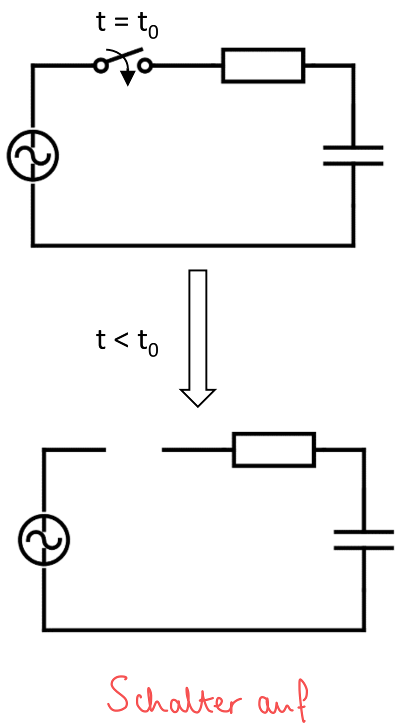
ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

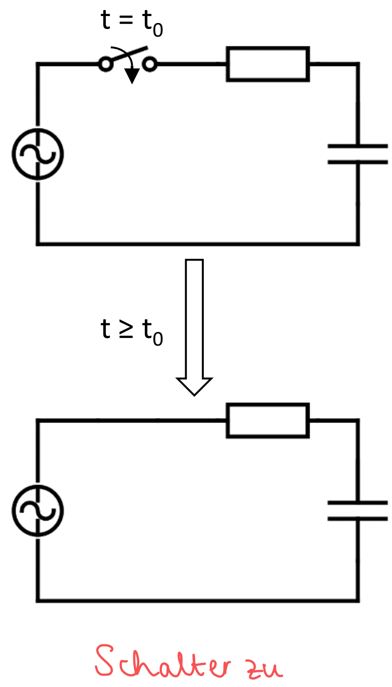
Netzwerke und Schaltungen II

Übung 10
Schaltvorgänge in RLC-Netzwerken

↳ Hauptziel: Differenzialgleichungen aufstellen. Kommt eher nicht an der Prüfung, Konzept ist aber wichtig für später.

- **Bisher: Analyse von linearen Netzwerken mit sinusförmiger Anregung (mit Mitteln der komplexen Wechselstromrechnung) oder konst. Anregung.**
- **Neu: Schaltvorgänge**





- **Aufstellen der (linearen) DGL der Schaltung bei geschl. Schalter**
  - **1.: Maschengleichung (bei Serienschaltung) oder Knotengleichung (bei Parallelschaltung) aufstellen**
  - **2.: Strom-Spannungs-Relation für die einzelnen Komponenten (R, L, C) im Netzwerk aufstellen**
  - **3.: Die Gleichung aus 1. mit Hilfe der Relationen aus 2. nur durch die interessierende Grösse ($u_C(t)$ oder $i_L(t)$) und ihre Ableitungen ausdrücken.**

unsere unbekannten Grössen.

$$\hookrightarrow i_C(t) = \frac{du_C(t)}{dt}$$

$$u_L(t) = \frac{di_L(t)}{dt}$$

***Bemerkung*: Bei komplexeren Netzwerken müssen mehrere Maschen-/Knotengleichungen aufgestellt werden, sodass am Ende ein ganzes System an DGLs zu lösen ist.**

- **Falls das Netzwerk aus <u>einer Kapazität</u> und sonst nur aus mind. einem Widerstand besteht, gilt:**

$$u_C(t) = \underbrace{u_{C,p}(t)}_{=u_C(t\to\infty)} - [u_{C,p}(t_0) - u_C(t_0)]e^{-\frac{t-t_0}{R_{in,C}\cdot C}}$$

