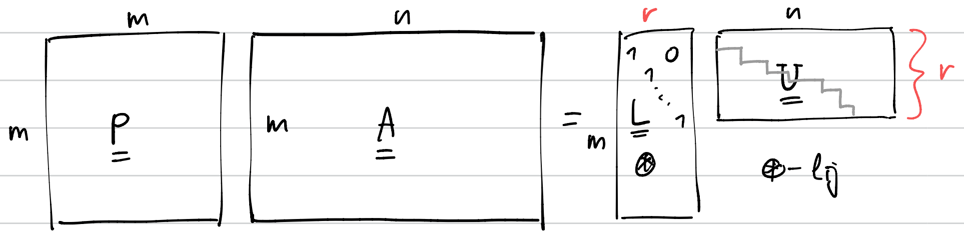
$$\underline{\underline{P}}_{23}\,\underline{\underline{E}}_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Big| \; \underline{\underline{P}}_{23} \qquad \Rightarrow \underline{\underline{P}}_{23}\cdot\underline{\underline{E}}_{21} = \underline{\underline{E}}_{31}\,\underline{\underline{P}}_{23}$$

$$\underline{\underline{E}}_{31}\,\underbrace{\underline{\underline{P}}_{23}\,\underline{\underline{P}}_{13}}_{\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{U}} \qquad \Rightarrow \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{A}} = \underbrace{\underline{\underline{E}}_{31}^{-1}}_{\underline{\underline{L}}}\cdot U$$

$$\cdot\,\underline{\underline{E}}_{61}^{-1} \;\Big|$$

$$\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Bem: Im allgemeinen gibt die Gauss-Elimination für eine $m \times n$-Matrix $\underline{\underline{A}}$ von Rang $r < m$:



r Pivote.

Bem: Man kann die Elimination auch nur blockweise durchführen.

$$\left[\begin{array}{c|c} \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{0}} \\ \hline -\underline{\underline{C}}\cdot\underline{\underline{A}}^{-1} & \underline{\underline{I}} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \hline \underline{\underline{C}} & \underline{\underline{D}} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \underline{\underline{I}}\cdot\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{0}}\cdot\underline{\underline{C}} & \underline{\underline{I}}\cdot\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{0}}\cdot\underline{\underline{D}} \\ -\underline{\underline{C}}\,\underbrace{\underline{\underline{A}}^{-1}\cdot\underline{\underline{A}}}_{\underline{\underline{I}}} + \underline{\underline{I}}\,\underline{\underline{C}} & -\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}}^{-1}\cdot\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{I}}\,\underline{\underline{D}} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \underline{\underline{A}} & \underline{\underline{B}} \\ \hline \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{D}} - \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{B}} \end{array}\right]$$

$$-\underline{\underline{C}} + \underline{\underline{C}} = 0$$

Schur komplement

wichtig!

Bem: Sei $\underline{\underline{A}}$ eine $n \times n$ Matrix, $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{U}}$

$$\underline{\underline{L}} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ * & \ddots & 1 \end{bmatrix} ; \quad U = \underbrace{\begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & \ddots & d_n \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{D}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \frac{u_{12}}{d_1} & \frac{u_{13}}{d_1} & \cdots & \frac{u_{1n}}{d_n} \\ & 1 & \frac{u_{23}}{d_2} & \cdots & \\ 0 & & \ddots 1 & & \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\tilde{U}}}}$$

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{\tilde{U}}}$$ LDU-Zerlegung

$$\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{\hat{U}}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{L}}^T$$

Falls $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^T$ ($\underline{\underline{A}}$ symmetrisch) $\Rightarrow \underline{\underline{L}}^T = \underline{\underline{\tilde{U}}}$, $(\underline{\underline{\hat{\tilde{U}}}}^T = \underline{\underline{L}})$

$\underline{\underline{A}}$ symmetrisch $\Rightarrow$ $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{L}}^T$

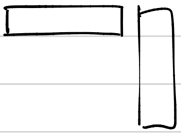
zusätzliche Annahme: $\underline{\underline{A}}$ symmetrisch und $d_1, d_2, \dots d_n > 0$

$$\underline{\underline{D}} = \sqrt{\underline{\underline{D}}}\sqrt{\underline{\underline{D}}} \quad \text{wobei} \quad \sqrt{\underline{\underline{D}}} = \begin{bmatrix} \sqrt{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{d_n} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{L}}^T = \underbrace{\underline{\underline{L}}\sqrt{\underline{\underline{D}}}}_{:=\underline{\underline{R}}}\sqrt{\underline{\underline{D}}}\,\underline{\underline{L}}^T = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{R}}^T$$

