NETZWERKE UND SCHALTUNGEN 2

ÜBUNG 11

17.05.2024- LINA DE WINDT

Alle Unterlagen auf n.ethz.ch/~ldewindt

Themen von heute:

1. Recap der Theorie von dieser Woche
   - 1.1 Laplace Transformation
   - 1.2 Netzwerkberechnung mit Laplace-Transformation → Zusammenfassung S.12
2. Beispielaufgaben
3. Vorbesprechung der Serie 11

1.1 Laplace Transformation

Die Laplace Transformation ist eine Integraltransformation, die eine gegebene Funktion $u(t)$ vom ……………… in eine Funktion $\underline{U}(s)$ im ……………… überführt. Sie ist umkehrbar mittels der inversen Laplace-Transformation.

$$\boxed{} \quad ●\!\!-\!\!\!-\!\!○ \quad \boxed{}$$

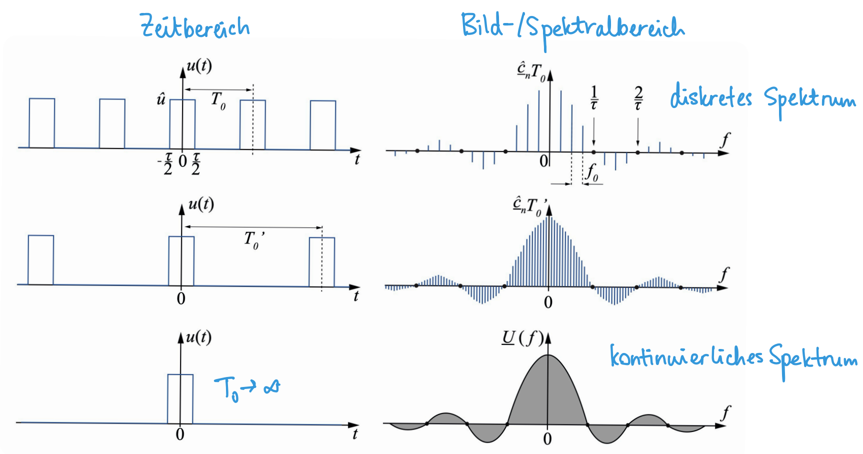
wobei $\boxed{}$ die ……………… ist.

Die Laplace-Transformation ist nur auf kausale Signale (d.h. $u(t)=0 \ \forall t<0$) mit kontinuierlichem Zeitbereich anwendbar.

Sie ist eine ……………… der ……………… (diese 2 Transformationen gehen für $s=j\omega$ ineinander über) ⇒ viele Funktionen, die bei der Fouriertransformation ……………… (und daher nicht transformiert werden können) ……………… bei der Laplacetransformation (und können daher transformiert werden). Da viele elektrische Signale genau solche Funktionen sind, ist die Laplace-Transformation sehr praktisch.

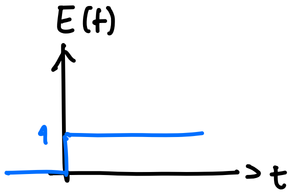
Fourier-Transformation:

$$\boxed{\underline{U}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-j\omega t}\,dt} \qquad \boxed{u(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{U}(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega}$$



Beispiel:

$$E(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



Fouriertransformation:

Laplace-Transformation:

Wichtige Laplace Transformationen

$\frac{1}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau}\,E(t)$	$○\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s\tau+1}$	$1-\mathrm{e}^{-t/\tau}\,E(t)$	$○\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s(s\tau+1)}$
$\frac{1}{\tau^2}\,t\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,E(t)$	$○\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{(s\tau+1)^2}$	$\frac{1}{\tau_1-\tau_2}\left(\mathrm{e}^{-t/\tau_1}-\mathrm{e}^{-t/\tau_2}\right)E(t)$	$○\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{(s\tau_1+1)(s\tau_2+1)}$
$\mathrm{ramp}(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & t>0\end{cases}$	$○\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s^2}$	$t-\tau+\tau\mathrm{e}^{-t/\tau}\,E(t)$	$○\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s^2(\tau s+1)}$
$\cos(\omega t)\,E(t)$	$○\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$E(t)$	$○\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s}$
$\sin(\omega t)\,E(t)$	$○\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{1}{a^2}(e^{at}-at-1)E(t)$	$○\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s^2(s-a)}$
$\exp(at)\,E(t)$	$○\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s-a}$			

↳ aus Z.F. S.12

⇒ In NuS2 müsst ihr nie das Integral lösen (ausser wenn es super einfach ist), findet die Funktion (bzw. Teile der Funktion) auf der Zusammenfassung!

