§3 lineare Abbildungen

Def: X, Y lin. Räume, $F: X \to Y$ Abbildung (Funktion)

F heisst linear wenn:

1) $F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in X$

2) $F(cx) = cF(x)$ für alle $x \in X$, c Skalar.

Bem: oft geschrieben $F(x) = Fx$

Bem: Wenn Y= Raum der Skalare $\mathbb{R} / \mathbb{C}$ dann wird die lineare Funktion F Funktional genannt.

Bsp: $\mathcal{A}: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{A}(\underline{x}) = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$ lineare Abbildungen

Bsp: $C^k[a,b] = \{ f: [a,b] \to \mathbb{R}, \ f \text{ k-mal stetig differenzierbar} \}$

$$\begin{array}{ccc} D: C^1[a,b] & \longrightarrow & C^0[a,b] \\ \cup\!\!\!\mid & & \cup\!\!\!\mid \\ f & \longmapsto & \underset{\uparrow \text{ Ableitung}}{Df} \end{array}$$

definieren: $Df: [a,b] \to \mathbb{R}$

$$(Df)(\underset{\substack{\cap\!\!\!\mid \\ [a,b]}}{t}) = f'(t)$$

→ D ist der Operator, der ableitet. (D leitet ab)

Aussage: D ist linear. Überprüfen: (Axiome überprüfen)

1) Seien $f, g \in C^1[a,b]$ zu zeigen:

$D(f+g) = Df + Dg$ muss gelten.

$Df + Dg: [a,b] \to \mathbb{R}$, $D(f+g): [a,b] \to \mathbb{R}$

$(Df + Dg)(t) = (Df)(t) + (Dg)(t) = f'(t) + g'(t) = (f+g)'(t)$

$= D(f+g)(t)$ für alle $t \in [a,b]$ ✓

2) $D(cf)(t) = (cf)'(t) = cf'(t) = c(Df)(t)$

$D(cf): [a,b] \to \mathbb{R}$, $c(Df): [a,b] \to \mathbb{R}$

Somit $D(cf) = c\,(Df)$ ✓

Aus 1), 2) folgt: D ist linear.

Bsp: Gegeben $c_0, c_1, \dots, c_m$ Skalare.

$$L: C^m[a,b] \longrightarrow C^0[a,b]$$
$$\quad f \longmapsto Lf, \quad Lf: [a,b] \to \mathbb{R}$$

$$(Lf)(t) = c_0 f(t) + c_1 f'(t) + c_2 f''(t) + \dots + c_m f^{(m)}(t)$$
$$t \in [a,b]$$

L = allgemeiner Differenzialoperator

lineare Abbildung.

Green にする!

§ 3.2. Abbildungsmatrix:

Def: Sei X lin. Raum, $\dim X = n$
In X: Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$

Sei Y lin. Raum, $\dim Y = m$

in Y: Basis $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$

Sei $F = X \to Y$ lin. Abbildung

$$b_j \mapsto Fb_j \Rightarrow Fb_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i$$

$$\text{für } j = 1, 2, \dots, n \Rightarrow \underline{\underline{A}} = \begin{array}{cc} n & \\ \boxed{\quad a_{ij} \quad} & m \end{array}$$

$\underline{\underline{A}}$ heisst **Abbildungsmatrix** von F zu Basen $\mathcal{B}, \mathcal{C}$.

$\mathcal{B}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F"] \arrow[d, shift right, "k_{\mathcal{B}}"'] & Y \arrow[d, shift right, "k_{\mathcal{C}}"'] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "\underline{\underline{A}}"] \arrow[u, shift right, "k_{\mathcal{B}}^{-1}"'] & \mathbb{R}^m \arrow[u, shift right, "k_{\mathcal{C}}^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Dieses Digramm ist kommutativ.

→ Def. / Erklärung folgt.