Wert der Partikulären (stationären) Lösung bei t = t_0

Anfangswert

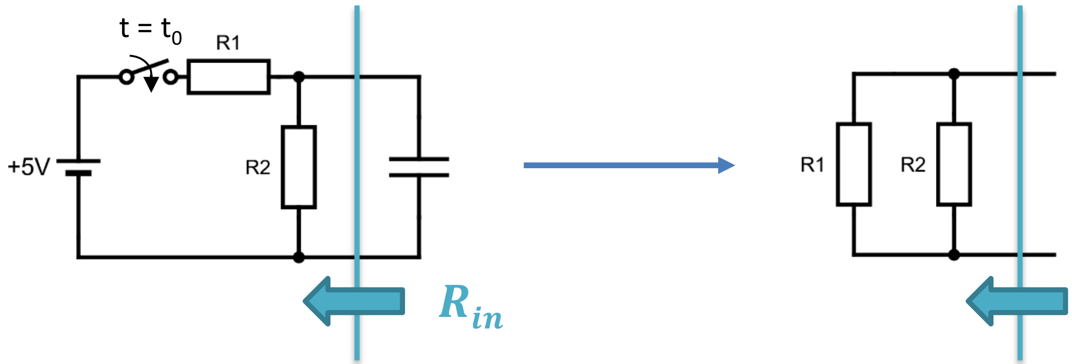
Innenwiderstand, von der Kapazität aus betrachtet bei geschl. Schalter

- **Falls das Netzwerk aus <u>einer Induktivität</u> und sonst nur aus mind. einem Widerstand besteht, gilt:**

$$i_L(t) = i_{L,p}(t) - [i_{L,p}(t_0) - i_L(t_0)]e^{-R_{in,L}\frac{t-t_0}{L}}$$

Berechnungshinweise zu Netzwerken mit einem Energiespeicher

- **Anfangsbedingung/-wert (Wert von u_C bzw. i_L bei $t = t_0$) bestimmen:**
  - Da $u_C(t)$ und $i_L(t)$ stetig sind, ist ihr Anfangswert gerade der Wert bei offenem Schalter zum Zeitpunkt t_0 (D.h. wir führen unsere gewohnten Berechnungen bei der Schaltung mit offenem Schalter durch) d.h. $t \to t_0^-$
- **Innenwiderstand:**
  - Berechnung bei geschl. Schalter
  - Spannungsquellen werden zu Kurzschlüssen
  - Stromquellen werden zu Leerläufen



R_{in}

$R_{in} = R_1 \,||\, R_2$

DGL höherer Ordnung lösen

- **Systeme mit mehr als einem Energiespeicher führen zu DGL höherer Ordnung:** $f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \cdots + a_1 f^{(1)} + a_0 f = g$
- **Suchen eine Lösung der Form** $f(t) = f_h(t) + f_p(t)$

Störterm. Hängt unter anderem von Quellen ab.

- $f_p(t)$ **wählen wir als die partikuläre Lösung der Schaltung bei geschlossenem Schalter. Dies entspricht der stationären Lösung für** $t \to \infty$**.**
- **Die homogene Lösung ist eine Superposition** $\sum_i c_i \mathbf{e}^{\lambda_i t}$**, wobei** λ_i **die Nullstellen des charakteristischen Polynoms** $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ **sind.**
  - **Bei einer k-fachen Nullstelle muss „c_i" durch ein Polynom des Grades $k-1$ ersetzt werden (Bsp.: $\lambda = 4$ ist 3-fache Nst., dann ist der entspr. Lösungsterm** $(b_1 + b_2 t + b_3 t^2)\mathbf{e}^{4t}$ **)**
  - **Die Lösungsterme von komplexen Nst. kann man nach Euler in folgende Form umschreiben:**
    $C_1\mathbf{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t} + C_2\mathbf{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)t} \;\to\; c_1'\mathbf{e}^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2'\mathbf{e}^{\alpha t}\sin(\beta t)$
- **Die Konstanten c_i können mit den Anfangsbedingungen bestimmt werden**

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Laboratory for High
Power Electronic Systems

Netzwerke und Schaltungen II, D-ITET

Übung 10 Beispielaufgabe

Schaltvorgänge

Aufgabe 1 Aufladen eines Kondensators

Ziel der Aufgabe ist es, die Ladekurve $u_C(t)$ eines Kondensators nach dem Umschalten von einer Spannungsquelle U_0 zu einer andere Spannungsquelle U zu bestimmen. Der Schalter werde dabei zum Zeitpunkt $t = t_0$ umgeschalten. Es gilt $U > U_0$.