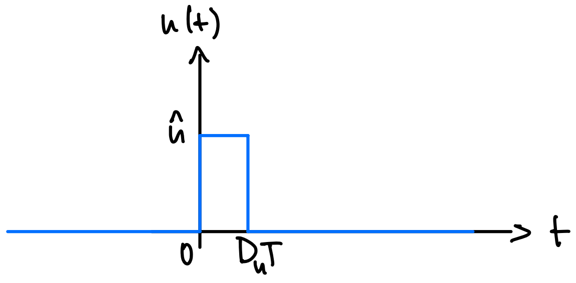
Eigenschaften der Laplace Transformation

$u(at)$, $a>0$	$○\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{a}\,\underline{U}(\frac{s}{a})$	Linearität: (sehr wichtig)	$\lambda\,u(t)+\mu\,v(t)$	$○\!\!-\!\!\bullet$	$\lambda\,\underline{U}(s)+\mu\,\underline{V}(s)$
$u(t-t_0)$	$○\!\!-\!\!\bullet$	$\mathrm{e}^{-st_0}\,\underline{U}(s)$ (Zeitverschiebung)		$\mathrm{e}^{-at}\,u(t)$	$○\!\!-\!\!\bullet$	$\underline{U}(s+a)$
$-t\,u(t)$	$○\!\!-\!\!\bullet$	$\underline{U}'(s)$		$t^2\,u(t)$	$○\!\!-\!\!\bullet$	$\underline{U}''(s)$
$(-t)^n u(t)$	$○\!\!-\!\!\bullet$	$\underline{U}^{(n)}(s)$				
$u'(t)$	$○\!\!-\!\!\bullet$	$s\,\underline{U}(s)-u(0)$		$u''(t)$	$○\!\!-\!\!\bullet$	$s^2\underline{U}(s)-s\,u(0)-u'(0)$
$u^{(n)}(t)$	$○\!\!-\!\!\bullet$	$s^n\underline{U}(s)-s^{n-1}u(0)-s^{n-2}u'(0)-\ldots-u^{(n-1)}(0)$				
$\int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$○\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s}\,\underline{U}(s)$		period. mit T	$○\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}\int_0^T u(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$

↳ aus Z.F. S.12

Beispiel:

Was ist die Laplace-Transformierte dieses Signals?



$$u(t) = \begin{cases} \hat{u}, & t \in [0, D_u T] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

1. Methode:

2. Methode:

Netzwerkberechnung mit Laplace-Transformation

Schaltvorgänge usw. sind mühsam zu berechnen im Zeitbereich (DGLs n-ter  Ordnung!) Deshalb macht man das in der Regel nicht im Zeitbereich (wie letzte Woche) sondern im Laplace-Bereich. Die Idee ist, dass man alle Berechnungen im Laplace-Bereich macht (da dann keine Ableitungen/Integrale mehr vorkommen) und erst am Schluss die gesuchten Grössen in den Zeitbereich zurücktransformiert.

→ alles linear, müssen keine DGL's mehr lösen! :)

Allgemeines Vorgehen:

1. Komponenten in den Laplace-Bereich transformieren & Netzwerk neu zeichnen
2. Die gesuchten Zweigströme & -spannungen im Laplace-Bereich berechnen (meistens über Maschen- & Knotengleichungen)
3. Die gesuchten Grössen in den Zeitbereich zurücktransformieren: $u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\underline{U}(s)\}$

Beispielaufgabe:

RC - Schaltung mit Laplace-Transformation

Gegeben ist die Schaltung in Abb.1, bestehend aus einem RC-Glied und einer Spannungsquelle $\hat{u}$. Zum Zeitpunkt $t < 0$ befindet sich der Schalter S in der Position 0 und wird zum Zeitpunkt $t = 0$ nach Position 1 geschaltet.
Nach der Zeit $t = D_u T$ (mit $0 \leq D_u \leq 1$) geht der Schalter wieder zurück in die Position 0 und nach einer Periode T beginnt das Schaltprozedere von neuem, so dass sich die Spannung $u_i(t)$ wie in Abb.2 gezeigt, ergibt. Folgende Zahlenwerte sind gegeben:
$\hat{u} = 1\text{V}$, $R = 10\text{k}\Omega$, $C = 1\mu\text{F}$, $T = 0.1\text{s}$, $D_u = 0.5$

