

ÜBUNG 11

17.05.2024 - LINA DE WINDT

Alle Unterlagen auf n.ethz.ch/~ldewindt

Themen von heute:

1. Recap der Theorie von dieser Woche
 - 1.1 Laplace Transformation
 - 1.2 Netzwerkberechnung mit Laplace-Transformation → Zusammenfassung S.12
2. Beispielaufgaben
3. Vorbesprechung der Serie 11

1.1 Laplace Transformation

Die Laplace Transformation ist eine Integraltransformation, die eine gegebene Funktion $u(t)$ vom **reellen Zeitbereich** in eine Funktion $\underline{U}(s)$ im **komplexen Spektralbereich** überführt. Sie ist umkehrbar mittels der inversen Laplace-Transformation.

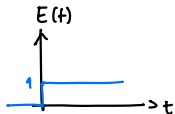
$$\underline{U}(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^{\infty} u(t) e^{-st} dt$$

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\underline{U}(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\tilde{s}}^s \underline{U}(s) e^{st} ds$$

wobei $s = \sigma + j\omega$ die **komplexe Frequenz** ist. ($\sigma > 0$)

Die Laplace-Transformation ist nur auf **kausale Signale** (d.h. $u(t) = 0 \forall t < 0$) mit **kontinuierlichem Zeitbereich** anwendbar.

Sie ist eine Weiterentwicklung der **Fourier-Transformation** (diese 2 Transformationen gehen für $s = j\omega$ ineinander über) $\Rightarrow$ viele Funktionen, die bei der Fouriertransformation nicht konvergieren (und daher nicht transformiert werden können) konvergieren bei der Laplace-Transformation (und können daher transformiert werden). Da viele elektrische Signale genau solche Funktionen sind, ist die Laplace-Transformation sehr praktisch. z.B.:

$$E(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$


$$\text{Fouriertransformation: } \left| \mathcal{F}\{E(t)\} \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{-j\omega t} dt \right| = \left| \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt \right| \leq \int_0^{\infty} |e^{-j\omega t}| dt \rightarrow \infty$$

nach dem Weierstrass-Kriterium divergiert also das Integral $\Rightarrow$ ~~keine~~ Fouriertransformation von $E(t)$!

$$\text{Aber... Laplace-Transformation: } \mathcal{L}\{E(t)\} = \mathcal{F}\{E(t) e^{-\sigma t}\} =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\sigma + j\omega)t} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

$\uparrow$ Laplace-Trafo!

⚠ Wir machen die Laplace-Trafo nur Funktionen, die 0 sind für $t < 0$, ansonsten divergiert es wegen dem $e^{-\sigma t}$ Term



$$\Rightarrow \text{deswegen } \underline{U}(s) = \int_0^{\infty} u(t) e^{-st} dt \quad (\text{Fkt. die } \neq 0 \text{ sind für } t < 0 \text{ werden einfach zu } 0 \text{ gesetzt})$$

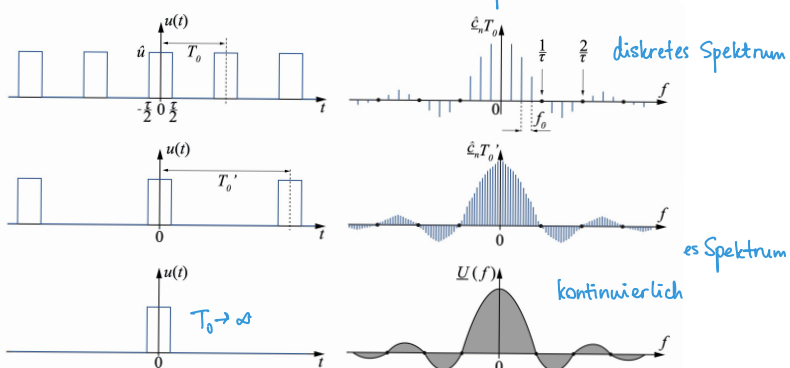
Fourier-Transformation:

$$\underline{U}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{U}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Zeitbereich