Sei $x \in X \Rightarrow x = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$

$$F(x) = F(x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_n b_n) \overset{*}{=} x_1 F(b_1) + x_2 F(b_2) + \dots + x_n F(b_n)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j F(b_j)$$

(* weil F ist eine lin. Abbildung)

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)}_{y_i} c_i = y_1 c_1 + y_2 c_2 + \dots + y_m c_m$$

$\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$ sind die Koordinaten von $F(x)$ in der Basis $\mathcal{C}$.

$$\underline{y} = \underline{\underline{A}}\, \underline{x}$$

(lin. Abbildung)

$F = k_c^{-1} \underline{\underline{A}} k_B$ oder auch $k_c F = \underline{\underline{A}} k_B$ "kommutatives Diagramm"

$$\left(\begin{matrix} X \xrightarrow{F} Y \\ X \xrightarrow{k_B} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\underline{\underline{A}}} \mathbb{R}^m \xrightarrow{k_c^{-1}} Y \end{matrix} \right)$$

F dann k_c = k_B dann $\underline{\underline{A}}$

Bsp: $M: P_4 \longrightarrow P_5$ $\quad X = P_4$, $Y = P_5$

$$\begin{matrix} \cup\!\!\!| & & \cup\!\!\!| \\ f & \longmapsto & Mf \end{matrix} \qquad (Mf)(t) = t f(t)$$

Basis in P_4: Monome p_0, p_1, p_2, p_3

Basis in P_5: Monome p_0, p_1, p_2, p_3, p_4

$M(p_0) \in P_5 \Rightarrow M(p_0) =$ lin. Komb. von Elementen der Basis in P_5

$M(p_0)(t) = t \cdot 1 = p_1(t) \Rightarrow Mp_0 = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 + 0 \cdot p_3 + 0 \cdot p_4$ $\quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Koordinatenvektor in der Basis in $Y = P_5$

$M(p_1)(t) = t \cdot t = p_2(t) \Rightarrow Mp_1 = 0 \cdot p_0 + 0 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 + 0 \cdot p_3 + 0 \cdot p_4 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$M(p_2)(t) = t \cdot t^2 = p_3(t) \Rightarrow Mp_2 = 0 \cdot p_0 + 0 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 + 1 \cdot p_3 + 0 \cdot p_4 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$M(P_3)t = t\cdot t^3 = P_4(t) \Rightarrow MP_3 = 0\cdot P_0 + 0\cdot P_1 + 0\cdot P_2 + 0\cdot P_3 + 1\cdot P_4 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\0\\1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 4}$$

Bsp weiterverfolgen:

$\alpha \in P_4$, $\alpha(t) = 15 + \frac{1}{2}t + 4t^2 + \sqrt{3}t^3$

$$M\alpha \in P_5, \quad \underline{\underline{M}} \begin{bmatrix} 15 \\ 1/2 \\ 4 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 15 \\ 1/2 \\ 4 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$(M\alpha)(t) = 15t + 1/2\, t^2 + 4t^3 + \sqrt{3}t^4$

Def: $F: X \to Y$ linear und bijektiv heisst **Isomorphismus**; man sagt X, Y sind **isomorph**.

Falls $X = Y$ dann heisst F **Automorphismus**

Satz: $F: X \to Y$ Isomorphismus, dann $F^{-1}: Y \to X$ ist linear also auch Isomorphismus.

Beweis: Seien $y_1, y_2 \in Y$ beliebig.

Da F Isomorphismus ist $\Rightarrow F$ ist bijektiv $\Rightarrow$ es gibt $x_1, x_2 \in X$ sodass $y_1 = F(x_1)$ $y_2 = F(x_2)$

Da F Isomorphismus $\Rightarrow F$ ist linear $\Rightarrow F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2) = y_1 + y_2$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Da } F \text{ bijektiv} \\ \text{und } F(x_1+x_2) = y_1 + y_2 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 + x_2 = F^{-1}(y_1 + y_2)$$

Somit: $F^{-1}(y_1 + y_2) = x_1 + x_2 = F^{-1}(y_1) + F^{-1}(y_2)$ $\Rightarrow F^{-1}$ ist linear.

$F(\alpha x_1) = \alpha F(x_1) = \alpha y_1 \Rightarrow \alpha x_1 = F^{-1}(\alpha y_1)$

Somit $F^{-1}(\alpha y_1) = \alpha x_1 = \alpha F^{-1}(y_1)$

Bsp von Isomorphismus: X lin. Raum mit Basis $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$

$$k_{\mathcal{B}} : X \to \mathbb{R}^n$$
$$\quad\;\; \in \qquad \in$$
$$x \longmapsto \underline{x} \quad \text{Koordinatenvektor von } x \text{ in } \mathcal{B}$$

$k_{\mathcal{B}}$ linear, bijektiv $\Rightarrow$ Isomorphismus
$X \sim \mathbb{R}^n$

Bem: $F: X \to Y$ lin. Abbildung zwischen endlichdimensionale Räume. Nach der Wahl der Basen $\mathcal{B}$ in X und $\mathcal{C}$ in Y charakterisiert die Matrix $\underline{\underline{A}}$ die lineare Abbildung F.