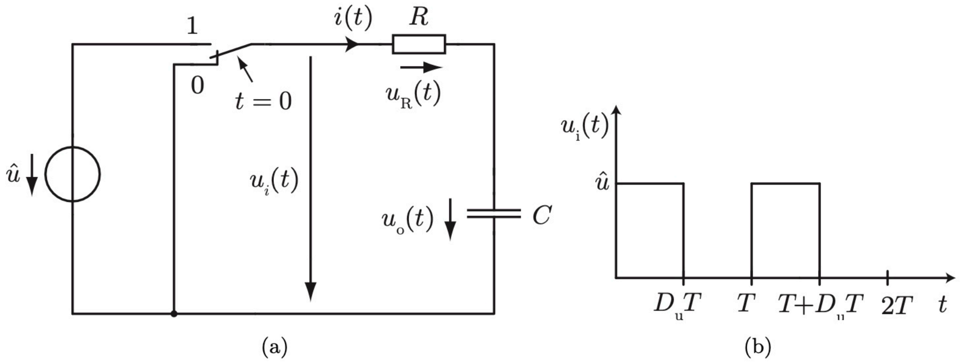
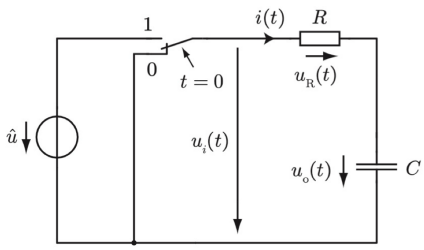


Abbildung 1: 1(a) RC-Schaldung, 1(b) Spannungsverlauf $u_i(t)$

Berechnen Sie den Spannungsverlauf $u_o(t)$ für den Zeitraum $0 \leq t \leq T$ mit Hilfe der Laplace-Transformation unter der Annahme, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ der Kondensator entladen ist.

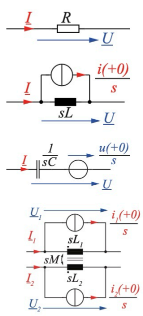
1 Komponenten in den Laplace-Bereich transformieren & Netzwerk neu zeichnen:

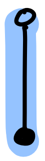
Das machen wir mithilfe der Z.F. S. 12:



Transformation der Komponenten

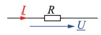
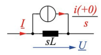
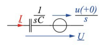
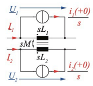
Widerstand	$\underline{U}(s) = R\,\underline{I}(s)$	
Induktivität $u(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$	$\underline{U}(s) = sL\,\underline{I}(s) - L\,i(0)$ $\underline{I}(s) = \frac{1}{sL}\underline{U}(s) + \frac{i(0)}{s}$	
Kondensator $i(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$	$\underline{I}(s) = sC\,\underline{U}(s) - C\,u(0)$ $\underline{U}(s) = \frac{1}{sC}\underline{I}(s) + \frac{u(0)}{s}$	
Transformator	$\underline{U}_1(s) = sL_1\underline{I}_1(s) - L_1 i_1(0) + sM\underline{I}_2 - Mi_2(0)$ $\underline{U}_2(s) = sM\underline{I}_1(s) - Mi_1(0) + sL_2\underline{I}_2 - L_2 i_2(0)$	





② Die gesuchten Zweigströme & -spannungen im Laplace-Bereich berechnen
(meistens über Maschen- & Knotengleichungen)

Transformation der Komponenten

Widerstand	$\underline{U}(s) = R\,\underline{I}(s)$	
Induktivität $u(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$	$\underline{U}(s) = sL\,\underline{I}(s) - L\,i(0)$ $\underline{I}(s) = \frac{1}{sL}\underline{U}(s) + \frac{i(0)}{s}$	
Kondensator $i(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$	$\underline{I}(s) = sC\,\underline{U}(s) - C\,u(0)$ $\underline{U}(s) = \frac{1}{sC}\underline{I}(s) + \frac{u(0)}{s}$	
Transformator	$\underline{U}_1(s) = sL_1\underline{I}_1(s) - L_1 i_1(0) + sM\underline{I}_2 - Mi_2(0)$ $\underline{U}_2(s) = sM\underline{I}_1(s) - Mi_1(0) + sL_2\underline{I}_2 - L_2 i_2(0)$	

③ Die gesuchten Grössen in den Zeitbereich zurücktransformieren: $u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\underline{U}(s)\}$

$\Rightarrow$ auf Z.F. finden!