Bild-/Spektralbereich



Wichtige Laplace Transformationen

$\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \underline{E}(t)$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{s\tau+1}$	$1 - e^{-t/\tau} \underline{E}(t)$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{s(s\tau+1)}$
$\frac{1}{\tau^2} t e^{-t/\tau} \underline{E}(t)$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{(s\tau+1)^2}$	$\frac{1}{\tau_1 - \tau_2} (e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2}) \underline{E}(t)$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{(s\tau_1+1)(s\tau_2+1)}$
$\text{ramp}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t > 0 \end{cases}$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{s^2}$	$t - \tau + \tau e^{-t/\tau} \underline{E}(t)$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{s^2(\tau s+1)}$
$\cos(\omega t) \underline{E}(t)$	$\circ \rightarrow$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$E(t)$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{s}$
$\sin(\omega t) \underline{E}(t)$	$\circ \rightarrow$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{1}{a^2} (e^{at} - at - 1) E(t)$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{s^2(s-a)}$
$\exp(at) \underline{E}(t)$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{s-a}$			

↳ aus 7.F. S.12

⇒ In Nus2 müsst ihr nie das Integral lösen (ausser wenn es super einfach ist), findet die Funktion (bzw. Teile der Funktion) auf der Zusammenfassung!

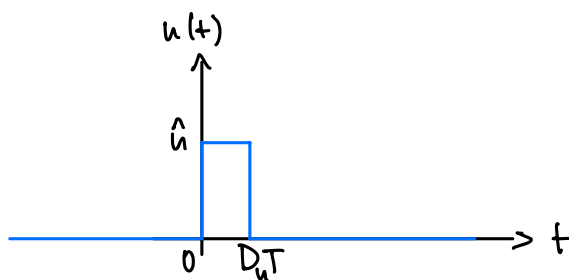
Eigenschaften der Laplace Transformation

$u(at), a > 0$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{a} \underline{U}\left(\frac{s}{a}\right)$	Linearität: (sehr wichtig)	$\lambda u(t) + \mu v(t)$	$\circ \rightarrow$	$\lambda \underline{U}(s) + \mu \underline{V}(s)$
$u(t - t_0)$	$\circ \rightarrow$	$e^{-st_0} \underline{U}(s)$ (Zeitverschiebung)		$e^{-at} u(t)$	$\circ \rightarrow$	$\underline{U}(s + a)$
$-t u(t)$	$\circ \rightarrow$	$\underline{U}'(s)$		$t^2 u(t)$	$\circ \rightarrow$	$\underline{U}''(s)$
$(-t)^n u(t)$	$\circ \rightarrow$	$\underline{U}^{(n)}(s)$		$u''(t)$	$\circ \rightarrow$	$s^2 \underline{U}(s) - s u(0) - u'(0)$
$u'(t)$	$\circ \rightarrow$	$s \underline{U}(s) - u(0)$		period. mit T	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T u(t) e^{-st} dt$
$u^{(n)}(t)$	$\circ \rightarrow$	$s^n \underline{U}(s) - s^{n-1} u(0) - s^{n-2} u'(0) - \dots - u^{(n-1)}(0)$				
$\int_0^t u(\tau) d\tau$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{s} \underline{U}(s)$				

↳ aus 7.F. S.12

Beispiel:

Was ist die Laplace-Transformierte dieses Signals?

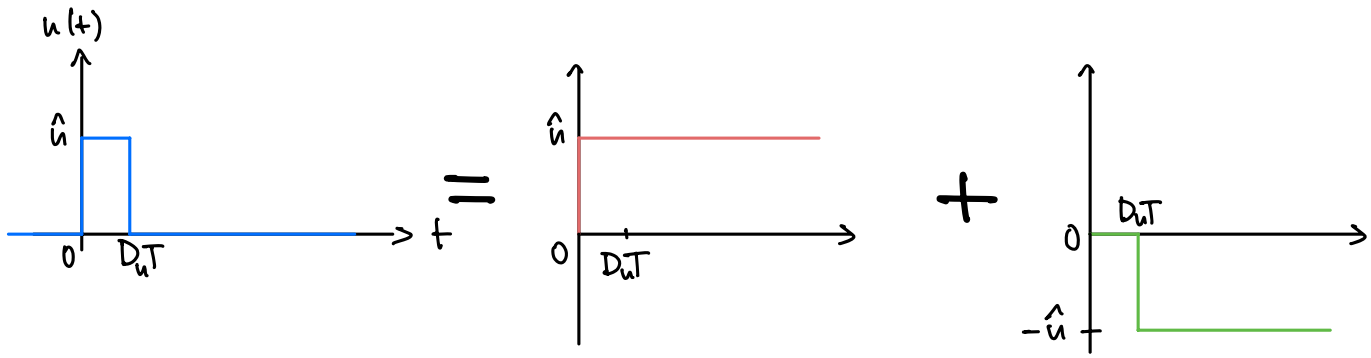


$$u(t) = \begin{cases} \hat{u}, & t \in [0, D_u T] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

