§ 7 Eigenwerte

→ nur für quadratische Matrizen $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbb{C}^{n\times n}$

§ 7.1 Motivation

1) $\begin{cases} \dot{u}_1(t) = a_1 u_1(t) \Rightarrow u_1(t) = e^{a_1 t} u_1(0) \\ \dot{u}_2(t) = a_2 u_2(t) \Rightarrow u_2(t) = e^{a_2 t} u_2(0) \\ \dots \qquad\qquad \dots \end{cases}$

$\dot{\underline{u}} = \underline{\underline{D}}\,\underline{u}(t)$ mit $\underline{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n$

$\underline{\underline{D}} = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{bmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{bmatrix}$

→ Lösung $\underline{u}(t) = e^{\underline{\underline{D}}t}\,\underline{u}(0) = \begin{bmatrix} e^{a_1 t} & & & 0 \\ & e^{a_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{a_n t} \end{bmatrix} \underline{u}(0)$

Normalerweise trifft man gewöhnliche Dgl. 1. Ordnung

$\dot{\underline{u}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{u}(t)$ mit $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig, aber fest.

Annahme: es gibt $\underline{\underline{S}}$ sodass

$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{S}}$ mit $\underline{\underline{D}}$ = Diagonalmatrix (Diagonalisierung von $\underline{\underline{A}}$)

↳ $\underline{\underline{A}}$ diagonalisierbar

$\dot{\underline{u}} = \underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{S}}\,\underline{u} \Rightarrow \underbrace{\underline{\underline{S}}\,\dot{\underline{u}}}_{\dot{\underline{v}}(t)} = \underline{\underline{D}}\,\underbrace{\underline{\underline{S}}\,\underline{u}}_{v(t)} \Leftrightarrow$

$\cdot \underline{\underline{S}} \,|$

$\left.\begin{array}{l} \Leftrightarrow \dot{\underline{v}}(t) = \underline{\underline{D}}\,\underline{v}(t) \\ \underline{\underline{D}} \text{ Diagonalmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{v}(t) = e^{\underline{\underline{D}}t}\,\underline{v}(0)$

$\underline{v}(t) = \underline{\underline{S}}\,\underline{u}(t) \Rightarrow \underline{u}(t) = S^{-1}\underline{v}(t)$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{u(t) = \underline{\underline{S}}^{-1} e^{\underline{\underline{D}}t}\,\underline{v}(0)}$$

das ist eine Art, $e^{\underline{\underline{A}}t}$ zu definieren.

in Analysis wird $e^{\underline{\underline{A}}}$ definiert als: $e^{\underline{\underline{A}}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underline{\underline{A}}^k$

V11

27.11.20

Wann ist eine Matrix diagonalisierbar?
d.h. wann gibt es $\underline{\underline{S}}$ invertierbar, sodass $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{S}}^{-1} \underline{\underline{D}}\, \underline{\underline{S}}$ mit $\underline{\underline{D}}$ diagonal

Def: Man sagt, dass die Matrizen $\underline{\underline{A}}$ und $\underline{\underline{B}}$ ähnlich sind, falls es $\underline{\underline{S}}$ invertierbar gibt sodass $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{S}}^{-1} \underline{\underline{B}}\, \underline{\underline{S}}$

Bem: $\underline{\underline{A}}$ diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ $\underline{\underline{A}}$ ähnlich einer Diagonalmatrix

2) $\underline{y} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$ Wann zeigt $\underline{y}$ in der Richtung von $\underline{x}$?

Für welche $\underline{x} \neq \underline{0}$ gilt $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \lambda \underline{x}$?

$\underline{x}$ = EV Eigenvektor
λ = EW Eingenwert
} entsprechend zu

Def: $\lambda \in \mathbb{C}$ EW der Matrix $\underline{\underline{A}}$, falls es einen Vektor $\underline{x} \neq 0$ sodass
$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \lambda \underline{x}$
$\underline{x}$ heisst EV von $\underline{\underline{A}}$ zum EW λ (EV ist gebunden zu seinem EW.)

Bsp:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} ; \quad \underline{\underline{A}}^{100} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 \\ 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Beobachte:

1) $\underline{\underline{A}} \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1$ EW von $\underline{\underline{A}}$

$x_1 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$ EV zu $\lambda_1 = 1$

2) $\underline{\underline{A}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{2}$ EW von $\underline{\underline{A}}$

$x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ EV zu $\lambda_2 = \frac{1}{2}$

$$\underline{\underline{A}}(5\underline{x}_1) = 5\underline{\underline{A}}\,\underline{x}_1 = 5\lambda_1 \underline{x}_1 = \lambda_1 (5x_1) \Rightarrow 5x_1 \text{ EV zu } \lambda_1$$

$\Rightarrow$ EV zu einem EW sind nicht eindeutig. Es gibt unendlich viele.

Bem: Die Menge EV zu EW λ ist ein lin. Raum.

3) $\underline{\underline{A}}\,\underline{x}_1 = \underline{x}_1 \Rightarrow \underline{\underline{A}}^2 \underline{x}_1 = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}_1 = \underline{x}_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow \underline{\underline{A}}^n \underline{x}_1 = \underline{x}_1$

$\underline{x}_1$ ist ein stationärer Zustand für Multiplikation mit Matrix $\underline{\underline{A}}$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x}_2 = \tfrac{1}{2}\underline{x}_2 \Rightarrow \underline{\underline{A}}^2\underline{x}_2 = \underline{\underline{A}}\left(\tfrac{1}{2}\underline{x}_2\right) = \tfrac{1}{2}(\underline{\underline{A}}\,\underline{x}_2) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\underline{x}_2 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2\underline{x}_2 \Rightarrow \dots$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}}^n\underline{x}_n = \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}\right)^n}_{0 \text{ für } n\to\infty}\underline{x}_2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{x}_2$ ist abklingender Zustand für Multiplikation mit $\underline{\underline{A}}$.

4) $\underline{\underline{A}} = [\underline{a}_1 \;\; \underline{a}_2] \Rightarrow \underline{\underline{A}}^2 = \underline{\underline{A}}[\underline{a}_1 \;\; \underline{a}_2] = [\underline{\underline{A}}\,\underline{a}_1 \;\; \underline{\underline{A}}\,\underline{a}_2]$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}}^N = [\underline{\underline{A}}^{N-1}\underline{a}_1 \quad \underline{\underline{A}}^{N-1}\underline{a}_2]$$