(wenn F bijektiv)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} & X \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[d, shift right, "k_{\mathcal{B}}"'] & Y \arrow[l, shift left, "F^{-1}"] \arrow[d, shift right, "k_{\mathcal{C}}"'] & \mathcal{C} \\
& \mathbb{R}^n \arrow[r, shift left, "\underline{\underline{A}}"] \arrow[u, shift right, "k_{\mathcal{B}}^{-1}"'] & \mathbb{R}^n \arrow[l, shift left, "\underline{\underline{A}}^{-1}"] \arrow[u, shift right, "k_{\mathcal{C}}^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

gleiche Dim. weil lin. Abbildung F bijektiv ist.

F wird durch $\underline{\underline{A}}$ charakterisiert $\leftarrow$ gilt immer.

F^{-1} wird durch $\underline{\underline{A}}^{-1}$ charakterisiert. (nur wenn F bijektiv ist) weil sonst existiert kein F^{-1}

↳ weil F, F^{-1} Funktionen sind. Nur wenn F bijektiv ist ist F^{-1} auch eine Funktion.

Bem: So kann man auch eine Art F^T definieren.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "F"] \arrow[d, shift right, "k_{\mathcal{B}}"'] & Y \arrow[l, bend right=60, "F^T"'] \arrow[d, shift right, "k_{\mathcal{C}}"'] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "\underline{\underline{A}}"] \arrow[u, shift right, "k_{\mathcal{B}}^{-1}"'] & \mathbb{R}^m \arrow[l, bend left=60, "\underline{\underline{A}}^T"] \arrow[u, shift right, "k_{\mathcal{C}}^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

$y \in Y$: $\quad F^T y = k_{\mathcal{B}}^{-1} \underline{\underline{A}}^T k_{\mathcal{C}}\, y$

X, Y, Z lin. Räume, F, G lin. Abbildungen

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F"] \arrow[d, shift right, "k_B"'] & Y \arrow[r, "G"] \arrow[d, shift right, "k_C"'] & Z \arrow[d, shift right, "k_D"'] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "\underline{\underline{A}}"'] \arrow[u, shift right, "k_B^{-1}"'] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "\underline{\underline{B}}"'] \arrow[u, shift right, "k_C^{-1}"'] & \mathbb{R}^p \arrow[u, shift right, "k_D^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

kommutatives Diagramm

⊛ Operationen: von rechts nach links
→ es sind lineare Operatoren,
nicht "multiplikation".

$$GFx = k_D^{-1} \underline{\underline{B}}\, \underline{\underline{A}}\, k_B x$$

oder auch: $GFx = k_B^{-1} \underline{\underline{B}}\, k_C F x$

"Reihenfolge der Matrizen / Operationen"

$$G(F(x)) = k_D^{-1}(B(A(k_B(x))))$$

$$G \circ F(x) = k_D^{-1} \circ B \circ A \circ k_B(x)$$

Hintereinanderausführung.

$f \circ g(x)$
$= f(g(x))$

Def: $\mathrm{Ker}\, F = \{x \in X\,;\ Fx = 0\}$ Kernel von F (Kern)

F lin. Abbildung $\Rightarrow$ $\mathrm{Ker}\, F$ lin. Unterraum von X

$\mathrm{Bild}\, F = \{y \in Y\,;$ es gibt $x \in X$ sodass $Fx = y\}$

F lin. Abbildung $\Rightarrow$ $\mathrm{Bild}\, F$ lin. Unterraum von Y

Theorem: $F: X \to Y$ lin. Abbildung. Dann F injektiv $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}\, F = \{0\}$

Theorem: $F: X \to Y$ lin. Abbildung auf endlich dim. Räume X, Y.