1. Methode: Integral lösen:

$$\begin{aligned} \underline{U}(s) &= \int_0^\infty u(t) e^{-st} dt = \int_0^{D_u T} \hat{u} e^{-st} dt = \hat{u} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{D_u T} = \\ &= -\frac{\hat{u}}{s} (e^{-s D_u T} - 1) = \frac{\hat{u}}{s} (1 - e^{-s D_u T}) \end{aligned}$$

2. Methode: keine Integrale lösen, mit der Z.F. arbeiten. $u(t)$ ist nicht auf der Z.F., aber:



$$u(t) = \hat{u} \cdot E(t) - \hat{u} \cdot E(t - D_u T) \quad !!$$

$\Rightarrow$ auf Z.F. finden!

$\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{s^2+1}$
$\frac{1}{\tau^2} t e^{-t/\tau}$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{(s^2+1)^2}$
$\text{ramp}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t > 0 \end{cases}$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{s^2}$
$\cos(\omega t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\exp(at)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{s-a}$

Funktionen

$1 - e^{-t/\tau}$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{s(s^2+1)}$
$\frac{1}{\tau_1 - \tau_2} (e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2})$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{(s\tau_1+1)(s\tau_2+1)}$
$t - \tau + \tau e^{-t/\tau}$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{s^2(\tau s+1)}$
$E(t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{s}$
$\frac{1}{a^2} (e^{at} - at - 1) E(t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{s^2(s-a)}$

&

$u(at), a>0$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{a} U\left(\frac{s}{a}\right)$
$u(t-t_0)$	$\longleftrightarrow$	$e^{-st_0} U(s)$
$-t u(t)$	$\longleftrightarrow$	$U'(s)$
$(-t)^n u(t)$	$\longleftrightarrow$	$U^{(n)}(s)$
$u'(t)$	$\longleftrightarrow$	$s U(s) - u(0)$
$u^{(n)}(t)$	$\longleftrightarrow$	$s^n U(s) - s^{n-1} u(0) - s^{n-2} u'(0) - \dots - u^{(n-1)}(0)$
$\int_0^t u(\tau) d\tau$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{s} U(s)$

Eigenschaften

$\lambda u(t) + \mu v(t)$	$\longleftrightarrow$	$\lambda U(s) + \mu V(s)$
$e^{-at} u(t)$	$\longleftrightarrow$	$U(s+a)$
$t^2 u(t)$	$\longleftrightarrow$	$U''(s)$
$u''(t)$	$\longleftrightarrow$	$s^2 U(s) - s u(0) - u'(0)$
period. mit T	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T u(t) e^{-st} dt$

$$\Rightarrow u_1(t) = \hat{u} \cdot E(t) - \hat{u} \cdot E(t - D_u T)$$

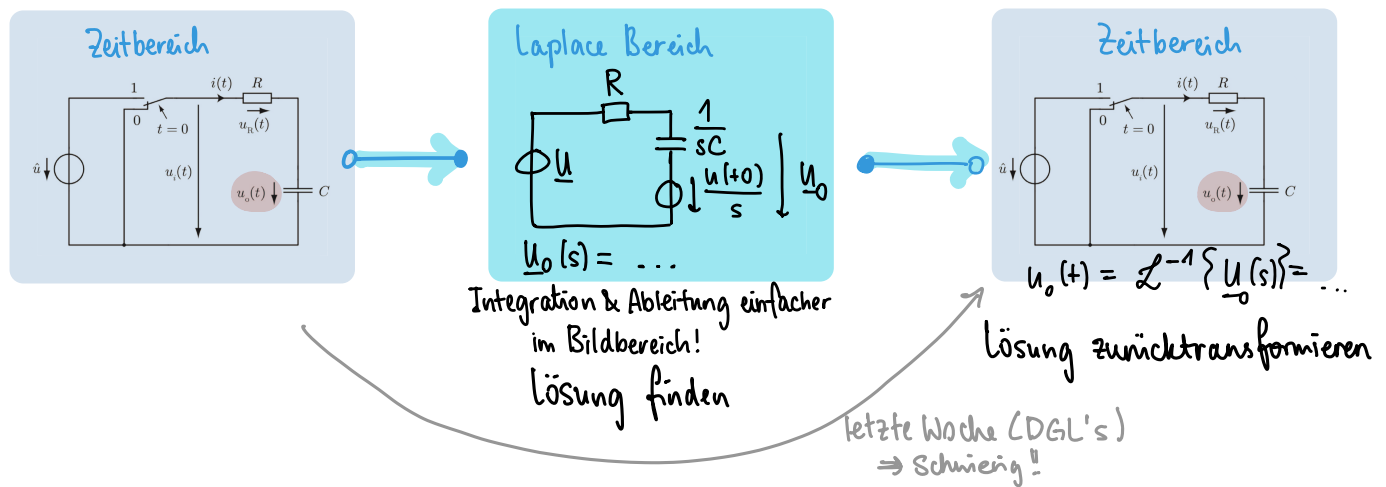
$$\begin{matrix} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \hat{u} & & \hat{u} & & \hat{u} \end{matrix}$$