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{R}}^T$$ cholesky-Zerlegung

Bem: $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$: $\underline{x}^T \underline{y} =$



$= x_1 y_1 + \dots x_n y_n \in \mathbb{R}$
Skalarprodukt von $\underline{x}$ und $\underline{y}$

$x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$

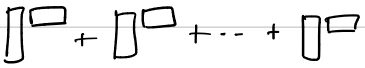
$\underline{x}\,\underline{y}^T =$

$$= \begin{bmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_m \\ x_2 y_1 & x_2 y_3 & \cdots & x_2 y_m \\ \cdots & & & \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \cdots & x_n y_m \end{bmatrix} n \times m \in \mathbb{R}$$

Rang 1

LU-Zerlegung!

Bem $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = [\underline{a}_1, \underline{a}_2 \dots \underline{a}_n] \begin{bmatrix} — \underline{x}_1^* \\ — \underline{x}_2^* — \\ \vdots \\ — x_n^* — \end{bmatrix} = \underline{a}_1 \underline{x}_1^* + \underline{a}_2 \underline{x}_2^* + \dots + \underline{a}_n \underline{x}_n^*$



Blockmultiplikation

$=$ Summe von Rang = 1 Matrizen

Bem: Somit ist die LU-Zerlegung eine Summe von Rang 1 Matrizen.

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{U}} = \begin{bmatrix} \underline{l}_1 & \underline{l}_2 & \dots & \underline{l}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} — & u_1^* & — \\ — & u_2^* & — \\ & \dots & \\ — & u_r^* & — \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} = \underline{l}_1 \underline{u}_1^* + \underline{l}_2 \underline{u}_2^* + \dots + \underline{l}_r \underline{u}_r^*$$

Bem: Man kann die LU-Zerlegung auch so einführen.

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}, \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}}, \quad l_{41} = \frac{a_{41}}{a_{11}}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 \text{ mal Zeile } 1 \\ l_{21} \text{ mal Zeile } 1 \\ l_{31} \text{ mal Zeile } 1 \\ l_{41} \text{ mal Zeile } 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \boxed{\underline{\underline{A}}_2} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

↑ $\underline{l}_1$

$$= \underline{l}_1 \underline{u}_1^* + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \text{ mal Zeile } 2 \\ 1 \text{ mal Zeile } 2 \\ l_{32} \text{ mal Zeile } 2 \\ l_{42} \text{ mal Zeile } 2 \end{bmatrix}}_{\underline{l}_2 \cdot \underline{u}_2^*} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\underline{\underline{A}}_3} & \\ 0 & 0 & & \end{bmatrix}$$

usw.

$$\underline{\underline{A}} = \underline{l}_1 \underline{u}_1^* + \underline{l}_2 \cdot \underline{u}_2^* + \dots + \underline{l}_r \underline{u}_r^*$$

⚠ Rang der Matrix = sehr wichtig - Verratet viel über die Matrix

V4

§1.7 Geometrie: Orthogonale Matrizen

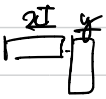
9.10.20

$\mathbb{R}^3 \ni \underline{x}: \|\underline{x}\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$ (die Euklidische Norm) ($|x|$ = Betrag)

$\mathbb{R}^n \ni \underline{x}: \|\underline{x}\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}$

$\mathbb{C}^n \ni \underline{x}: \|\underline{x}\| = \sqrt{|x_1|^2+|x_2|^2+\dots+|x_n|^2}$

$\underline{x},\underline{y} \in \mathbb{R}^3: \langle \underline{x},\underline{y}\rangle = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 = \underline{x}^T\underline{y}$



= Skalarprodukt zw. x & y

$\underline{x},\underline{y} \in \mathbb{R}^n: \langle \underline{x},\underline{y}\rangle = x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n = \underline{x}^T\underline{y}$

$\langle\rangle$: Diese Klammern = Skalarprodukt

Winkel: $(\widehat{\underline{x},\underline{y}}) = \arccos \frac{\langle \underline{x},\underline{y}\rangle}{\|\underline{x}\|\|\underline{y}\|}$

Def: $\underline{x},\underline{y} \in \mathbb{R}^3$ heissen orthogonal $\underline{x} \perp \underline{y}$ $(\underline{x} \neq \underline{0},\ \underline{y} \neq \underline{0})$ falls $\langle \underline{x},\underline{y}\rangle = 0$

Def: eine reelle $n\times n$-Matrix $\underline{A}$ heisst orthogonal wenn:

$$\boxed{\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{I}}}$$

orthogonal = senkrecht

(d.h. • alle Spalten von $\underline{A}$ stehen orthogonal aufeinander (= $\perp$ zueinander)

&

• alle diese Spalten haben die Länge 1).