Dann: $\dim \mathrm{Ker}\, F + \dim \mathrm{Bild}\, F = \dim X$

Bem: $\mathrm{Rang}\, F = \mathrm{Rang}\, \underline{\underline{F}} = \dim \mathrm{Bild}\, \underline{\underline{F}} = \dim \mathrm{Bild}\, F$

V8

06.11.20

Wichtige Zusammenhänge

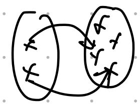
F injektiv $\Leftrightarrow$ "$F(x_1) = F(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$" $\Leftrightarrow$ "$F(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0$"

(höchstens 1 Lösung)

$\Updownarrow$ F linear $\qquad \Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$

$F(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \qquad \boxed{x_1 - x_2} \leftarrow \operatorname{Ker} F$

injektiv:



$F(x_1) = F(x_2)$

$\Leftrightarrow x_1 = x_2$

$\Leftrightarrow$ "$\operatorname{Ker} F = \{0\}$"

$$\begin{array}{ccc} F: X & \rightarrow & Y \\ \downarrow\uparrow & & \downarrow\uparrow \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow[\underline{\underline{F}}]{} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

$\dim X = n$, $\dim Y = m$

F bijektiv: für jedes Element $y \in Y$ gibt es einen einzigen (eindeutigen) $x \in X$: $F(x) = y$.

$\Updownarrow$

" für jedes $\underline{y} \in \mathbb{R}^m$ gibt es einen eindeutigen (einzigen) $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ sodass $\underline{\underline{F}}\,\underline{x} = \underline{y}$ "

$\Leftrightarrow$ $n = m$ und $\operatorname{Rang} \underline{\underline{F}} = n$

§3.3 Abbildungsmatrix bei Koordinatentransformation:

X lin. Raum mit Basen $\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}$

Y lin. Raum mit Basen $\mathcal{C}, \tilde{\mathcal{C}}$

$F: X \to Y$ lin. Abbildung

neue Basen

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "\underline{\underline{B}}"] \arrow[d, shift left, "k_{\tilde{\mathcal{B}}}^{-1}"] \arrow[dd, bend right=60, "\underline{\underline{T}}"'] & \mathbb{R}^m \arrow[d, shift left, "k_{\tilde{\mathcal{C}}}^{-1}"] \arrow[dd, bend left=60, "\underline{\underline{S}}"] \\
X \arrow[r, "F"] \arrow[u, shift left, "k_{\tilde{\mathcal{B}}}"] \arrow[d, shift right, "k_{\mathcal{B}}"'] & Y \arrow[u, shift left, "k_{\tilde{\mathcal{C}}}"] \arrow[d, shift right, "k_{\mathcal{C}}"'] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "\underline{\underline{A}}"'] \arrow[u, shift right, "k_{\mathcal{B}}^{-1}"'] & \mathbb{R}^m \arrow[u, shift right, "k_{\mathcal{C}}^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

alte Basis

kommutatives Diagramm. Kann hin und her gehen wie man möchte.

„Koordinatenabbildung bez. Basis $\mathcal{C}$“

$\underline{\underline{A}}$ ← bezüglich der Basen

(↗ nicht Funktion! F = Funktion)

$B \xrightarrow{S} \tilde{B}$ $\boxed{\tilde{B}S = B}$

$\tilde{B} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix}5\\4\\6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\3\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\0\\0\end{bmatrix}$

$\underline{\underline{S}}$ einfach

$\begin{bmatrix}5\\4\\6\end{bmatrix} = 5\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 4\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 6\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

$\dots \to S = \begin{bmatrix}5 & 7 & 6\\ 4 & 3 & 0\\ 6 & 1 & 0\end{bmatrix}$

$\underline{\underline{A}}$ = Abbildungsmatrix zu F bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ in X und $\mathcal{C}$ in Y
(die alten Basen)

$\underline{\underline{B}}$ = Abbildungsmatrix zu F bezüglich der Basen $\tilde{\mathcal{B}}$ in X und $\tilde{\mathcal{C}}$ in Y

$$\underline{\underline{B}} = \underbrace{k_{\tilde{\mathcal{C}}} k_{\mathcal{C}}^{-1}}_{\underline{\underline{S}}^{-1}} \underline{\underline{A}} \underbrace{k_{\mathcal{B}} k_{\tilde{\mathcal{B}}}^{-1}}_{\underline{\underline{T}}} = \underline{\underline{S}}^{-1} \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{T}} \quad \text{oder} \quad \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{T}}^{-1} = A$$

$$\operatorname{Rang}(\underline{\underline{A}}) = \operatorname{Rang}(F) = \operatorname{Rang}(\underline{\underline{B}})$$

$\underline{\underline{T}}$ Matrix des Wechsels von der alten Basis $\mathcal{B}$ in die neue Basis $\tilde{\mathcal{B}}$ (in X)