$$U_1(s) = \frac{\hat{u}}{s} - \frac{\hat{u}}{s} e^{-s D_u T} = \frac{\hat{u}}{s} (1 - e^{-s D_u T})$$

Netzwerkberechnung mit Laplace-Transformation

Schaltvorgänge usw. sind mühsam zu berechnen im Zeitbereich (DGLs n-ter Ordnung!)

Deshalb macht man das in der Regel nicht im Zeitbereich (wie letzte Woche) sondern im Laplace-Bereich. Die Idee ist, dass man alle Berechnungen im Laplace-Bereich macht (da dann keine Ableitungen/Integrale mehr vorkommen) und erst am Schluss die gesuchten Größen in den Zeitbereich zurücktransformiert.



→ alles linear, müssen keine DGL's mehr lösen! :)

Allgemeines Vorgehen:

- 1 Komponenten in den Laplace-Bereich transformieren & Netzwerk neu zeichnen
- 2 Die gesuchten Zweigströme & -spannungen im Laplace-Bereich berechnen (meistens über Maschen- & Knotengleichungen)
- 3 Die gesuchten Größen in den Zeitbereich zurücktransformieren: $u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\}$

Beispielaufgabe:

RC - Schaltung mit Laplace-Transformation

Gegeben ist die Schaltung in Abb.1, bestehend aus einem RC-Glied und einer Spannungsquelle $\hat{u}$. Zum Zeitpunkt $t < 0$ befindet sich der Schalter S in der Position 0 und wird zum Zeitpunkt $t = 0$ nach Position 1 geschaltet. Nach der Zeit $t = D_u T$ (mit $0 \leq D_u \leq 1$) geht der Schalter wieder zurück in die Position 0 und nach einer Periode T beginnt das Schaltprozedere von neuem, so dass sich die Spannung $u_i(t)$ wie in Abb.2 gezeigt, ergibt. Folgende Zahlenwerte sind gegeben: $\hat{u} = 1V$, $R = 10k\Omega$, $C = 1\mu F$, $T = 0.1s$, $D_u = 0.5$

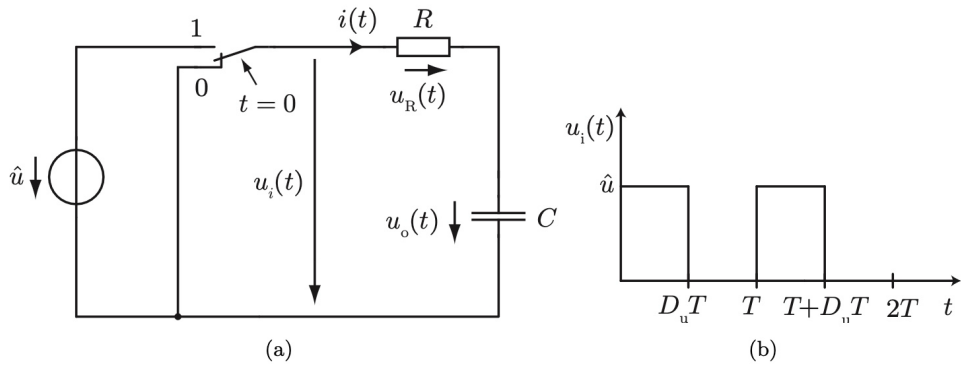


Abbildung 1: 1(a) RC-Schaltung, 1(b) Spannungsverlauf $u_i(t)$

Berechnen Sie den Spannungsverlauf $u_o(t)$ für den Zeitraum $0 \leq t \leq T$ mit Hilfe der Laplace-Transformation unter der Annahme, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ der Kondensator entladen ist.