Bsp:

$$\underline{A} = [\,\underline{u}\ \ \underline{v}\ \ \underline{w}\,] \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} \text{———} & \underline{u}^T & \text{———} \\ \text{———} & \underline{v}^T & \text{———} \\ \text{———} & \underline{w}^T & \text{———} \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^T\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{u}^T\underline{u} & \underline{u}^T\underline{v} & \underline{u}^T\underline{w} \\ \underline{v}^T\underline{u} & \underline{v}^T\underline{v} & \underline{v}^T\underline{w} \\ \underline{w}^T\underline{u} & \underline{w}^T\underline{v} & \underline{w}^T\underline{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{u} \perp \underline{v}, & \underline{u} \perp \underline{w}, & \|\underline{u}\| = 1 \\ \underline{v} \perp \underline{w}, & & \|\underline{v}\| = 1 \\ \quad " & \quad " & , \|\underline{w}\| = 1 \end{cases}$$

* orthogonale Matrizen sind immer quadratisch

$\underline{x},\underline{y} \in \mathbb{C}^n: \langle \underline{x},\underline{y}\rangle = \underline{x}^H\underline{y} = \bar{x}_1y_1 + \bar{x}_2y_2 + \dots + \bar{x}_ny_n$

Def: $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heisst unitär falls $\underline{\underline{A}}^H \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}}$

Bem: $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben; $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ beliebig, $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{y} \in \mathbb{R}^n$

$\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A}(\underline{x}) = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ für $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{array}{l} \mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ \qquad \cup \\ \qquad \underline{x} \longmapsto \underline{\underline{A}}\,\underline{x} \end{array}$$

Theorem: Orthogonale Matrizen verändern Längen und Winkeln nicht!

Beweis: $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}}$

$\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\langle \underline{\underline{A}}\,\underline{x}, \underline{\underline{A}}\,\underline{y} \rangle = (\underline{\underline{A}}\,\underline{x})^T (\underline{\underline{A}}\,\underline{y}) = (\underline{x}^T \underline{\underline{A}}^T)(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{y}) = \underline{x}^T (\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}})\underline{y} = \underline{x}^T \underline{\underline{I}}\,\underline{y} = \underline{x}^T \underline{y}$$

$$= \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$$

Nehme $\underline{y} = \underline{x} \Rightarrow \|\underline{\underline{A}}\,\underline{x}\|^2 = \langle \underline{\underline{A}}\,\underline{x}, \underline{\underline{A}}\,\underline{x} \rangle = \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle = \|\underline{x}\|^2$

Winkel

$\Rightarrow \|\underline{\underline{A}}\,\underline{x}\| = \|\underline{x}\|$

$$(\widehat{\underline{\underline{A}}\,\underline{x}, \underline{\underline{A}}\,\underline{y}}) = \arccos \frac{\langle \underline{\underline{A}}\,\underline{x}, \underline{\underline{A}}\,\underline{y} \rangle}{\|\underline{\underline{A}}\,\underline{x}\| \cdot \|\underline{\underline{A}}\,\underline{y}\|} = \arccos \frac{\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle}{\|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\|} = (\widehat{\underline{x}, \underline{y}})$$

Theorem: Seien $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}$ orthogonale Matrizen:

(1). $\underline{\underline{A}}$ ist invertierbar und $\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^T$

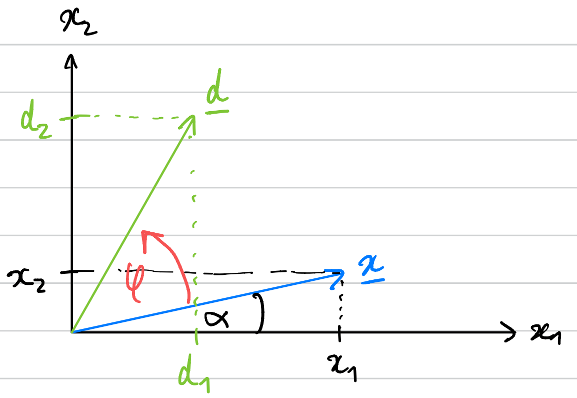
(2). $\underline{\underline{A}}^{-1}$ ist orthogonal

(3). $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$ ist orthogonal

(4). $\underline{\underline{I}}$ ist orthogonal.