<u>Bem:</u> $\{\underline{x}_1, \underline{x}_2\}$ bilden eine Basis in $\mathbb{R}^2$

$$\underline{a}_1 = \underline{x}_1 + \begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.2 \end{bmatrix} = \underline{x}_1 + 0.2\,\underline{x}_2$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{a}_1 = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}_1 + 0.2\,\underline{\underline{A}}\,\underline{x}_2 = \underline{x}_1 + 0.2\cdot\tfrac{1}{2}\underline{x}_2$$

$$\underline{\underline{A}}^N\underline{a}_1 = \underline{\underline{A}}^N\underline{x}_1 + 0.2\,\underline{\underline{A}}^N\underline{x}_2 = \underline{x}_1 + 0.2\cdot\underbrace{\left(\tfrac{1}{2}\right)^N}_{0}\underline{x}_2 \longrightarrow \underline{x}_1$$

$$\underline{a}_2 = \underline{x}_1 - 0.3\,\underline{x}_2 \Rightarrow \underbrace{\underline{\underline{A}}^{N-1}\underline{a}_2}_{\underline{x}_1 \text{ für } x\to\infty} = \underline{x}_1 - 0.3\underbrace{\left(\tfrac{1}{2}\right)^{N-1}}_{0}\underline{x}_2$$

deswegen $\underline{\underline{A}}^{100} = [\underline{x}_1 \;\; \underline{x}_1]$

§7.2 Grundlagen:

<u>Bem:</u> λ EW von $\underline{\underline{A}}$:

d.h. es gibt $\underline{x} \neq \underline{0}$ sodass $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \lambda\underline{x}$ $\Leftrightarrow$

Das HLGS $(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{I}})\underline{x} = 0$ hat Lösungen $\underline{x} \neq \underline{0}$

$\Leftrightarrow (\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{I}})$ ist singulär (d.h. Matrix hat keine Inverse $\Leftrightarrow$ d.h.

$\underline{\underline{A}}$ hat det $=0$) Rang $(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) \leq n-1$)

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0}$ charakteristische Gleichung

Mathematische Induktion: Beweis: das ist eine polynomiale Gleichung:

$$(-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \operatorname{Spur}(\underline{\underline{A}}) \lambda^{n-1} + \ldots + \det \underline{\underline{A}} = 0$$

$\operatorname{Spur}(\underline{\underline{A}}) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$

$$\det(\underline{\underline{A}}) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

(Formel von Vieta)

$$\operatorname{Spur} \underline{\underline{A}} = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$$

(da die polynomiale Gleichung $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) = 0$)

<u>Galois</u>: $n \geq 5$ keine geschlossene Formel für die Lösungen für allgemeine $\underline{\underline{A}}$.

(für $n=2 \rightarrow$ Mitternachtsformel
$n=3$
$n=4$ Formel existieren)

($\Rightarrow$ es gibt ein math. Beweis, dass es keine Formel gibt!
$\Rightarrow$ Lösungen sind nicht eindeutig. $\rightarrow$ numerische Approximation)

$\Rightarrow$ Softwares verwenden dafür iterative Algorithmen die EW, EV numerisch approximiert.

Matlab / Softwares zum Berechnen von EW: eig($\underline{\underline{A}}$); eigs($\underline{\underline{A}}$)

Bem: zur Norm einer Matrix

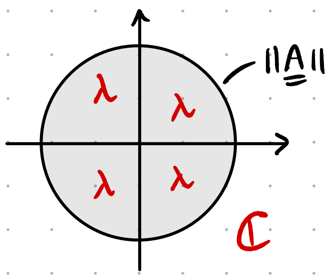
λ EW von $\underline{\underline{A}}$: $\lambda \underline{v} = \underline{\underline{A}}\, \underline{v}$ $\quad | \, \|\cdot\|$ $\quad \Rightarrow$

$$|\lambda| \cdot \|\underline{v}\| = \|\lambda \underline{v}\| = \|\underline{\underline{A}}\, \underline{v}\| \leq \|\underline{\underline{A}}\| \cdot \|\underline{v}\|$$

$\hookrightarrow$ kommt aus der Vektornorm $\|\cdot\|$ $\quad \Rightarrow$

$v \in V \Rightarrow \underline{v} \neq \underline{0} \Rightarrow \|\underline{v}\| \neq 0$

$$|\lambda| \leq \|\underline{\underline{A}}\|$$



Bem: Man kann beweisen: es gibt mindestens ein EW.

Wie berechnet man EW (an der Prüfung)?

Bsp

$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ singuläre Matrix $\rightarrow$ $\text{Kern}(\underline{\underline{A}}) \neq \{\underline{0}\}$ (dim ≥ 1, hier dim $= 1$)

$\Leftrightarrow$ homogenes LGS $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{0}$ hat $\underline{x} \neq 0$

$\Leftrightarrow$ 0 EW von $\underline{\underline{A}}$

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = (1-\lambda)\cdot(4-\lambda) - 2\cdot 2 = \lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda - 5)$$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - 5\lambda = 0$

$\Rightarrow$ EW von $\underline{\underline{A}}$ sind $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$

EV zu λ_1, λ_2?

$\underline{\lambda_1 = 0}$: $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{G.}$

$$x = \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R}$$

$\text{Kern}(\underline{\underline{A}}) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ lin. Raum der Dim. 1

ein EV zu $\lambda_1 = 0$ ist $\underline{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 0$: $(\underline{\underline{A}} - 5\cdot\underline{\underline{I}})\,\underline{x} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{G.}$

$$\Rightarrow \underline{x} = \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\underline{v}} = \alpha \underline{v}$$

$\text{span}\{\underline{v}\}$ enthält alle EV zum EW $\lambda = 5$

ein EV zu $\lambda_2 = 5$ ist $\underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Bem: $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \underline{u}^H \underline{v} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -2 + 2 = 0 \Rightarrow \underline{u} \perp \underline{v}$

Bsp. 2: aus N/S:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

charakteristische Gleichung: $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0$

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = \underbrace{(2-\lambda)\cdot \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} - 1\cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2-\lambda & 1 \end{bmatrix} + 1\cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2-\lambda & 1 \end{bmatrix}}_{\text{nicht so, sonder via Gauss-Elimination machen.}}$$

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2-\lambda \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 1 & 1 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-(2-\lambda)^2 \end{bmatrix}$$

Determinanten: Zeilen vertauschen ⇒ − Determinante.

$$= -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 \\ 0 & 0 & -4+5\lambda-\lambda^2 \end{bmatrix} = -1\cdot(1-\lambda)(-4+5\lambda-\lambda^2) = (\lambda-1)^2(\lambda-4)$$

$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0 \iff (\lambda-1)^2(\lambda-4) = 0$

EW $\lambda_1 = 1$ hat die algebraische Multiplizität (AM) 2

EW $\lambda_2 = 4$ hat die AM 1

EV zu λ_1, λ_2 ?

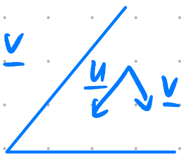
$\underline{\lambda_1 = 1}$: $(\underline{\underline{A}} - 1\,\underline{\underline{I}})\,\underline{x} = \underline{0}$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$x_3 = \alpha$, $x_2 = \beta$ zwei freie Variablen

(Gauss-Elimination von vorher wieder verwenden!)

$$\underline{x} = \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{u}} + \beta \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{v}} = \alpha \underline{u} + \beta \underline{v}$$

Die EW zu $\lambda_1 = 1$ sind die Elemente von $V = \text{span}\{\underline{u}, \underline{v}\}$ $\quad \underline{u} \nparallel \underline{v}$



Dim $V = 2 \Rightarrow \lambda_1 = 1$ hat geometrische Multiplizität 2.