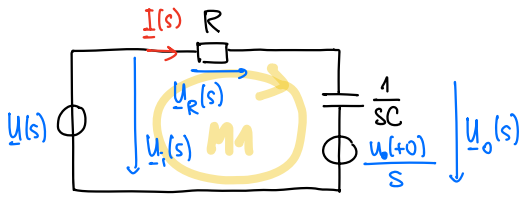
1 Komponenten in den Laplace - Bereich transformieren & Netzwerk neu zeichnen:

Das machen wir mithilfe der Z.F. S. 12:

Transformation der Komponenten	
Widerstand	$U(s) = R I(s)$
Induktivität	$U(s) = sL I(s) - L i(0)$ $i(s) = \frac{1}{sL} U(s) + \frac{i(0)}{s}$
Kondensator	$I(s) = sC U(s) - C u(0)$ $U(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{u(0)}{s}$
Transformator	$U_1(s) = sL_1 I_1(s) - L_1 i_1(0) + sM I_2 - M i_2(0)$ $U_2(s) = sM I_1(s) - M i_1(0) + sL_2 I_2 - L_2 i_2(0)$

$u_o(+0) = 0$ (Kondensator ist entladen zum Zeitpunkt $t=0$)

② Die gesuchten Zweigströme & -spannungen im Laplace-Bereich berechnen (meistens über Maschen- & Knotengleichungen)



M1: $\underline{U}_i(s) = \underline{U}_R(s) + \underline{U}_o(s)$

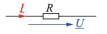
$$\Leftrightarrow \underline{U}_i(s) = R \cdot \underline{I}(s) + \underline{U}_o(s) \quad / \quad \underline{I}(s) = sC \underline{U}_o(s) - \underbrace{C u_o(0)}_{=0}$$

$$\Leftrightarrow \underline{U}_i(s) = R \cdot sC \underline{U}_o(s) + \underline{U}_o(s)$$

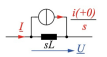
$$\Leftrightarrow \underline{U}_o(s) = \frac{\underline{U}_i(s)}{sRC + 1}$$

Transformation der Komponenten

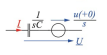
Widerstand $\underline{U}(s) = R \underline{I}(s)$



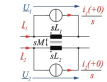
Induktivität $\underline{U}(s) = sL \underline{I}(s) - L i(0)$
 $\underline{I}(s) = \frac{1}{sL} \underline{U}(s) + \frac{i(0)}{s}$



Kondensator $\underline{I}(s) = sC \underline{U}(s) - C u(0)$
 $\underline{U}(s) = \frac{1}{sC} \underline{I}(s) + \frac{u(0)}{s}$



Transformator $\underline{U}_1(s) = sL_1 \underline{I}_1(s) - L_1 i_1(0) + sM \underline{I}_2(s) - M i_2(0)$
 $\underline{U}_2(s) = sM \underline{I}_1(s) - M i_1(0) + sL_2 \underline{I}_2(s) - L_2 i_2(0)$



$\Rightarrow \underline{U}_i(s) = \mathcal{L}\{u_i(t)\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{array}{c} \hat{u} \text{ (nur dieser Bereich interessiert uns, weil nur der } 0 < t < T \text{ gefragt ist in der Aufgabe)} \\ \hat{u} \text{ for } 0 < t < D_u T \\ 0 \text{ for } t > D_u T \end{array} \right\}$

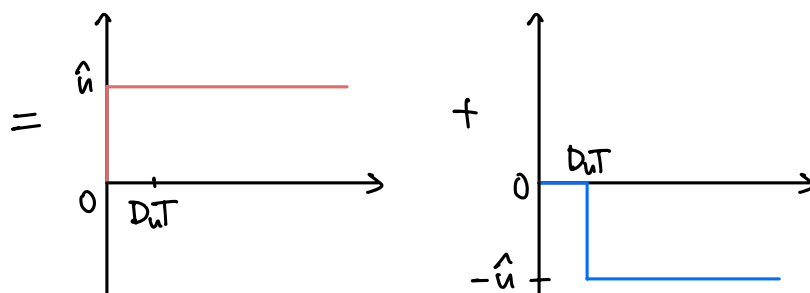
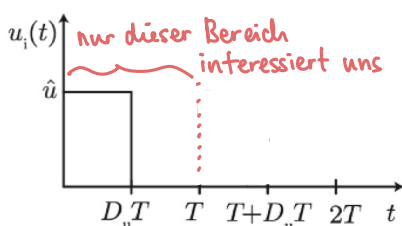
$$\Rightarrow u_i(t) = \begin{cases} \hat{u}, & t \in [0, D_u T] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

vorheriges Beispiel :)

1. Methode: Integral lösen:

$$\begin{aligned} \underline{U}_i(s) &= \int_0^{\infty} u_i(t) e^{-st} dt = \int_0^{D_u T} \hat{u} e^{-st} dt = \hat{u} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{D_u T} = \\ &= -\frac{\hat{u}}{s} (e^{-s D_u T} - 1) = \frac{\hat{u}}{s} (1 - e^{-s D_u T}) \end{aligned}$$

2. Methode: keine Integrale lösen, mit der Z.F. arbeiten. $u(t)$ ist nicht auf der Z.F., aber:



$$u_i(t) = \hat{u} \cdot E(t) - \hat{u} \cdot E(t - D_u T) \quad !!$$

=> auf z.F. finden!