Bspe: ① Jede Permutationsmatrix ist orthogonal $(\underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{I}})$

② Drehmatrix:



Sei $r=\|\underline{x}\|$

$$d_1 = r\cdot\cos(\alpha+\varphi) = \overbrace{r\cos\alpha}^{x_1}\cos\varphi - \overbrace{r\sin\alpha}^{x_2}\sin\varphi$$

$$d_2 = r\cdot\sin(\alpha+\varphi) = \overbrace{r\sin\alpha}^{x_2}\cos\varphi + \overbrace{r\cos\alpha}^{x_1}\sin\varphi$$

$$\Rightarrow \underline{d} = \underline{\underline{D}}(\varphi)\,\underline{x} \quad \begin{bmatrix} x_1\cos\varphi - x_2\sin\varphi \\ x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi \end{bmatrix}$$

Daraus ist $\underline{\underline{D}}(\varphi) = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}}_{\text{Drehmatrix}}$

Daraus ist $\underline{\underline{D}}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$

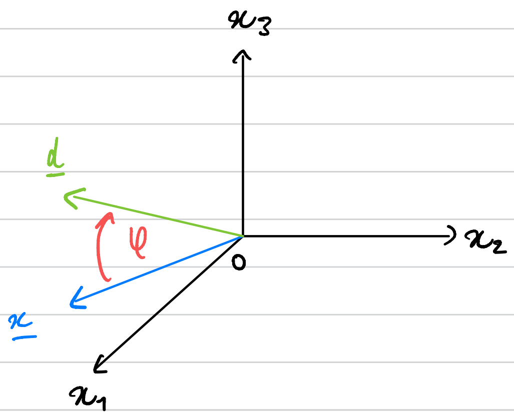
$$\underline{\underline{D}}(\varphi)^T = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \underline{\underline{D}}(-\varphi)$$

Bem: $\underline{\underline{G}}(\varphi) = \underline{\underline{D}}(-\varphi)$ Notation für Givens Rotation

Bem: $\underline{\underline{D}}(\varphi)$ orthogonal

$$\underline{\underline{D}}(\varphi)^T\,\underline{\underline{D}}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi+\sin^2\varphi & -\cos\varphi\sin\varphi+\sin\varphi\cos\varphi \\ -\sin\varphi\cos\varphi+\cos\varphi\sin\varphi & \cos^2\varphi+\sin^2\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bsp Drehung in der $x_1 0 x_3$ – Ebene



$$\underline{\underline{D}}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

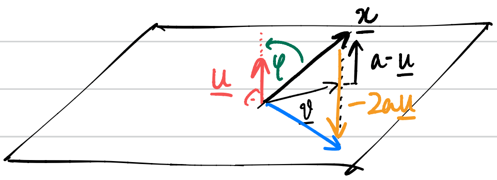
Allgemein in $\mathbb{R}^n$: Drehung in der $x_i 0 x_j$ – Ebene

$$\underline{\underline{D}}_{ij}(\varphi) = \begin{array}{ccccccccl}
1 & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & 0 & & & \\
 & & \ddots & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & \\
 & & & \cos\varphi & & -\sin\varphi & & & \leftarrow i\text{-te Zeile} \\
 & & & & 1 \; \ddots & & & & \\
 & & & & & 1 & & & \\
 & 0 & & \sin\varphi & & \cos\varphi & & & \leftarrow j\text{-te Zeile} \\
 & & & & & & \ddots & 1 & \\
 & & & \uparrow & & \uparrow & & & \\
 & & & i\text{-te Spalte} & & j\text{-te Spalte} & & &
\end{array}$$

Bsp: Spiegelungen / Householder Matrix

Sei eine Ebene mit $\underline{u}$ als Normalvektor der Ebene, $\|\underline{u}\| = 1$

↑ wichtig!