$\underline{\lambda_2 = 4}$: $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad$ Gauss-Elimination: (von vorher benutzen)

$\Rightarrow \quad \underline{x} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha w$

$\underline{w} \perp \underline{u}$ und $\underline{w} \perp \underline{v}$;

dim span $\{\underline{w}\} = 1$

$\Rightarrow \lambda_2 = 4$ hat die GM 1.

Raum, welcher zu λ_1 entspricht, ist orthogonal zum Raum, welcher zu λ_2 entspricht!

Def: GM = dim Ker $(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}})$
= # der lin. unabhängigen EV zum EW λ

AM = wie oft λ unter den Nullstellen von det $(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0$ vorkommt.

Theorem: $1 \leq \text{GM} \leq \text{AM}$

Räume, die zu verschiedenen EW entsprechen, sind orthogonal aufeinander! $\rightarrow$ bei symm. Matrix.

$\rightarrow$ wenn 2 EV zu 1 EW, und man muss sie $\perp$ machen $\rightarrow$ Gram Schmidt.

Bsp. 3 aus N/S

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

det $(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0$ ist

$(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$ hat AM 2

$\lambda_2 = -1$ hat AM 2

aber $\lambda_1 = 1$ hat GM 2

$\lambda_2 = -1$ hat GM $1 < 2 = \text{AM}$

$\hookrightarrow$ d.h. nur 1 freie Variable

Bsp $(\lambda-5)^3(\lambda-2)^2(\lambda-1)(\lambda+2)^{42} = 0$

$\lambda_1 = 5$ hat AM $3 \geq \text{GM} \geq 1$

$\lambda_2 = 2$ hat AM $2 \geq \text{GM} \geq 1$

$\lambda_3 = 1$ hat AM $1 \geq \text{GM} \geq 1$

$\lambda_4 = -2$ hat AM $42 \geq \text{GM} \geq 1$

Theorem: Sei $\underline{\underline{A}}$ $n \times n$ mit n lin. unabhängigen EV

Seien diese EV die Spalten einer Matrix $\underline{\underline{S}}$.

$$\underline{\underline{S}} = [\underline{s}_1 \quad \underline{s}_2 \quad \cdots \quad \underline{s}_n]$$

Dann $$\underline{\underline{S}}^{-1} \underline{\underline{A}} \, \underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \underline{\underline{\Lambda}}$$

mit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ EW von $\underline{\underline{A}}$.

Beweis: $\underline{\underline{A}} \, \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{A}} [\underline{s}_1 \quad \underline{s}_2 \quad \cdots \quad \underline{s}_n] = [\underline{\underline{A}} \underline{s}_1 \quad \underline{\underline{A}} \underline{s}_2 \quad \cdots \quad \underline{\underline{A}} \underline{s}_n]$

($\underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_n$ sind EV!)

$$= [\lambda_1 \underline{s}_1 \quad \lambda_2 \underline{s}_2 \quad \cdots \quad \lambda_n \underline{s}_n]$$

$$= \underline{\underline{S}} \, \underline{\underline{\Lambda}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Somit } \underline{\underline{A}} \, \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}} \, \underline{\underline{\Lambda}} \\ \underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots \underline{s}_n \text{ lin. unabhängig} \Rightarrow \underline{\underline{S}} \text{ invertierbar} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S}}^{-1} \underline{\underline{A}} \, \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{\Lambda}}$$

Bem: Falls $\underline{\underline{A}}$ n lin. unabhängige EV hat, dann ist $\underline{\underline{A}}$ diagonalisierbar

Theorem: (N/S S.154)

Sei $\underline{\underline{A}}$ mit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ EW alle verschieden

Dann entsprechende EV $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_k$ lin. unabhängig.

↳ $\underline{\underline{A}}$ diagonalisierbar.

Beweis: Induktion (Buch).

Bem: $\underline{\underline{A}}$ diagonalisierbar: $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{S}} \, \underline{\underline{\Lambda}} \, \underline{\underline{S}}^{-1}$

$$\underline{\underline{A}} \, \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}} \, \underline{\underline{\Lambda}}$$

$\Rightarrow$ muss $\underline{\underline{S}}$ aus EV von $\underline{\underline{A}}$ bestehen.

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{A}}$ muss n lin. unabhängige EV haben.

(bilden eine Basis in $\mathbb{C}^n$)

Wann ist $\underline{\underline{A}}$ nicht diagonalisierbar?

EW $\underline{\underline{A}}$: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_j, \dots$

AM: $a_1, a_2, \dots, a_j, \dots$ $\quad a_1 + a_2 + \dots + a_j + \dots = n$ alg. Multiplizität

GM: $g_1, g_2, \dots, g_j, \dots$ $\quad 1 \le g_j \le a_j$ geom. "

$g_j = \dim(\mathrm{Ker}(\underline{\underline{A}} - \lambda_j \underline{\underline{I}}))$ Eigenraum zu EW λ_j

↳ Basis $\underline{u}^j_1, \underline{u}^j_2, \dots, \underline{u}^j_{g_j}$

↓ Gram-Schmidt

ONB: $v^j_1, v^j_2, \dots v^j_{g_j}$

$$\underline{\underline{S}} = [\underline{v}^1_1, \underline{v}^1_2, \dots \underline{v}^1_{g_1} \quad \underline{v}^2_1 \quad \underline{v}^2_2 \dots v^2_{g_2} \quad \dots]$$

in $\underline{\underline{S}}$ haben wir n Spalten nur wenn

$$g_j = a_j \text{ für alle } j$$

Somit: falls es ein EW λ_j gibt sodass

$$g_j < a_j$$

dann haben wir nicht $\underline{n}$ lin. unabhängige EV $\Rightarrow$ $\underline{\underline{A}}$ nicht diagonalisierbar!

NICHT JEDE MATRIX IST DIAGONALISIERBAR!

§ 7.3. Symmetrische Matrizen (bzw. Symmetrie):

Symmetrische Matrizen

$\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $A^T = A$

$\underline{\underline{A}} \in \mathbb{C}^{n\times n}$: $A^H = A$

in $\mathbb{R}^n$: $\langle \underline{x}, \underline{\underline{A}}\,\underline{y} \rangle = \underline{x}^T \underline{\underline{A}}\,\underline{y} = \underline{x}^T \underline{\underline{A}}^T \underline{y} = (\underline{\underline{A}}\,\underline{x})^T \underline{y} = \langle \underline{\underline{A}}\,\underline{x}, \underline{y} \rangle$

in $\mathbb{C}^n$: $\langle \underline{x}, \underline{\underline{A}}\,\underline{y} \rangle = \underline{x}^H \underline{\underline{A}}\,\underline{y} = \underline{x}^H \underline{\underline{A}}^H \underline{y} = (\underline{\underline{A}}\,\underline{x})^H \underline{y} = \langle \underline{\underline{A}}\,\underline{x}, \underline{y} \rangle$

Bsp: $\underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ nicht symmetrisch,

$\underline{\underline{Q}}^2 = -\underline{\underline{I}}$; $\underline{\underline{Q}}\,\underline{x} = \lambda \underline{x} \Rightarrow \underline{\underline{Q}}^2 \underline{x} = \lambda \underline{\underline{Q}}\,\underline{x} = \lambda\lambda \underline{x}$

$\Rightarrow -\underline{x} = \lambda^2 \underline{x} \Rightarrow \lambda^2 = -1 \Rightarrow \lambda_1 = i \;, \lambda_2 = -i$

Somit können reele Matrizen komplexe EW haben!

aber sie kommen als Paare von komplex konjugierte Zahlen vor!

