§ 6 Determinanten: (N/S S. 51) $n \times n$ Matrizen

V, W lin. Räume

$f: V \to W$ lin. Abbildung. $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$

$g: V \times V \to W$ bilinear falls g linear in jeder der 2 Argumente

...

$h: V \times V \times \dots \times V \to W$ multilinear falls h linear in jedem Argument ist.

$\det: \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \det: \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\det: \mathbb{C}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{C}$

Bem: Wir werden sehen: $\det A = 0 \iff \underline{\underline{A}}$ singulär

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{c}{a} b \end{bmatrix} \quad \text{falls } a \neq 0$$

Produkt der Elemente auf der Diagonale von $\underline{\underline{R}}$

$$a \cdot \left(d - \frac{c}{a} b\right) = ad - cb =: \det \underline{\underline{A}}$$

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Def: $\det: \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ / $\mathbb{C}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{C}$ sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

Axiome

(D1) $\det \underline{\underline{I}}_n = 1$

(D2) det wechselt das Vorzeichen, wenn 2 Zeilen / Spalten vertauscht werden. (Antisymmetrie)

(D3) det ist linear in jeder Zeile / Spalte

$$\text{d.h. } \det \begin{bmatrix} ta & tb \\ c & d \end{bmatrix} = t \cdot \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} a + \tilde{a} & b + \tilde{b} \\ c & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ c & d \end{bmatrix}$$

Bem: Man kann beweisen, dass diese 3 Axiome (D1, D2, D3) die Def. det (ad − cb) exakt festlegen.

→ Es gibt nur 1 Funktion, die diese 3 Axiome erfüllt!

Bem: det = Produkt der Elemente in diag ($\underline{\underline{R}}$) aus $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{R}}$

$$\det\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix} = t\cdot\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix} = tu\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = tu1 = tu$$

weitere Eigenschaften von Det:

Bem: 4) Falls 2 Zeilen / Spalten identisch $\Rightarrow$ det = 0

5)
$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a & b \\ c-ta & d-tb \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c-ta & d-tb \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \underbrace{t\cdot\det\begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix}}_{=0}$$

Somit: Gauss-Elimination, die nur die lin. Komb. von den Zeilen von $\underline{\underline{A}}$ verwendet, ändert die Det. nicht!

$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{R}} \Longrightarrow \det\underline{\underline{A}} = \det\underline{\underline{R}}$

falls $\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{R}} \Rightarrow \det\underline{\underline{A}} = (\det\underline{\underline{R}})(\det\underline{\underline{P}})$ ($\underline{\underline{P}}$ = Permutation) = Zeilen vertauschen

6) Nullzeile / Nullspalte $\Rightarrow$ det = 0

7) $\underline{\underline{A}}$ Dreiecksmatrix $\Rightarrow$ det ($\underline{\underline{A}}$) = Produkt der Diagonaleinträge

Elimination nach oben à la Gauss-Jordan

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ 0 & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \\ & & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$$

8) $\underline{\underline{A}}$ singulär $\xRightarrow{\text{Gauss-Elimination}}$ Nullzeile in $\underline{\underline{R}} \Rightarrow \det\underline{\underline{A}} = 0$

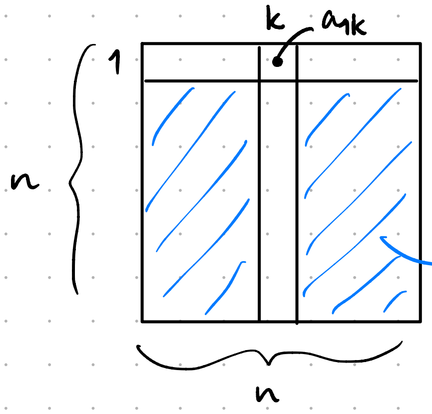
9) $\det(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) = (\det\underline{\underline{A}})(\det\underline{\underline{B}})$ Beweis: ausrechnen

$\det(\underline{\underline{A}}^{-1}) = \dfrac{1}{\det(\underline{\underline{A}})}$

$\det(\alpha\underline{\underline{A}}) = \alpha^n\det(\underline{\underline{A}})$ $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$

10) $\det(\underline{\underline{A}}^T) = \det(\underline{\underline{A}})$

11) $\det\underline{\underline{A}} = a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12} + \ldots + (-1)^{n+1} a_{1n}\det\underline{\underline{A}}_{1n}$



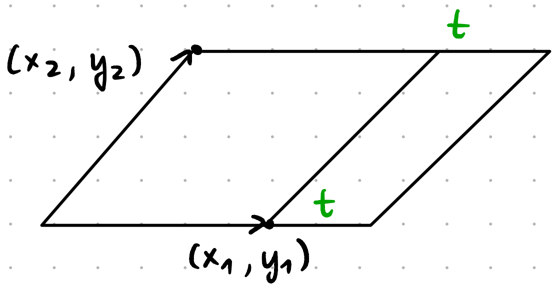
$\underline{A}_{1k}$ $(n-1)\times(n-1)$ Matrix

$\Rightarrow$ in vielen Büchern / viele Mathematiker das ist die Def. von Det.

"Produkt der Diagonalelemente nach dem Gaussen"

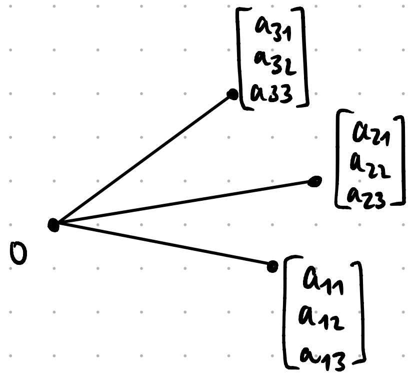
Anwendungen

1) Flächeninhalt / Volumen



Fläche : $\left|\det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}\right|$

dasselbe für Volumen:



$$V = \left|\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}\right|$$

2) $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^3$

$$\underline{u}\times\underline{v} = \det\begin{bmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = (u_2v_3 - v_2u_3)\underline{e}_1 - (u_1v_3 - v_1u_3)\underline{e}_2 + (u_1v_2 - v_1u_2)\underline{e}_3$$

$\uparrow$
Formal
(nur eine Schreibweise. Matematisch macht es kein Sinn.)

Volumen von einer Schachtel mit den Vektoren $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ (= Spatprodukt)

$$|(\underline{u}\times\underline{v})\cdot\underline{w}| = \left|\det\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}\right|$$