Spiegelung von $\underline{x}$ zur Ebene $\underline{\underline{Q}}\,\underline{x}$

$$\cos\varphi = \frac{a}{\|\underline{x}\|}$$

$$\underline{u}^T\underline{x} = \langle \underline{u}, \underline{x} \rangle = \|\underline{u}\| \cdot \|\underline{x}\| \cdot \cos\varphi = 1 \cdot \|\underline{x}\| \cdot \frac{a}{\|\underline{x}\|} = a$$

⚠ Also: $\boxed{a = \underline{u}^T\underline{x}}$ = Länge der Projetion von $\underline{x}$ auf $\underline{u}$.

$$\underline{x} = \underline{v} + a\underline{u}$$

$$\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{x} = \underline{x} + (-2a\underline{u}) = \underline{x} - 2a\underline{u} = \underline{x} - 2\underline{u}\boxed{a} = \underline{x} - 2\underline{u}\,(\boxed{\underline{u}^T\underline{x}})$$

$$= \underline{x} - 2(\underline{u}\,\underline{u}^T)\underline{x} = (\underline{\underline{I}} - 2\underline{u}\,\underline{u}^T)\underline{x}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{I}} - 2\underline{u}\,\underline{u}^T \quad \text{Housholdermatrix}$$

Beweis:

Bem: $\underline{\underline{Q}}$ ist orthogonal

$$\underline{\underline{Q}}^T\underline{\underline{Q}} = (\underline{\underline{I}} - 2\underline{u}\,\underline{u}^T)^T(\underline{\underline{I}} - 2\underline{u}\,\underline{u}^T) = (\underline{\underline{I}}^T - 2(\underline{u}\,\underline{u}^T)^T)(\underline{\underline{I}} - 2\underline{u}\,\underline{u}^T) \overset{⊛}{=} (\underline{\underline{I}} - 2\underline{u}\,\underline{u}^T)(\underline{\underline{I}} - 2\underline{u}\,\underline{u}^T)$$

$$= \underline{\underline{I}} - 2\underline{u}\,\underline{u}^T - 2\underline{u}\,\underline{u}^T + 4(\underline{u}\,\underline{u}^T)(\underline{u}\,\underline{u}^T)$$

$$= \underline{\underline{I}} - 4\underline{u}\,\underline{u}^T + 4\underline{u}\,\underbrace{(\underline{u}^T\underline{u})}_{\|\underline{u}\|=1}\,\underline{u}^T = I \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{Q}} \text{ orthogonal.}$$

$$⊛ \; (\underline{u}\,\underline{u}^T)^T = (\underline{u}^T)^T \cdot \underline{u}^T = \underline{u}\cdot\underline{u}^T$$

Bsp

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} \qquad \|\underline{u}\|^2 = \underline{u}^T \cdot \underline{u} = (-2/3)^2 + (1/3)^2 + (-2/3)^2 = 1$$

Achtung: falls $\|u\| \neq 1$, dann arbeite ich weiter $\frac{u}{\|u\|}$.

$$\underline{u}\cdot\underline{u}^T = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2/3 & 1/3 & -2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

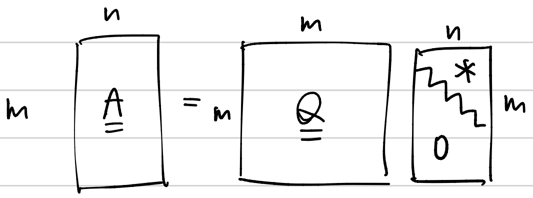
$$\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{I}} - 2\underline{u}\,\underline{u}^T = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} - \frac{2}{9}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

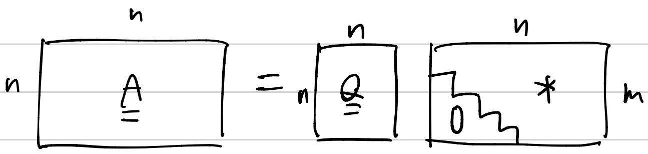
§ 1.8. QR-Zerlegung

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}$$

↪ obere Dreiecksmatrix

↳ orthogonale Matrix $\underline{\underline{Q}}^T\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{I}}$