Theorem: λ EW von $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n} \rightarrow \bar{\lambda}$ auch EW von $\underline{\underline{A}}$ ($\bar{\lambda}$ = komplex konjugiert von λ)

Beweis: $\underline{x}$ EV zum EW λ von $\underline{\underline{A}}$:

$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \lambda \underline{x} \underset{\text{komplex. konj.}}{\Rightarrow} \overline{\underline{\underline{A}}\,\underline{x}} = \overline{\lambda \underline{x}} \Rightarrow \bar{\underline{\underline{A}}}\,\bar{\underline{x}} = \bar{\lambda}\,\bar{\underline{x}} \Leftrightarrow \underline{\underline{A}}\,\bar{\underline{x}} = \bar{\lambda}\,\bar{\underline{x}}$

$\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n} \rightarrow \bar{\underline{\underline{A}}} = \underline{\underline{A}}$

$\Rightarrow \bar{\lambda}$ ist EW von $\underline{\underline{A}}$ mit $\bar{\underline{x}}$ als EV

$\Rightarrow$ EW kommen immer in Paare λ & $\bar{\lambda}$!

Wann erhalten wir reele EW?

Theorem (Spektralsatz) wichtig!

$\underline{\underline{A}}$ reel symmetrisch / Hermite-Symmetrisch

Dann sind alle EW von $\underline{\underline{A}}$ reel und EV (zu $\lambda_i \neq \lambda_j$) sind orthogonal aufeinander.

Somit ist jede symmetrische Matrix $\underline{\underline{A}}$ durch orthogonale Transformationen diagonalisierbar:

$$\boxed{\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{U}}\,\underbrace{\underline{\underline{\Lambda}}}_{\mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)}\,\underline{\underline{U}}^H \text{ mit } \underline{\underline{U}} \text{ orthogonal / unitär}}$$

Bem:

$\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}} \Rightarrow$ EW reell

$\underline{\underline{A}}^T = -\underline{\underline{A}} \Rightarrow$ EW rein imaginär

$\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}} \Rightarrow |EW| = 1$

$\Big\}$ und alle EV $\perp$ aufeinander

Beweis vom Spektralsatz:

$A = A^T$

$AA^T = A \cdot A = A^T A$

Seien λ, μ EW von $\underline{\underline{A}}$ mit EV $\underline{u}, \underline{v}$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \lambda \underline{u} \;,\; \underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \mu \underline{u}$$

$\underline{\underline{A}}^H = \underline{\underline{A}}$ symmetrie

$$\lambda \underline{v} = \underline{\underline{A}}\,\underline{u} \rightarrow \lambda \underline{v}^H \underline{u} = \underline{v}^H \underline{\underline{A}}\,\underline{u} \overset{\checkmark}{=} \underline{v}^H \underline{\underline{A}}^H \underline{u} = (\underline{\underline{A}}\,\underline{v})^H \underline{u} = (\mu \underline{v})^H \underline{u} = \bar{\mu} \underline{v}^H \underline{u}$$

Somit $\lambda \underline{v}^H \underline{u} = \bar{\mu} \underline{v}^H \underline{u}$

Wähle $\mu = \lambda$ und $\underline{v} = \underline{u}$

$\Big\} \Rightarrow \lambda \underline{u}^H \underline{u} = \bar{\lambda} \underline{u}^H \underline{u}$

$\lambda \|\underline{u}\|_2^2 = \bar{\lambda} \|\underline{u}\|_2^2$

$\underline{u}$ EV $\Rightarrow \underline{u} \neq 0 \Rightarrow \|\underline{u}\|_2 \neq 0$

$\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$. Somit sind alle EW von $\underline{\underline{A}}$ reell.

Somit $\lambda \underline{v}^H \underline{u} = \mu \underline{v}^H \underline{u} \Rightarrow (\lambda - \mu)\, \underline{v}^H \underline{u} = 0$

(da $\mu = \bar{\mu}$ EW sind reell)

Wähle $\lambda \neq \mu \Rightarrow \lambda - \mu \neq 0$

$\Big\} \Rightarrow \underline{v}^H \underline{u} = 0$

d.h. $\underline{v} \perp \underline{u}$

NICE!

Es gibt Matrizen mit EW, die nicht symmetrisch sind. !

d.h. symmetrisch $\Rightarrow$ EW

$\Leftarrow$ ✗

Def. Spektrum der Matrix $\underline{\underline{A}}$ = die Menge der EW von $\underline{\underline{A}}$

Theorem: $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat n orthogonale EV $\Leftrightarrow$ $\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}\underline{\underline{A}}^T$

$\underline{\underline{A}} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hat n orthogonale EV $\Leftrightarrow$ $\underline{\underline{A}}^H \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}\underline{\underline{A}}^H$

Spektralsatz (= Unterteil von diesem ↑ Theorem):

A (Hermite-) symmetrisch $\Rightarrow$

$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{\Lambda}}\,\underline{\underline{U}}^H$ mit $\underline{\underline{U}}$ unitär, $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Bem:

$$\underline{\underline{A}} = [\underline{u}_1 \ \ \underline{u}_2 \ \cdots \ \underline{u}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_1^H \\ \underline{u}_2^H \\ \vdots \\ \underline{u}_n^H \end{bmatrix} =$$

$$= [\lambda_1 \underline{u}_1 \ \ \lambda_2 \underline{u}_2 \ \cdots \ \lambda_n \underline{u}_n] \begin{bmatrix} \underline{u}_1^H \\ \underline{u}_2^H \\ \vdots \\ \underline{u}_n^H \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda_1 \underbrace{\underline{u}_1 \underline{u}_1^H}_{\underline{\underline{P}}_1} + \lambda_2 \underbrace{\underline{u}_2 \underline{u}_2^H}_{\underline{\underline{P}}_2} + \cdots + \lambda_n \underbrace{\underline{u}_n \underline{u}_n^H}_{\underline{\underline{P}}_n} = \text{Summe von Rang 1 Matrizen}$$

$$\underline{\underline{P}}_j^H = \underline{\underline{P}}_j, \quad \underline{\underline{P}}_j^2 = \underline{\underline{P}}_j \underline{\underline{P}}_j = \underline{u}_j \underline{u}_j^H \cdot \underline{u}_j \cdot \underline{u}_j^H = \underline{u}_j \|\underline{u}_j\|^2 \underline{u}_j^H = \underline{u}_j \underline{u}_j^H = \underline{\underline{P}}_j$$

$\underline{\underline{P}}_j$ = orthogonaler Projektor auf $\underline{u}_j$

$$\boxed{\underline{\underline{A}} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \underline{\underline{P}}_j}$$

$j \neq k \Rightarrow \underline{\underline{P}}_j \underline{\underline{P}}_k = \underline{\underline{0}}$ (stehen $\perp$ aufeinander)

$$\sum_{j=1}^{n} \underline{\underline{P}}_j = \sum_{j=1}^{n} \underline{u}_j \underline{u}_j^H = [\underline{u}_1 \ \ \underline{u}_2 \ \cdots \ \underline{u}_n] \begin{bmatrix} \underline{u}_1^H \\ \underline{u}_2^H \\ \vdots \\ \underline{u}_n^H \end{bmatrix} = \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{U}}^H = \underline{\underline{I}}$$

$$\boxed{\underline{\underline{I}} = \sum_{j=1}^{n} \underline{\underline{P}}_j}$$

$\Rightarrow$ alles für symmetrische Matrizen.