$\underline{\underline{S}}$ Matrix des Wechsels von der alten Basis $\mathcal{C}$ in die neue Basis $\tilde{\mathcal{C}}$ (in Y)

zB

$$X = \operatorname{span}\overbrace{\{P_0, P_2, P_4\}}^{\text{alte Basis: Menge } \mathbb{P}} = \operatorname{span}\overbrace{\{r_1, r_2, r_3\}}^{\text{neue Basis: Menge } \tilde{\mathbb{P}}}$$

$$Y = \operatorname{span}\underbrace{\{P_1, P_3\}}_{\mathbb{Q}} = \operatorname{span}\underbrace{\{q_1, q_2\}}_{\tilde{\mathbb{Q}}}$$

$B = T\tilde{B}$

$$\begin{tikzcd}
 & \overset{x}{\{r_1,r_2,r_3\}} & \overset{y}{\{q_1,q_2\}} \\
\text{neue Basis} & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "\underline{\underline{B}}"] \arrow[d, shift left, "k_{\tilde P}^{-1}"] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, shift left, "k_{\tilde Q}^{-1}"] \\
 & S_3 \arrow[u, shift left, "k_{\tilde P}"] \arrow[r, "D"] \arrow[d, shift right, "k_P"'] & U_2 \arrow[u, shift left, "k_{\tilde Q}"] \arrow[d, shift right, "k_Q"'] \\
\text{alte Basis} & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "\underline{\underline{D}}"'] \arrow[u, shift right, "k_P^{-1}"'] \arrow[uu, bend left=60, "\underline{\underline{T}}"] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, shift right, "k_Q^{-1}"'] \\
 & \underset{\tilde x}{\{p_0,p_2,p_4\}} & \underset{\tilde y}{\{p_1,p_2\}}
\end{tikzcd}$$

$\underline{\underline{T}}$: Wechsel von $P = \{p_0, p_2, p_4\}$ in $\tilde P = \{r_1, r_2, r_3\}$

$$\underline{\tilde x} \in \mathbb{R}^3 = x = \tilde x_1 r_1 + \tilde x_2 r_2 + \tilde x_3 r_3 = \sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3} t_{j}\,\tilde x_i\right) p_{2(j-1)} = \sum_{j=1}^{3}(\underline{\underline{T}}\,\underline{\tilde x})\, p_{2(j-1)}$$

$$r_i = \sum_{j=1}^{3} t_{ji}\, p_{2(j-1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\underline{T}}\,\underline{\tilde x} = \underline{x}}$$

$$\begin{tikzcd}
\text{neu} & \mathbb{R}^3 \arrow[d, shift right, "k_{\tilde P}"'] \\
 & S_3 \arrow[u, shift right, "k_{\tilde P}^{-1}"'] \arrow[d, shift right, "k_P"'] \\
\text{alt} & \mathbb{R}^3 \arrow[u, shift right, "k_P^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

$$\underline{\tilde x} = \begin{bmatrix} \tilde x_1 \\ \tilde x_2 \\ \tilde x_3 \end{bmatrix}$$

$$x = \underset{\text{lin. Kombo. von } p_0,\, p_2,\, p_4}{\tilde x_1 \overset{}{r_1} + \tilde x_2 r_2 + \tilde x_3 r_3} \Rightarrow \boxed{\underline{x} = \underline{\underline{T}}\,\underline{\tilde x}}$$

Bsp: $(Df)(t) = f'(t)$ (Ableitung)

$S_3 = \text{span}\{P_0, P_2, P_4\}$ $P_k(t) = t^k$

$U_2 = \text{span}\{P_1, P_3\}$

$D: S_3 \longrightarrow U_2$ Ableitung

$\;\;\;\;\; f \longmapsto Df$ $(Df)(t) = f'(t)$

Warum ist $\text{Dim}(\text{Ker}(\underline{D})) = p_0$?:

freie Var.

