NETZWERKE UND SCHALTUNGEN 2

ÜBUNG 12

24.05.2024 - LINA DE WINDT

Alle Unterlagen auf n.ethz.ch/~ldewindt

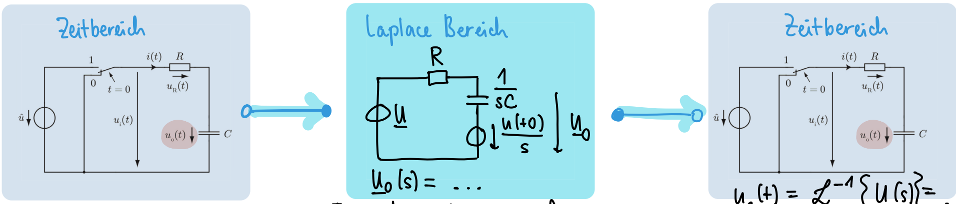
Themen von heute:

1. Recap Laplace Transformation
   ↳ komplexeres Beispiel
2. Einführung in Verstärker

1. Recap Laplace Transformation

Warum Laplace Transformation?

=> Dank der Laplace Transformation muss man auch bei der Berechnung von Netzwerken mit nicht-sinusförmigen Signalen oder Schaltvorgängen keine DGL's aufstellen:



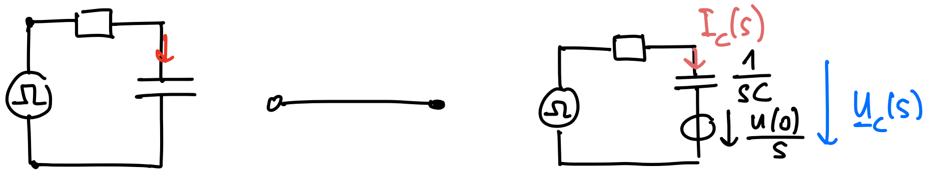
$U_0(s) = \ldots$

Integration & Ableitung einfacher im Bildbereich!

Lösung finden

$u_0(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\underline{U}_0(s)\} = \ldots$

Lösung zurücktransformieren



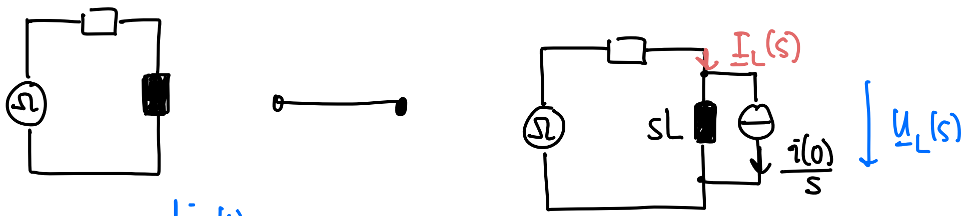
$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(t)\,dt$$

$u(at),\ a>0$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{a}\underline{U}(\frac{s}{a})$	Linearität: (sehr wichtig) $\lambda u(t) + \mu v(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\lambda \underline{U}(s) + \mu \underline{V}(s)$
$u(t-t_0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-st_0}\underline{U}(s)$ (Zeitverschiebung)	$e^{-at}u(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\underline{U}(s+a)$
$-t\,u(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\underline{U}'(s)$	$t^2 u(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\underline{U}''(s)$
$(-t)^n u(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\underline{U}^{(n)}(s)$			
$u'(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$s\underline{U}(s) - u(0)$	$u''(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$s^2\underline{U}(s) - s\,u(0) - u'(0)$
$u^{(n)}(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$s^n\underline{U}(s) - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - \ldots - u^{(n-1)}(0)$			
$\int_0^t u(\tau)\,d\tau$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s}\underline{U}(s)$	period. mit T	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T u(t)e^{-st}\,dt$

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \underline{U}_C(s) = \frac{1}{sC}\,\underline{I}(s) + \frac{u(0)}{s}$$

$$(\Leftrightarrow)\quad \mathcal{L}\{i_C(t)\} = \underline{I}_C(s) = sC\underline{U}(s) - Cu(0)$$

Strom-Spannung Beziehungen sind linear :)



$$u_L(t) = L\cdot\frac{di_L(t)}{dt}$$

$u(at),\ a>0$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{a}\underline{U}(\frac{s}{a})$	Linearität: (sehr wichtig) $\lambda u(t) + \mu v(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\lambda \underline{U}(s) + \mu \underline{V}(s)$
$u(t-t_0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-st_0}\underline{U}(s)$ (Zeitverschiebung)	$e^{-at}u(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\underline{U}(s+a)$
$-t\,u(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\underline{U}'(s)$	$t^2 u(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\underline{U}''(s)$
$(-t)^n u(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\underline{U}^{(n)}(s)$			
$u'(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$s\underline{U}(s) - u(0)$	$u''(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$s^2\underline{U}(s) - s\,u(0) - u'(0)$
$u^{(n)}(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$s^n\underline{U}(s) - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - \ldots - u^{(n-1)}(0)$			
$\int_0^t u(\tau)\,d\tau$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s}\underline{U}(s)$	period. mit T	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T u(t)e^{-st}\,dt$

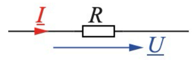
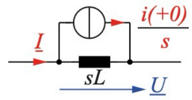
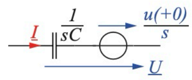
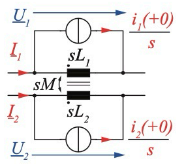
$$\mathcal{L}\{u_L(t)\} = \underline{U}_L(s) = sL\underline{I}_L(s) - Li(0)$$

$$(\Leftrightarrow)\quad \mathcal{L}\{i_L(t)\} = \underline{I}_L(s) = \frac{1}{sL}\underline{U}_L(s) + \frac{i(0)}{s}$$