$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b} \qquad \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{b} \;\; \Big| \, \underline{\underline{Q}}^T \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{\underline{Q}}^T\underline{b}$$

weiter Rückwärtssubstitution

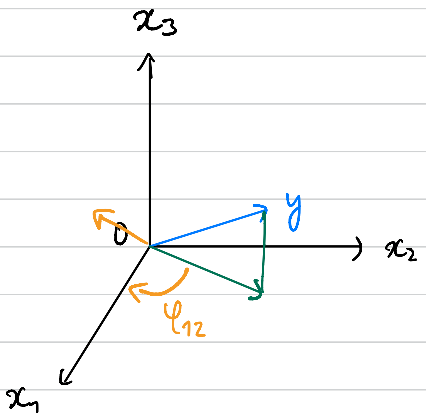
Vorteil gegenüber LU-Zerlegung: Rundungsfehler sammeln sich nicht
Nachteil: es kostet ca. 3 Mal mehr Operationen!

Wie? Wir erzeugen die 0-Stellen in $\underline{R}$ wie bei der Elimination mittels orthogonale Matrizen statt $E_{12}, \dots$

Ziel:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} & Q & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} * & * & \\ 0 & * & \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

mit $\underline{\underline{Q}}$ orthogonal



$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \enclose{circle}{y_2} \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{G}}^{12}(\varphi_{12}) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \cos\varphi_{12} & \sin\varphi_{12} & 0 \\ -\sin\varphi_{12} & \cos\varphi_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \end{array}$$

Die Givens Rotation die y_2 zu 0 bringt.

$$\underline{\underline{G}}^{13}(\varphi_{13}) = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{13} & 0 & \sin\varphi_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi_{13} & 0 & \cos\varphi_{13} \end{bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ \\ 3 \end{array}$$

Die Givens Rotation die y_3 zu 0 bringt

Also $$\underbrace{\underline{\underline{G}}^{13}\,\underline{\underline{G}}^{12}}_{\text{orthogonale Matrix}} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nach der ersten Spalte $\underline{\underline{Q}}^1 \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} * & z_1 & \times \\ 0 & z_2 & \times \\ 0 & z_3 & \times \end{bmatrix}$ brauche $\underline{\underline{G}}^{23}$

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \dots & \times \\ 0 & \times & \times & \dots & \times \\ 0 & \enclose{circle}{\times} & \times & \dots & \times \\ \vdots & \enclose{circle}{\times} & & & \\ & \vdots & & & \\ 0 & \enclose{circle}{\times} & \times & \times\ \times & \times \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{G}}^{ij}$: die ersten Komponenten nicht verändert

$\underline{\underline{Q}}^2 \underline{\underline{Q}}^1 \underline{\underline{A}}$ mit $\underline{\underline{Q}}^2$ orthogonal

$$\underline{\underline{Q}}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$ Multiplikation von Givens Rotationen

$\vdots$ weiter so

$$\underline{\underline{Q}}^{n-1} \cdots \underline{\underline{Q}}^2 \cdot \underline{\underline{Q}}^1 \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{R}} \qquad \Big| \cdot (\underline{\underline{Q}}^1)^T (\underline{\underline{Q}}^2)^T \cdots (\underline{\underline{Q}}^{n-1})^T$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}} = \underbrace{(\underline{\underline{Q}}^1)^T (\underline{\underline{Q}}^2)^T \cdots (\underline{\underline{Q}}^{n-1})^T}_{\text{orthogonale Matrix}} \cdot \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}$$

i-te Spalte ↓

$$\underline{\underline{G}}_{ij} \begin{bmatrix} x_1 & \\ \vdots & \\ x_{i-1} & \\ \enclose{circle}{x_i} & \\ x_{i+1} & \\ \vdots & \\ x_{j-1} & \\ \enclose{circle}{x_j} & \cdots x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & \\ \vdots & \\ x_{i-1} & \\ \color{red}{r} & \\ x_{i+1} & \\ \vdots & \\ x_{j-1} & \\ \color{red}{0} & \\ x_{j+1} & \cdots \; x_n \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{x_i^2 + x_j^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{x_i}{r}$$

$$\sin\varphi = \frac{x_j}{r}$$

Bsp: $\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$r = \sqrt{16+9} = 5$