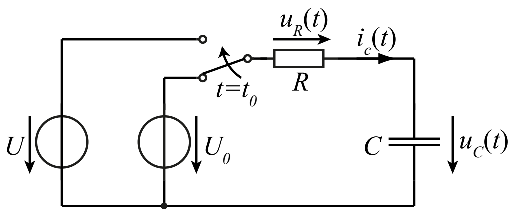


Abbildung 1: Netzwerk mit ohmsch-kapazitiver Last

1.1) Bestimmen Sie den Anfangs- und Endzustand (zu den Zeitpunkten $t = t_0$ resp. $t \to \infty$) der Spannung $u_C(t)$. Gehen Sie davon aus, dass der Schalter bereits sehr lange in der dargestellten Position war.

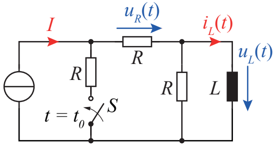
1.2) Bestimmen Sie den Spannungsverlauf $u_C(t)$.

⇒ Offizielle MuLö ist detailliert & gut, versucht sie gut zu verstehen :)

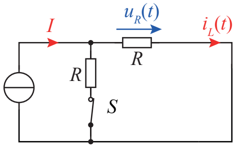
Version: 3. Mai 2019

Weitere Beispiele:

Vereinfachte Analyse mit einem L – Beispiel I



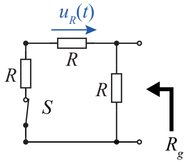
- Schritt 1: Partikuläre Lösung $i_L(t)$ für $t \to \infty$
  Spule $\to$ Kurzschluss
  $i_L(t) \to$ Stromteiler $\to i_{Lp} = \frac{I}{2}$



- Schritt 2:
  Anfangswert $i_L(t_0) = i_{L0}$ aus stationären Zustand vor t_0
  Spule $\to$ Kurzschluss $\to i_{L0} = I$

- Schritt 3: Eingangswiderstand R_g:

$$R_g = \frac{R \cdot 2R}{R + 2R} = \frac{2}{3} R$$



- Schritt 4: Einsetzen in Gesamtlösung

$$\boxed{i_L(t) = i_{Lp}(t) - \left[i_{Lp}(t_0) - i_{L0}\right] \mathrm{e}^{-\frac{R_g}{L}(t - t_0)}}$$

$t > t_0$

$$i_L(t) = \frac{I}{2} - \left(\frac{I}{2} - I\right) \mathrm{e}^{-\frac{2R}{3L}(t - t_0)} = \frac{I}{2}\left(1 + \mathrm{e}^{-\frac{2R}{3L}(t - t_0)}\right)$$

Beispiel: Serienschwingkreis an DC-Spannung I

- 1. Schritt: Aufstellen Differentialgleichungen
  - Maschengleichung $U = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$
  - Strom-/Spannungsbeziehungen

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} \quad u_R(t) = Ri(t) = RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} \quad \text{und} \quad u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = LC\frac{\mathrm{d}^2u_C(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

  - Differentialgleichung

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_C(t) = \frac{U}{LC}}$$

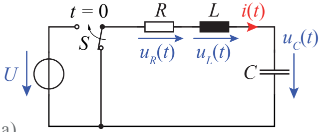
  - Anfangsbedingungen $u_C(t=0) = u_{C0}$ & $i(t=0) = i_{L0}$

- 2. Schritt: Partikuläre Lösung
  - Partikuläre Lösung für Gleichspannungsquelle U aus Netzwerk ($L \to$ KS / $C \to$ LL)

$$u_{Cp}(t) = U \qquad i_p(t) = 0$$

Partikuläre Lösung aus DGL $\to$ Gleichspannung – Ableitungen = 0 (oder aus Netzwerkanalyse)

$$y_p(t) = \frac{1}{a_0}f(t) \quad \to \quad u_{Cp}(t) = U$$



a)