Bem: Dasselbe für $\underline{\underline{A}}$ diagonalisierbar versuchen:

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{\Lambda}}\,\underline{\underline{V}}^{-1} = [\underline{v}_1 \cdots \underline{v}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{v}}_1^T \\ \hat{\underline{v}}_2^T \\ \vdots \\ \hat{\underline{v}}_n^T \end{bmatrix}$$

$\hat{v}_1^T$ = erste Zeile in $\underline{\underline{V}}^{-1}$

$\hat{v}_2^T$ = 2. Zeile in $\underline{\underline{V}}^{-1}$

$$\boxed{\underline{\underline{A}} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \underbrace{\underline{v}_j\, \hat{\underline{v}}_j^T}_{\underline{\underline{P}}_j}}$$

$\underline{\underline{P}}_j$ Projektor im Allgemeinen Sinn
(i. A. kein orthogonaler Projektor)

Bem (im Kontext von symm. Matrizen)

Allgemeine Matrizen: Produkt der EW $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ = det $(\underline{\underline{A}})$ = Produkt der Elemente auf der Diag $(\underline{\underline{U}})$ nach LU-Zerlegung (Gauss)

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \det(\underline{\underline{A}}) = u_{11} \cdot u_{22} \cdot \ldots \cdot u_{nn}$$

↳ aus der LU-Zerlegung.

Bem: Für eine symmetrische invertierbare Matrix:

ist die Anzahl EW > 0 gleich mit der Anzahl der Pivote > 0.

LU LR Zerlegung PA = LR

I	A	I
↓	↓	↓
L	R	P

V12

04.12.20

§7.4. Symmetrisch positiv definite Matrizen (s.p.d)

Def: $\underline{A}$ heisst symmetrisch positiv-definit (spd) falls $\underline{A}$ symmetrisch und alle EW >0
[$\Leftrightarrow$ $\underline{A}$ symmetrisch und alle Pivote >0]

Def: $\underline{A}$ heisst symmetrisch positiv semi-definit falls
$\underline{x}^T \underline{A}\, \underline{x} \geq 0$ für alle $\underline{x}$ EW ≥ 0

!

Theorem $\underline{A}$ s.p.d. $\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{x}^T \underline{A}\, \underline{x} \geq 0 & \text{für alle } \underline{x} \\ \underline{x}^T \underline{A}\, \underline{x} = 0 \Rightarrow \underline{x} = 0 \end{cases}$

Beweis: $\underline{A}$ real symmetrisch $\Rightarrow$ $\underline{A} = \underline{S}\,\underline{\Lambda}\,\underline{S}^T$ mit orthogonale $\underline{S}$ und
$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ($\underline{\Lambda}$ = diagonalmatrix mit Eigenwerte als Einträge)

$$\underline{x}^T \underline{A}\, \underline{x} = \underline{x}^T (\underline{S}\,\underline{\Lambda}\,\underline{S}^T)\underline{x} = (\underline{x}^T \underline{S})\,\underline{\Lambda}\,\underbrace{(\underline{S}^T \underline{x})}_{\underline{y}} = \underline{y}^T \Lambda\, \underline{y} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |y_j|^2$$

$\Rightarrow$: Annahme $\underline{A}$ s.p.d. $\Rightarrow \lambda_1 > 0, \dots, \lambda_n > 0 \Rightarrow$
$\underline{x}^T \underline{A}\, \underline{x} \geq 0$ für alle $\underline{x}$

$\left.\begin{array}{l} \underline{x}^T \underline{A}\, \underline{x} = 0 \Rightarrow \lambda_j |y_j|^2 = 0 \text{ für } j = 1, 2, \dots, n \\ \lambda_j > 0 \end{array}\right\}$ $|y_j|^2 = 0$ für $j = 1, \dots, n$
$\Rightarrow y_j = 0$ für $j = 1, \dots, n$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \underline{y} = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{S}^T \underline{x} = \underline{0} \\ \underline{S} \text{ orthogonal} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{x} = \underline{0}$

$\Leftarrow$: Nehme $\underline{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{S}^T \underline{x} \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{S}\,\underline{y} = \underline{S} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0$

$\underline{x}^T \underline{A}\, \underline{x} = \underline{y}^T \underline{\Lambda}\, \underline{y} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |y_j|^2 = \lambda_j \cdot 1$

$\left.\begin{array}{l} \underline{x}^T \underline{A}\, \underline{x} \geq 0 \text{ für alle } \underline{x} \Rightarrow \lambda_1 \geq 0 \\ \underline{x}^T \underline{A}\, \underline{x} = 0 \text{ nur für } \underline{x} = \underline{0} \end{array}\right\} = \lambda_1 > 0$

Dann wähle $\underline{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow \lambda_2 > 0$

usw. $\rightarrow$ alle $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$ ■

Bem: Seien A und B ähnlich (es gibt C invertierbar sodass $A = CBC^{-1}$

Dann haben A und B die gleichen EW

Beweis: λ EW von A mit EV v

ähnliche Matrizen haben gleiche EW.

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow CBC^{-1}v = \lambda v \quad \Rightarrow$$

$$C^{-1} \vert$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow B(C^{-1}v) = \lambda(C^{-1}v) \\ w = C^{-1}v \end{array}\right\} \Rightarrow \quad Bw = \lambda w \Rightarrow$$

λ EW von B mit EV $w = C^{-1}v$

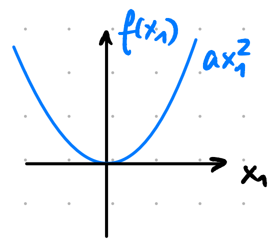
Anwendungen:

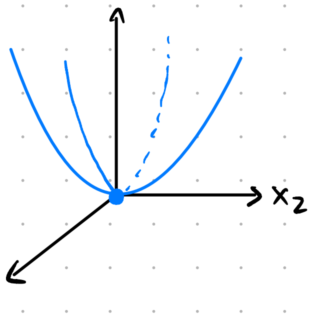
1) A s.p.d. $\Rightarrow$ $\langle x, y \rangle_A \overset{\text{def.}}{=} x^T A y$ Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$!
$\in \mathbb{R}^{n \times n}$

2) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ $x^T A x = a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + c x_2^2$ $\leftarrow$ Ellipse!