Funktionen

$\frac{1}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s\tau+1}$	$1-\mathrm{e}^{-t/\tau}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s(s\tau+1)}$
$\frac{1}{\tau^2}\,t\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{(s\tau+1)^2}$	$\frac{1}{\tau_1-\tau_2}\left(\mathrm{e}^{-t/\tau_1}-\mathrm{e}^{-t/\tau_2}\right)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{(s\tau_1+1)(s\tau_2+1)}$
$\mathrm{ramp}(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ t & t>0 \end{cases}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s^2}$	$t-\tau+\tau\mathrm{e}^{-t/\tau}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s^2(\tau s+1)}$
$\cos(\omega t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$E(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s}$
$\sin(\omega t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{1}{a^2}(e^{at}-at-1)E(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s^2(s-a)}$
$\exp(at)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s-a}$			

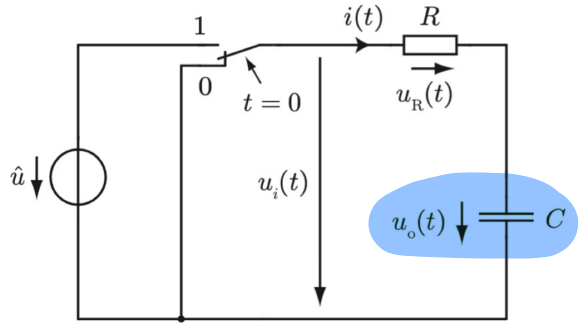
&

Eigenschaften

$u(at),\ a>0$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{a}\,\underline{U}(\frac{s}{a})$	$\lambda\,u(t)+\mu\,v(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\lambda\,\underline{U}(s)+\mu\,\underline{V}(s)$
$u(t-t_0)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\mathrm{e}^{-st_0}\,\underline{U}(s)$	$\mathrm{e}^{-at}\ u(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\underline{U}(s+a)$
$-t\,u(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\underline{U}'(s)$	$t^2\,u(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\underline{U}''(s)$
$(-t)^n u(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\underline{U}^{(n)}(s)$			
$u'(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$s\,\underline{U}(s)-u(0)$	$u''(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$s^2\underline{U}(s)-s\,u(0)-u'(0)$
$u^{(n)}(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$s^n\underline{U}(s)-s^{n-1}u(0)-s^{n-2}u'(0)-\ldots-u^{(n-1)}(0)$			
$\int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s}\,\underline{U}(s)$	period. mit T	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}\int_0^T u(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$

Aufpassen: Zeit-/ Frequenzverschiebungen sind meistens die Schwierigkeit in der Aufgabe.

Lösung plotten:



Verständnis der Lösung:

Tipps für die Serie:

- Die Serie ist sehr Prüfungsrelevant $\Rightarrow$ gut für Prüfungsvorbereitung!
- Arbeitet mit der Tabelle auf der Z.F. $\Rightarrow$ Integrale nur lösen wenn es einfach ist!
- Arbeitet mit Abkürzungen bei grossen Termen $\Rightarrow$ $\dfrac{\cdots}{\cdots} = a$
- Bei Laplace - Aufgaben muss man oft die Partialbruchzerlegung verwenden:

$$\underline{U}(s) = \frac{\hat{u}}{(s-a)(s-b)} \quad \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \quad u(t) = ?$$

Diese Funktion ist nicht auf der Z.F. ! :(

$\frac{1}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s\tau+1}$	$1-\mathrm{e}^{-t/\tau}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s(s\tau+1)}$
$\frac{1}{\tau^2}\,t\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{(s\tau+1)^2}$	$\frac{1}{\tau_1-\tau_2}\left(\mathrm{e}^{-t/\tau_1}-\mathrm{e}^{-t/\tau_2}\right)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{(s\tau_1+1)(s\tau_2+1)}$
$\mathrm{ramp}(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ t & t>0 \end{cases}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s^2}$	$t-\tau+\tau\mathrm{e}^{-t/\tau}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s^2(\tau s+1)}$
$\cos(\omega t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$E(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s}$
$\sin(\omega t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{1}{a^2}(e^{at}-at-1)E(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s^2(s-a)}$
$\exp(at)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s-a}$			

Was nun? $\Rightarrow$ PBZ!

$$\frac{1}{(s-a)\cdot(s-b)} =$$

jetzt können wir ohne Probleme zurücktransformieren:

$\frac{1}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s\tau+1}$	$1-\mathrm{e}^{-t/\tau}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s(s\tau+1)}$
$\frac{1}{\tau^2}\,t\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{(s\tau+1)^2}$	$\frac{1}{\tau_1-\tau_2}\left(\mathrm{e}^{-t/\tau_1}-\mathrm{e}^{-t/\tau_2}\right)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{(s\tau_1+1)(s\tau_2+1)}$
$\mathrm{ramp}(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & t>0\end{cases}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s^2}$	$t-\tau+\tau\mathrm{e}^{-t/\tau}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s^2(\tau s+1)}$
$\cos(\omega t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$E(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s}$
$\sin(\omega t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{1}{a^2}\left(e^{at}-at-1\right)E(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s^2(s-a)}$
$\exp(at)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s-a}$			

+ Linearität

$\underline{U}(s) =$