$\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{s\tau+1}$
$\frac{1}{\tau^2} t e^{-t/\tau}$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{(s\tau+1)^2}$
$\text{ramp}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t > 0 \end{cases}$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{s^2}$
$\cos(\omega t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\exp(at)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{s-a}$

Funktionen

$1 - e^{-t/\tau}$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{s(s\tau+1)}$
$\frac{1}{\tau_1 - \tau_2} (e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2})$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{(s\tau_1+1)(s\tau_2+1)}$
$t - \tau + \tau e^{-t/\tau}$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{s^2(\tau s+1)}$
$E(t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{s}$
$\frac{1}{\tau} (e^{at} - at - 1)E(t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{s^2(s-a)}$

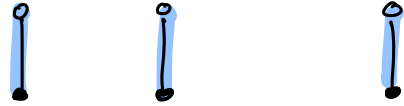
&

$u(at), a>0$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{a} U(\frac{s}{a})$
$u(t-t_0)$	$\longleftrightarrow$	$e^{-st_0} U(s)$
$-t u(t)$	$\longleftrightarrow$	$U'(s)$
$(-t)^n u(t)$	$\longleftrightarrow$	$U^{(n)}(s)$
$u'(t)$	$\longleftrightarrow$	$s U(s) - u(0)$
$u^{(n)}(t)$	$\longleftrightarrow$	$s^n U(s) - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - \dots - u^{(n-1)}(0)$
$\int_0^t u(\tau) d\tau$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{s} U(s)$

Eigenschaften

$\lambda u(t) + \mu v(t)$	$\longleftrightarrow$	$\lambda U(s) + \mu V(s)$
$e^{-at} u(t)$	$\longleftrightarrow$	$U(s+a)$
$t^2 u(t)$	$\longleftrightarrow$	$U''(s)$
$u''(t)$	$\longleftrightarrow$	$s^2 U(s) - s u(0) - u'(0)$
period. mit T	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T u(t)e^{-st} dt$

$$\Rightarrow u_i(t) = \hat{u} \cdot E(t) - \hat{u} \cdot E(t - D_u T)$$



$$\underline{U}_i(s) = \frac{\hat{u}}{s} - \frac{\hat{u}}{s} e^{-s D_u T} = \frac{\hat{u}}{s} (1 - e^{-s D_u T})$$

$$\text{Also ist } \underline{U}_0(s) = \frac{1}{sRC+1} \cdot \frac{\hat{u}}{s} (1 - e^{-s D_u T}) = \frac{\hat{u}}{s(sRC+1)} - \frac{\hat{u}}{s(sRC+1)} e^{-s D_u T}$$

③ Die gesuchten Grössen in den Zeitbereich zurücktransformieren: $u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\underline{U}(s)\}$

$$\underline{U}_0(s) = \frac{\hat{u}}{s(sRC+1)} - \frac{\hat{u}}{s(sRC+1)} e^{-s D_u T}$$

=> auf z.F. finden!

$\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{s\tau+1}$
$\frac{1}{\tau^2} t e^{-t/\tau}$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{(s\tau+1)^2}$
$\text{ramp}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t > 0 \end{cases}$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{s^2}$
$\cos(\omega t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\exp(at)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{s-a}$

Funktionen

$1 - e^{-t/\tau}$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{s(s\tau+1)}$
$\frac{1}{\tau_1 - \tau_2} (e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2})$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{(s\tau_1+1)(s\tau_2+1)}$
$t - \tau + \tau e^{-t/\tau}$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{s^2(\tau s+1)}$
$E(t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{s}$
$\frac{1}{\tau} (e^{at} - at - 1)E(t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{s^2(s-a)}$