$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$y = 0$ $z = t$ = span

$4y$ $4y = 0$ $y = 0$ $x = 0$

Ker D

$D \cdot x = 0$ $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix} =$

$z = s$

1. Abbildungsmatrix bestimmen: $\underline{D}$?

$(Dp_0)(t) = 0 = 0 \cdot t + 0 \cdot t^3 = 0 \cdot p_1(t) + 0 \cdot p_3(t) \Rightarrow Dp_0 = 0 p_1 + 0 p_3$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$(Dp_2)(t) = 2t = 2 \cdot p_1(t) + 0 \cdot p_3(t) \Rightarrow Dp_2 = 2 p_1 + 0 p_3$

$(Dp_4)(t) = 4t^3 = 0 \cdot p_1(t) + 4 \cdot p_3(t) \Rightarrow Dp_4 = 0 p_1 + 4 p_3$

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$S_3 = \text{span}\{r_1, r_2, r_3\}$ $r_1(t) = 1 + t^2$, $r_2(t) = 1 - t^2$, $r_3(t) = 1 + t^2 + t^4$

$U_2 = \text{span}\{q_1, q_2\}$ $q_1(t) = t$, $q_2(t) = 3t + 2t^3$

d.h. $\{p_0, p_2, p_4\} \rightarrow \{r_1, r_2, r_3\}$

2. Transformationsmatrix für Basiswechsel in $\underline{S_3}$ bestimmen:

$r_1 = 1 p_0 + 1 p_2 + 0 \cdot p_4$

$r_2 = 1 p_0 - 1 p_2 + 0 \cdot p_4$

$r_3 = 1 p_0 + 1 p_2 + 1 p_4$

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrix für die Transformation von der alten in die neue Basis in S_3 $(\text{span}\{P_0, P_2, P_4\}) \rightarrow (\text{span}\{r_1, r_2, r_3\})$

3. Transformationsmatrix für Basiswechsel in $\underline{U_2}$ bestimmen:

$q_1 = p_1$

$q_2 = 3p_1 + 2p_3$

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Somit $\underline{B} = \underline{S}^{-1}\underline{D}\,\underline{T} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\underline{D}$ = Matrix für $\mathcal{F}$

Abbildungsmatrix in den Basen $\tilde{B}, \tilde{\mathcal{C}}$

D = Funktion (Ableitung).

$\mathrm{Ker}(D) = \mathrm{span}\{p_0\} \Rightarrow \dim \mathrm{Ker}(D) = 1$

$\mathrm{Bild}(D) = \mathrm{span}\{p_1, p_3\} \Rightarrow \dim \mathrm{Bild}(D) = 2$ $\quad$ Basis von $\underline{D}$

Überprüfe: $\boxed{\dim \mathrm{Kern}\, D + \dim \mathrm{Bild}\, D = \dim \mathcal{S}_3}$

$\qquad 1 \quad + \quad 2 \quad = \quad 3$ ✓

← kein Zufall! 1 Teil des 1. Teil des Fundamentalsatz der lin. Algebra.

$f \in \mathrm{Ker}(D) \Leftrightarrow Df = 0 \Leftrightarrow f(t) = \text{konstante} = c \cdot p_0$

f Polynom $\qquad$ Polynom

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}_3 \arrow[r, "D"] \arrow[d, shift right, "k_B"'] & \mathcal{U}_2 \arrow[d, shift right, "k_{\mathcal{C}}"'] \arrow[l, bend right, "D^T"'] \\
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "\underline{D}"] \arrow[u, shift right, "k_B^{-1}"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[u, shift right, "k_{\mathcal{C}}^{-1}"'] \arrow[l, bend left, "\underline{D}^T"]
\end{tikzcd}$$

$D^T y = k_B^{-1}\, \underline{D}^T k_{\mathcal{C}}(g)$

$g \in \mathcal{U}_2 \Rightarrow g = g_1 p_1 + g_2 P$

$\underline{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$D^T g = k_B^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = k_B^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 2g_1 \\ 4g_2 \end{bmatrix}$

$= 0 \cdot p_0 + (2g_1)P_2 + (4g_2)P_4$

$\mathrm{Ker}\, D^T = \{0\} \Rightarrow \dim \mathrm{Ker}\, D^T = 0$

$\mathrm{Bild}\, D^T = \mathrm{span}\{p_2, p_4\} \Rightarrow \dim \mathrm{Bild}\, D^T = 2$

Überprüfe: $\dim \mathrm{Ker}\, D^T + \dim \mathrm{Bild}\, D^T = \dim \mathcal{U}_2$

$\qquad 0 \quad + \quad 2 \quad = \quad 2$ ✓

$g \in \mathrm{Ker}\, D^T \Leftrightarrow D^T g = 0 \Leftrightarrow (2g_1)P_2 + (4g_2)P_4 = 0 =$ Polynom

$\Rightarrow 2g_1 = 0,\ 4g_2 = 0 \Rightarrow g_1 = g_2 = 0$

$\Rightarrow g = 0$