$\cos\varphi = \frac{4}{5} \qquad \sin\varphi = \frac{-3}{5}$

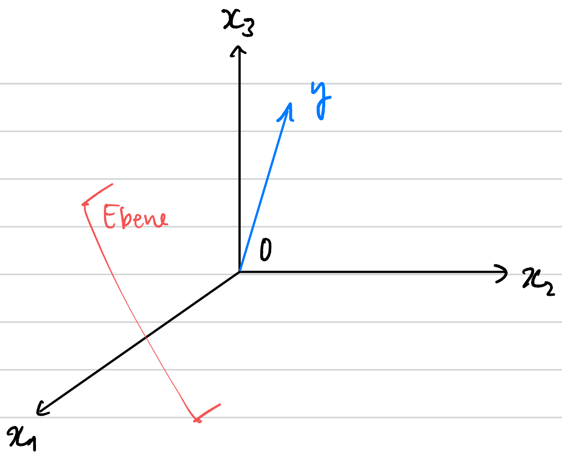
$$\underline{\underline{G}}^{12} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 & 0 \\ 3/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ \enclose{circle}{1} \end{bmatrix}$$

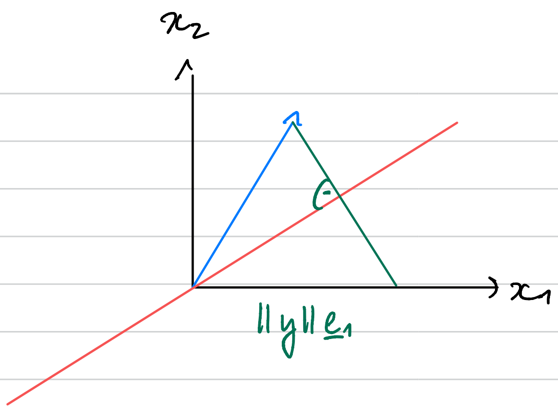
$$\underline{\underline{G}}^{13} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{26} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{G}} = \underline{\underline{G}}^{13}\, \underline{\underline{G}}^{12}$$

Bem: Diese Methode (Givens Rotationen) ist günstig falls $\underline{\underline{A}}$ bereits viele 0-Einträge hat.

Alternative (allgemeine Software) verwendet Householder-Spiegelungen

→ alle 0-Stellen in einer Spalte gleichzeitig.





$$\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{I}} - 2\underline{u}\,\underline{u}^T \quad \text{wobei} \quad \underline{u} \perp \text{Ebene}\,, \quad \|\underline{u}\| = 1$$

Bsp:

$$y = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \overset{\underline{\underline{Q}}}{\leadsto} 3\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \|\underline{y}\| = \sqrt{4+4+1} = 3$$

$$\underline{y} = \|\underline{y}\|\,\underline{e}_1 + \underline{v} \Rightarrow \underline{v} = \underline{y} - \|\underline{y}\|\,\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{u} = \frac{1}{\|\underline{v}\|}\,\underline{v} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{Q}}^1 = \underline{\underline{I}} - 2\underline{u}\,\underline{u}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{6} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{Q}}^1 \underline{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{Q}}^1 \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \times & \begin{matrix} \times & \times & \times \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{Q}}^2 \underline{\underline{Q}}^1 \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \times & \times & \begin{matrix} \times & \times \end{matrix} \\ 0 & \times & \begin{matrix} \times & \times \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} \times & \times \\ \times & \times \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

... und so weiter ... $\underline{\underline{Q}}^{n-1} \cdots \underline{\underline{Q}}^2 \underline{\underline{Q}}^1 \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{R}}$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}} \quad \text{mit} \quad \underline{\underline{Q}} = \underbrace{(\underline{\underline{Q}}^1)^T (\underline{\underline{Q}}^2)^T \dots (\underline{\underline{Q}}^{n-1})^T}_{\text{orthogonale Matrix.}}$$

Bsp:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{Q}}^1 \underline{\underline{A}} = \left[\underline{\underline{Q}}^1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{Q}}^1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right]$$

$$\underline{\underline{Q}}^1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\| = 3$$

$$\underline{v} = \underline{y} - 3\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} ; \quad \|v\| = \sqrt{12}$$

$$\Rightarrow \underline{u} = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{Q}}^1 = \underline{\underline{I}} - 2\underline{u}\,\underline{u}^T = \underline{\underline{I}} - 2\frac{1}{12} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & -4 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{Q}}^1 \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 1/3 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 2/3 \\ \enclose{circle}{2/3} \end{matrix}} \\ 0 & \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{Q}}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \quad 0 \\ 0 & \boxed{\; * \;} \\ 0 & \end{bmatrix}$$