&

$u(at), a>0$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{a} U(\frac{s}{a})$
$u(t-t_0)$	$\longleftrightarrow$	$e^{-st_0} U(s)$
$-t u(t)$	$\longleftrightarrow$	$U'(s)$
$(-t)^n u(t)$	$\longleftrightarrow$	$U^{(n)}(s)$
$u'(t)$	$\longleftrightarrow$	$s U(s) - u(0)$
$u^{(n)}(t)$	$\longleftrightarrow$	$s^n U(s) - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - \dots - u^{(n-1)}(0)$
$\int_0^t u(\tau) d\tau$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{s} U(s)$

Eigenschaften

$\lambda u(t) + \mu v(t)$	$\longleftrightarrow$	$\lambda U(s) + \mu V(s)$
$e^{-at} u(t)$	$\longleftrightarrow$	$U(s+a)$
$t^2 u(t)$	$\longleftrightarrow$	$U''(s)$
$u''(t)$	$\longleftrightarrow$	$s^2 U(s) - s u(0) - u'(0)$
period. mit T	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T u(t)e^{-st} dt$

$$\Rightarrow \underline{U}_0(s) = \frac{\hat{u}}{s(sRC+1)} - \frac{\hat{u}}{s(sRC+1)} e^{-s D_u T}$$



zuerst $\underline{U}(s) = \frac{1}{s(sRC+1)}$ zurücktransformieren,
dann alle t mit t - $D_u T$ ersetzen.

$$u_0(t) = \hat{u} \cdot (1 - e^{-t/Rc}) E(t) - \hat{u} (1 - e^{-(t - D_u T)/Rc}) E(t - D_u T)$$

nicht vergessen, damit man weiss ab wann die Teile wirken!

Aufpassen: Zeit-/Frequenzverschiebungen sind meistens die Schwierigkeit in der Aufgabe.

Lösung plotten:

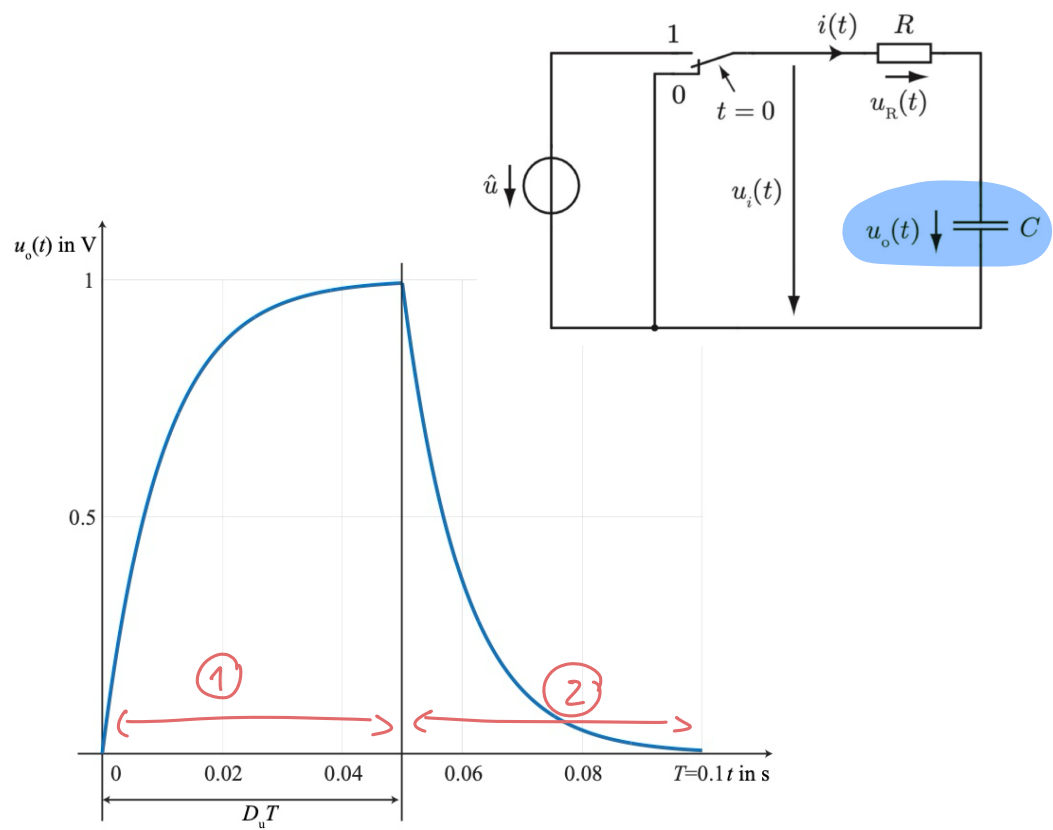


Abbildung 1: Spannungsverlauf $u_o(t)$

Verständnis der Lösung:

exponentiell beschränktes Wachstum!