$= f(x_1, x_2)$ quadratische Form

A spd $\Leftrightarrow$ $f(x_1, x_2) \geq 0$ für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ und $f(x_1, x_2) = 0$ nur für $x = 0$





Minimum von $f(x_1, x_2)$ ist 0 und erreicht bei $x = 0$

3) Das kann man zu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ spd erweitern

quadratische Form $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^T A x$

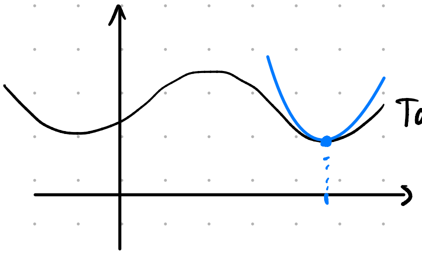
$f(x)$ ist Norm $\Leftrightarrow$ A spd
$\uparrow$
$f(x)$ hat ein einziges Minimum bei $x = 0$ $\quad f(0) = 0$

Das hat Anwendung bei der Minimierung von Funktionen

$f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ $\quad \underline{Df}(\underline{x}) \in \mathbb{R}^d$, $\underline{\underline{D}}^2 f(\underline{x}) \in \mathbb{R}^{d\times d}$

$Df'(x) = 0 \Rightarrow$ kritische Punkte $\underline{x}$

$\underline{\underline{D}}^2 \underline{f}(x) > 0$, positiv definit $\Rightarrow$ Minimum



Bsp: (könnte an Prüfung kommen)

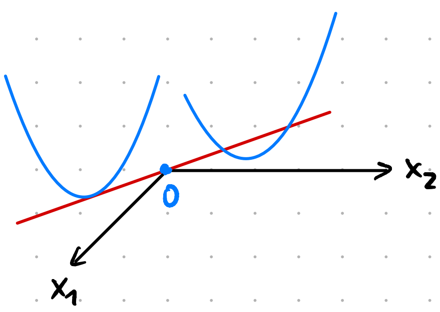
Sei $f(x_1, x_2) = 1x_1^2 + 8x_1x_2 + cx_2^2$. Für welche c ist $f(x_1, x_2) \geq 0$ für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$?

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & c \end{bmatrix}$$

* EW berechnen und bestimme c so dass $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$
  oder
* Trick mit Zeichen von Pivoten symmetrischer Matrizen

$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{R}}$ $\quad \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & c-16 \end{bmatrix}$ $\quad c > 16 \Rightarrow$ s.p.d. Matrix

Bei $c = 16 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ EW 0, 1



$f(x_1, x_2) = 0$ für alle x_1, x_2 mit
$x_1 + 4x_2 = 0$

$\underline{\underline{A}}$ s.p. semidefinit

Wähle $c = 3 \Rightarrow \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -13 \end{bmatrix}$ nicht pos. def!

$\Rightarrow$ es gilt nicht $f(x_1, x_2) \geq 0$ für alle $\underline{x}$.

Bem: $\underline{\underline{A}}$ symmetrisch $\Rightarrow$ Cholesky-Zerlegung

$\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\qquad \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{L}}^T$

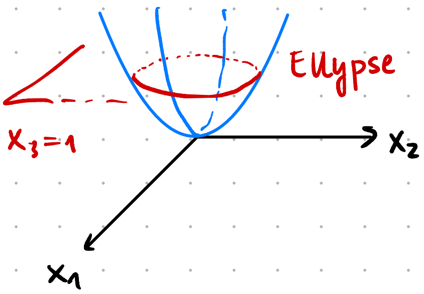
$$f(\underline{x}) = \underline{x}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{x} = \underline{x}^T \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{D}}\,\underbrace{\underline{\underline{L}}^T \underline{x}}_{\underline{y}} = \sum_{k=1}^n d_k y_k^2$$
$$= \sum_{k=1}^n d_k \left(\underline{\underline{L}}^T \underline{x}\right)_k^2$$

Vergleichen sie das zu $\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{\Lambda}}\,\underline{\underline{S}}^T$

$$f(\underline{x}) = \sum_{k=1}^n \lambda_k |y_k|^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k \left(\underline{\underline{S}}^T x\right)_k^2$$

gleich?

4) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ $\quad f(x_1, x_2) = a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + c x_2^2 = \underline{x}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{x}$



$$\left.\begin{array}{l} x^T A x = 1 \\ \underline{\underline{A}} \text{ symmetrisch: } \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{\Lambda}}\,\underline{\underline{S}}^T \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{x}^T \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{\Lambda}}\,\underbrace{\underline{\underline{S}}^T \underline{x}}_{y} = 1 \Leftrightarrow \underline{y}^T \underline{\underline{\Lambda}}\, \underline{y} = 1 \qquad \text{Ellipse}$$

Bsp

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow 5 x_1^2 + 8 x_1 x_2 + 5 x_2^2 = 1$$

$x^T A x > 0$

EW: 9 mit EV $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

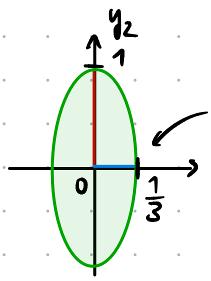
1 mit EV $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{S}}} \underbrace{\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\Lambda}}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{S}}^T}$$

$$\text{Def}= \quad \underline{y} = \underline{\underline{S}}^T \underline{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) \end{bmatrix}$$

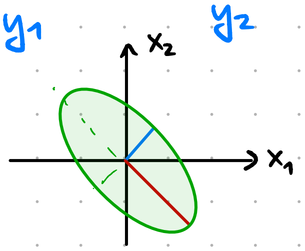
$$\Rightarrow 1 = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 = 9y_1^2 + 1y_2^2 \qquad \text{Ellipse in } y_1 0 y_2$$

$$9y_1^2 + y_2^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{y_1^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{y_2^2}{1^2} = 1$$



$y_2 = 0 \Rightarrow 9y_1^2 = 1 \Rightarrow$ Schnitt bei $\frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$

$$9\left(\underbrace{\frac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}}_{y_1}\right)^2+\left(\underbrace{\frac{x_1-x_2}{\sqrt{2}}}_{y_2}\right)^2=1\ ;\ \underline{x}=\underline{\underline{S}}\,\underline{y}$$



$$\underline{\underline{S}}\,\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{S}}\,1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

Theorem:

! Sei $\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{\Lambda}}\,\underline{\underline{S}}^T$ spd. (mit $\underline{\underline{S}}$ orthogonal)
Dann beschreibt $\underline{x}^T\underline{\underline{A}}\,\underline{x}=1$ eine Ellipse $\quad 1=[x_1\ x_2]\,\underline{\underline{A}}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2$
Die Längen der Halbachsen sind $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$, $\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$

Bem: in n Dimensionen: $\underline{\underline{A}}$ spd $\Rightarrow$ Ellipsoid.

Geometrie: verschiedene Körper, Kurven

$\underline{x}^T\underline{\underline{A}}\,\underline{x}=1$: immer eine Ellipse.

Bsp: $x: [0,T] \to \mathbb{R}$, $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$, $\ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2}$

zeit

$$\ddot{x}=-x-\underbrace{2a\dot{x}}_{\text{Dämpfung vom Oszillator}}$$

$a=$ physikalische Konstante. zu bestimmen, so dass die Oszillation schnell abklingt.