$$u_o(t) = \underbrace{\hat{u} \cdot \left(1 - e^{-t/Rc}\right) E(t)}_{\substack{\text{C lädt sich} \\ \textcircled{1}}} - \underbrace{\hat{u} \cdot \left(1 - e^{-(t-D_u T)/Rc}\right) E(t-D_u T)}_{\substack{\text{C entlädt sich wieder} \\ \textcircled{2}}}$$

Tipps für die Serie:

- Die Serie ist sehr Prüfungsrelevant $\Rightarrow$ gut für Prüfungsvorbereitung!
- Arbeitet mit der Tabelle auf der z.f. $\Rightarrow$ Integrale nur lösen wenn es einfach ist!
- Arbeitet mit Abkürzungen bei grossen Termen $\Rightarrow \frac{\dots}{\dots} = a$
- Bei Laplace - Aufgaben muss man oft die Partialbruchzerlegung verwenden:

$$\underline{U}(s) = \frac{\hat{u}}{(s-a)(s-b)} \quad \text{---} \quad u(t) = ?$$

Diese Funktion ist nicht auf der z.f. ! :(

$\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{s\tau+1}$	$1 - e^{-t/\tau}$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{s(s\tau+1)}$
$\frac{1}{\tau^2} t e^{-t/\tau}$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{(s\tau+1)^2}$	$\frac{1}{\tau_1 - \tau_2} (e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2})$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{(s\tau_1+1)(s\tau_2+1)}$
$\text{ramp}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t > 0 \end{cases}$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{s^2}$	$t - \tau + \tau e^{-t/\tau}$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{s^2(\tau s+1)}$
$\cos(\omega t)$	$\circ \rightarrow$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$E(t)$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{s}$
$\sin(\omega t)$	$\circ \rightarrow$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{a^2} (e^{at} - at - 1)E(t)$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{s^2(s-a)}$
$\exp(at)$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{s-a}$			

Was nun? $\Rightarrow$ PBZ !

$$\frac{1}{(s-a) \cdot (s-b)} = \frac{A}{s-a} + \frac{B}{s-b} = \frac{A(s-b) + B(s-a)}{(s-a) \cdot (s-b)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(s-a) \cdot (s-b)} = \frac{A(s-b) + B(s-a)}{(s-a) \cdot (s-b)} \quad \bigg/ \cdot (s-a) \cdot (s-b)$$

$$\Leftrightarrow 1 = A(s-b) + B(s-a)$$

$$\Leftrightarrow 1 = As - Ab + Bs - Ba$$

$$\Leftrightarrow 1 = \underbrace{s \cdot (A+B)}_{\stackrel{!}{=0}} - Ab - Ba \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

$\stackrel{!}{=} 0$, da die Gleichung $\forall s$ gelten muss

Wir kriegen die Gleichungen

$$\begin{cases} A+B=0 & \Leftrightarrow B=-A \\ Ab+Ba=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow Ab - Aa = -1$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{a-b}$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{b-a}$$

Also haben wir: $\underline{U}(s) = \frac{\hat{u}}{(s-a) \cdot (s-b)} = \frac{\hat{u}}{a-b} \cdot \frac{1}{s-a} + \frac{\hat{u}}{b-a} \cdot \frac{1}{s-b}$

jetzt können wir ohne Probleme zurücktransformieren:

$\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{s\tau+1}$	$1 - e^{-t/\tau}$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{s(s\tau+1)}$
$\frac{1}{\tau^2} t e^{-t/\tau}$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{(s\tau+1)^2}$	$\frac{1}{\tau_1 - \tau_2} (e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2})$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{(s\tau_1+1)(s\tau_2+1)}$
$\text{ramp}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t > 0 \end{cases}$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{s^2}$	$t - \tau + \tau e^{-t/\tau}$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{s^2(\tau s+1)}$
$\cos(\omega t)$	$\circ \rightarrow$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$E(t)$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{s}$
$\sin(\omega t)$	$\circ \rightarrow$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{a^2} (e^{at} - at - 1)E(t)$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{s^2(s-a)}$
$\exp(at)$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{s-a}$	+ Linearität		

$$\underline{U}(s) = \frac{\hat{u}}{a-b} \cdot \frac{1}{s-a} + \frac{\hat{u}}{b-a} \cdot \frac{1}{s-b}$$

$$u(t) = \frac{\hat{u}}{a-b} e^{at} E(t) + \frac{\hat{u}}{b-a} e^{bt} E(t)$$