$y=\dot{x}$ so dass $y:[0,T]\to\mathbb{R}$

neue Fktn. einführen

$$\dot{y}=\ddot{x} \Rightarrow \begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-x-2ax\end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}0&1\\-1&-2a\end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}(a)}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

von der Natur, phys. Konstanten
Konstant (hängt nicht von t ab.)

Wie löst man das? $\Rightarrow$ $\underline{\underline{A}}$ diagonalisieren.

EW: $\lambda_\pm=-a\pm\sqrt{a^2-1}$, $\underline{v}_\pm=\begin{bmatrix}1\\\lambda_\pm\end{bmatrix}$

$a > 1 \Rightarrow$ reelle EW $\Rightarrow$ x nimmt mit der Zeit zu! ↯ nicht gut für die Physik.

$0 \leq a < 1 \Rightarrow$ complex konjugierte EW

$$-a \pm i\sqrt{1-a^2} = -a \pm i z(a)$$

$$x(t) = \alpha_1 e^{-at} e^{-iz(a)t} + \alpha_2 e^{-at} e^{iz(a)t}$$

Dämpfungen

Schwingungen

↳ klingt schneller ab wenn a näher an 1 ist

$$a = 1 \Rightarrow \lambda = -1 \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

AM 2
GM 1

EV: $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\lambda_+ = \lambda_-$ $\quad \underline{A}(1)$ <u>nicht</u> diagonalisierbar!

↳ genau der Fall, wo $\underline{A}$ nicht diagonalisierbar ist, ist der Wichtigste & die Matrix, die uns zur Lösung näher bringt.

$$a = 1: \quad x(t) = \alpha_1 e^{-t} + \alpha_2 t e^{-t}$$

Frage: wie erweitert man die Tricks von der Diagonalisierung zu nicht diagonalisierbare Matrizen?

§.7.5.1 Schur-Zerlegung:

Theorem [Schur-Zerlegung]

1) "complexe" Schur-Zerlegung:

$\underline{A}$ $n\times n$ Matrix $\Rightarrow$ gibt es $\underline{U} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitär so dass

$\underline{A} = \underline{U}\,\underline{T}\,\underline{U}^H$ mit $\underline{T}$ obere Dreiecksmatrix $(\underline{U}^H \underline{A}\,\underline{U} = \underline{T})$

2) $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig $\Rightarrow$ gibt es $\underline{U} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal so dass

$$\underline{U}^T \underline{A}\,\underline{U} = \begin{bmatrix} \underline{R}_{11} & \cdots & & \underline{R}_{1m} \\ \underline{0} & \underline{R}_{22} & \cdots & \underline{R}_{2m} \\ \vdots & & & \\ \underline{0} & \cdots \underline{0} & \cdots \underline{0} & \underline{R}_{mm} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Block obere Dreiecksmatrix

mit $\underline{R}_{ii}$ ist eine $\underset{\lambda_i \in \mathbb{R}}{1\times 1}$ oder eine $\underbrace{2\times 2 \text{ Matrix}}_{\text{hat EW } \lambda_i,\ \overline{\lambda}_i}$

Bsp 1)

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

EW: 5, 7

EV: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\underline{T}\,\underline{x} = \lambda \underline{x} \Leftrightarrow (\underline{T} - \lambda \underline{I})\underline{x} = \underline{0}$$

$\underline{\lambda = 5}$:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underline{x} = 0$$

2)

$$\underline{T} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 7 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \underline{R}_{11} & \underline{R}_{12} \\ \underline{R}_{21} & \underline{R}_{22} \end{bmatrix}$$

$R_{22} = 7$

$R_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ hat EW $i, -i$

EW von T: $7, i, -i$

Bem: 1) Schur-Zerlegung ist nicht eindeutig

2) Schurzerlegung (kann) numerisch stabil berechnet werden.

↳ Grundlage für num. Berechnung der EW, EV.

Beweis: (i) Induktion nach Dimension n der Matrix.

$n=1$ klar

Annahme: Aussage stimmt für Dimension $n-1$

Sei $\underline{q}_1$ EV von $\underline{\underline{A}}$ ($n\times n$ Matrix), $\|\underline{q}_1\|_2=1$

$\underline{\underline{A}}\,\underline{q}_1 = t_{11}\underline{q}_1$ mit t_{11} EW von $\underline{\underline{A}}$

Ziel: $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{T}}$ mit $\underline{\underline{U}}$ orthogonal/unitär

Vervollständige $\underline{q}_1$ zu einer ONB in $\mathbb{C}^n$:

$$\underline{\underline{Q}}_1 = [\underline{q}_1 \;\; \underline{q}_2 \;\cdots\; \underline{q}_n]\,;\quad \underline{\underline{Q}}_1 \text{ unitär } \; \underline{\underline{Q}}_1^H\underline{\underline{Q}}_1 = \underline{\underline{I}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{Q}}_1^H\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Q}}_1 = \begin{bmatrix}\underline{q}_1^H\\ \cdots\\ \underline{q}_n^H\end{bmatrix}[\underline{\underline{A}}\,\underline{q}_1 \;\; \underline{\underline{A}}\,\underline{q}_2 \;\cdots\; \underline{\underline{A}}\,\underline{q}_n] = \left[\begin{array}{c|ccc}\underline{q}_1^H\underline{\underline{A}}\,\underline{q}_1 & \underline{q}_1^H\underline{\underline{A}}\,\underline{q}_2 & \cdots & \underline{q}_1^H\underline{\underline{A}}\,\underline{q}_n\\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \underset{(n-1)\times(n-1)}{\underline{\underline{A}}_2} & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

(Orange = gilt für eine beliebige Matrix.)

$$\underline{q}_2^H(\underline{\underline{A}}\,\underline{q}_1) \overset{\underline{q}_1 \text{ EV von } \underline{\underline{A}}}{=} \underline{q}_2^H(t_{11}\underline{q}_1) = t_{11}\underline{q}_2^H\underline{q}_1 \overset{\underline{q}_1\perp\underline{q}_2}{=} t_{11}\cdot 0 = 0$$

$$\underline{q}_n^H(\underline{\underline{A}}\,\underline{q}_1) = \underline{q}_n^H(t_{11}\underline{q}_1) = t_{11}\underline{q}_n^H\underline{q}_1 = 0$$

Bem $$(\underline{q}_1^H\underline{\underline{A}}\,\underline{q}_2)^H = \underline{q}_2^H\underline{\underline{A}}^H\underline{q}_1 \underset{\text{sonst}\neq 0}{\overset{\text{Falls } \underline{\underline{A}}^H=\underline{\underline{A}}}{=}} \underline{q}_2^H\underline{\underline{A}}\,\underline{q}_1 = \underline{q}_2^H t_{11}\underline{q}_1 \underset{\underline{q}_2\perp\underline{q}_1}{=} 0$$

$$\underline{q}_1^H\underline{\underline{A}}\,\underline{q}_1 = \underline{q}_1^H t_{11}\underline{q}_1 = t_{11}\underline{q}_1^H\underline{q}_1 = t_{11}$$

Induktionsannahme: $\underline{\underline{A}}_2 = \underline{\underline{\hat{U}}}\,\underline{\underline{\hat{T}}}\,\underline{\underline{\hat{U}}}^H \Rightarrow \underline{\underline{Q}}_1^H\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Q}}_1 = \left[\begin{array}{c|c} t_{11} & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & \underline{\underline{\hat{U}}}\,\underline{\underline{\hat{T}}}\,\underline{\underline{\hat{U}}}^H \\ 0 & \end{array}\right] =$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \underline{\underline{\hat{U}}} & \\ 0 & & & \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} t_{11} & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & \underline{\underline{\hat{T}}} \\ 0 & \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \underline{\underline{\hat{U}}}^H & \\ 0 & & & \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}} = \underbrace{\underline{\underline{Q}}_1 \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \underline{\underline{\hat{U}}} \end{array}\right]}_{\underline{\underline{U}}} \left[\begin{array}{c|c} t_{11} & 0 \\ \hline 0 & \underline{\underline{\hat{T}}} \end{array}\right] \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \underline{\underline{\hat{U}}}^H \end{array}\right] \underline{\underline{Q}}_1^H}_{\underline{\underline{U}}^H}$$

Bem: Falls $\underline{\underline{A}}^H = \underline{\underline{A}} \Rightarrow \underline{\underline{T}} =$ Diagonalmatrix

$=$ hermite-symm. $\Rightarrow$ normale Matrix

§7.5.2. Jordan-Form:

Achtung: Nur für Theorie, nie für num. Berechnungen verwenden.

Jordan-Block:

$$n \times n \quad \boxed{J_{\lambda,n} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R} / \mathbb{C}}$$

Jordan Matrix: $\boxed{J = \mathrm{diag}(J_{\lambda_1,n_1}, J_{\lambda_2,n_2}, \dots, J_{\lambda_k,n_k})}$

$$= \begin{bmatrix} J_{\lambda_1,n_1} & & & \\ & J_{\lambda_2,n_2} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{\lambda_k,n_k} \end{bmatrix}$$

↳ eine <u>bi</u>diagonale Matrix

$J_{\lambda,n}$ hat EW λ mit AM n und GM 1.

EV $\underline{e}_1$

Die Jordan-Matrix hat EW $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, EV $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_k$

Bsp: 1) $\mathrm{diag}(1,2,3,3,2,1)$ EW $= 1,2,3$ jede mit AM 2

2) $$\left[\begin{array}{cccc|cc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

EW $= -1$ AM 6

GM 2: $\underline{e}_1, \underline{e}_5$

3) $$\left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

EW: 0, 1, 2 jede AM 2

GM 1

$\underline{e}_1, \underline{e}_3, \underline{e}_5$

Theorem: $\underline{A}$ $n \times n$ Matrix $\Rightarrow$ es gibt $\underline{\underline{S}}$ invertierbar, sodass

$$\underline{\underline{S}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{J}} = \mathrm{diag}(J_{\lambda_1,n_1}, \dots, J_{\lambda_k,n_k})$$

$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{S}}^{-1}$ $\quad \lambda_1, \dots, \lambda_k$ EW von $\underline{\underline{A}}$

eindeutig bis Permutation von Jordan-Blöcke

Warum ist diese Methode nicht geeignet? $\Rightarrow$ $\underline{\underline{S}}$ ist nicht orthogonal!

$\Rightarrow$ Rundungsfehler (beim invertieren von $\underline{\underline{S}}$ & $\underline{\underline{S}}$ verändert Längen)

Anwendungen:

$$\underline{\underline{J}} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \underline{\dot{u}} = \underline{\underline{J}}\,\underline{u}$$

$$\dot{u}_3 = 5u_3 \Rightarrow u_3(t) = u_3(0)e^{5t}$$

$$\dot{u}_2 = 5u_2 + u_3 = 5u_2(t) + u_3(0)e^{5t}$$

$$\Rightarrow u_2(t) = (u_2(0) + t\,u_3(0)\,e^{5t})$$

$$\dot{u}_1 = 5u_1 + u_2 \Rightarrow u_1(t) = (u_1(0) + t u_2(0) + \tfrac{1}{2}t^2 u_3(0))\,e^{5t}$$

V13

F.S. Schur-Zerlegung

Theorem: A normal ($A^H A = A A^H$) $\Leftrightarrow$ A diagonalisierbar mit orth. Transf.

Beweis basiert auf die Schur-Zerlegung

$A = QTQ^H$ mit Q unitär, T obere Dreiecksmatrix

$$A \text{ normal: } A^H A = A A^H \Leftrightarrow QT^H \underbrace{Q^H \cdot Q}_{I} TQ^H = QT \underbrace{Q^H \cdot Q}_{I} T^H Q^H$$

$$\Leftrightarrow QT^H T Q^H = Q T T^H Q^H \quad | \cdot Q$$

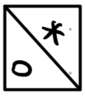
$Q^H |$

(Q ist eine unitäre Matrix)

$$\Rightarrow A \text{ normal} \Leftrightarrow T^H T = T T^H \Leftrightarrow T \text{ normal}$$

Bem: T normal und obere Dreiecksmatrix $\Leftrightarrow$ T Diagonalmatrix

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & & t_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots 0 & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}$$



$$T^H = \begin{bmatrix} \bar t_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \bar t_{12} & \bar t_{22} & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar t_{1n} & \bar t_{2n} & \cdots & \bar t_{nn} \end{bmatrix}$$

$$T^H T = \begin{bmatrix} |t_{11}|^2 & \bar t_{11} t_{12} & \cdots & \bar t_{11} t_{1n} \\ t_{11} \bar t_{12} & |t_{12}|^2 + |t_{22}|^2 & \cdots & \bar t_{12} t_{1n} + \bar t_{22} t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}$$

0

$t \cdot \operatorname{conj}(t) = |t|^2$

$$T T^H = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} |t_{1j}|^2 & & \\ & \sum_{j=2}^{n} |t_{2j}|^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

$|t_{11}|^2 = \sum_{j=1}^{n} |t_{1j}|^2 \Leftrightarrow |t_{11}|^2 = |t_{11}|^2 + \underbrace{\sum_{j=2}^{n} |t_{1j}|^2}_{\overset{!}{=}0} \Leftrightarrow \sum_{j=2}^{n} |t_{1j}|^2 = 0 \Rightarrow t_{1j} = 0$ für $j = 2, \dots, n$

$\sum_{j=2}^{n} |t_{2j}|^2 = |t_{22}|^2 \Rightarrow \sum_{j=3}^{n} |t_{2j}|^2 = 0 \Rightarrow t_{2j} = 0$ für $j = 3, 4, \dots, n$

und so weiter: $t_{ij} = 0$ für $j > i$, $i = 1, 2, \dots, n$

...

$\Rightarrow$ Somit: $\underline{\underline{T}}$ ist eine Diagonalmatrix.

Kommt sehr wahrscheinlich an Prüfung als theoretische Aufgabe!