Strom-Spannung Beziehungen sind linear :)

Die Transformationen der Strom-Spannungs Beziehungen der Bauelemente (R, L, C, Transformator) vom Zeitbereich in den Laplacebereich ist immer gleich. Deswegen verwendet man i.d.R. einfach die Tabelle auf der Zusammenfassung:

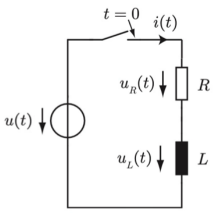
Transformation der Komponenten in den Laplace Bereich

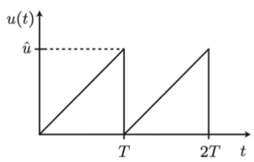
Widerstand	$\underline{U}(s) = R\,\underline{I}(s)$	
Induktivität $u(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$	$\underline{U}(s) = sL\,\underline{I}(s) - L\,i(0)$ $\underline{I}(s) = \frac{1}{sL}\underline{U}(s) + \frac{i(0)}{s}$	
Kondensator $i(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$	$\underline{I}(s) = sC\,\underline{U}(s) - C\,u(0)$ $\underline{U}(s) = \frac{1}{sC}\underline{I}(s) + \frac{u(0)}{s}$	
Transformator	$\underline{U}_1(s) = sL_1\underline{I}_1(s) - L_1 i_1(0) + sM\underline{I}_2 - Mi_2(0)$ $\underline{U}_2(s) = sM\underline{I}_1(s) - Mi_1(0) + sL_2\underline{I}_2 - L_2 i_2(0)$	

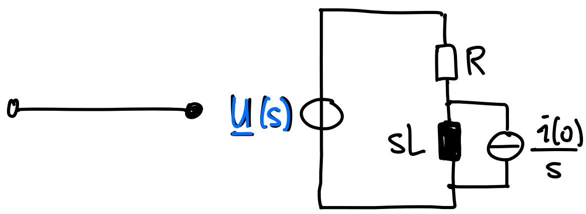
Wie man sieht, sind alle Gleichungen linear => viel einfacher zu lösen als DGLs!

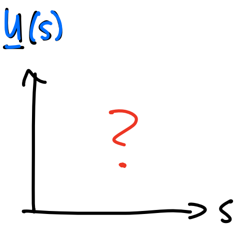
Deshalb macht man NW-Berechnungen mit der Laplace-Transformation.

Das aufwändigste bei NW-Berechnungen mit der Laplace-Transformation ist meistens die Transformation der Quellgrösse in den Laplace-Bereich:









Solche Laplace Transformationen von Hand mit dem Integral ($\underline{U}(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^\infty u(t)e^{-st}\,dt$) zu berechnen kann sehr aufwändig werden. Deshalb verwenden wir in der Regel die Transformationstabelle:

Zeitbereich $\xrightarrow{\mathcal{L}}$	Laplace Bereich	Zeitbereich $\xrightarrow{\mathcal{L}}$	Laplace Bereich
$\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\,E(t)$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s\tau+1}$	$1 - e^{-t/\tau}\,E(t)$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s(s\tau+1)}$
$\frac{1}{\tau^2}\,t\,e^{-t/\tau}\,E(t)$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{(s\tau+1)^2}$	$\frac{1}{\tau_1-\tau_2}\,(e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2})\,E(t)$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{(s\tau_1+1)(s\tau_2+1)}$
$\mathrm{ramp}(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ t & t>0 \end{cases}$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s^2}$	$t - \tau + \tau e^{-t/\tau}\,E(t)$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s^2(\tau s+1)}$
$\cos(\omega t)\,E(t)$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$E(t)$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s}$
$\sin(\omega t)\,E(t)$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{1}{a^2}(e^{at} - at - 1)E(t)$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s^2(s-a)}$
$\exp(at)\,E(t)$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s-a}$		
Zeitbereich $\xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}}$	Laplace Bereich	Zeitbereich $\xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}}$	Laplace Bereich

Die Laplace-Transformation hat folgende Eigenschaften:

$u(at),\ a>0$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{a}\,\underline{U}(\frac{s}{a})$	Linearität: (sehr wichtig) $\lambda u(t) + \mu v(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\lambda \underline{U}(s) + \mu \underline{V}(s)$
$u(t-t_0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-st_0}\,\underline{U}(s)$ (Zeitverschiebung)	$e^{-at}\,u(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\underline{U}(s+a)$
$-t\,u(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\underline{U}'(s)$	$t^2\,u(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\underline{U}''(s)$
$(-t)^n u(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\underline{U}^{(n)}(s)$			
$u'(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$s\,\underline{U}(s) - u(0)$	$u''(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$s^2\underline{U}(s) - s\,u(0) - u'(0)$
$u^{(n)}(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$s^n\underline{U}(s) - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - \ldots - u^{(n-1)}(0)$			
$\int_0^t u(\tau)\,d\tau$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s}\,\underline{U}(s)$	period. mit T	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T u(t)e^{-st}\,dt$

Bei der NW-Berechnung mit der Laplace-Transformation kann man wie folgt vorgehen:

1. Komponenten in den Laplace-Bereich transformieren & Netzwerk neu zeichnen
2. Die gesuchten Zweigströme & -spannungen im Laplace-Bereich berechnen (meistens über Maschen- & Knotengleichungen)
3. Die gesuchten Grössen in den Zeitbereich zurücktransformieren: $u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\underline{U}(s)\}$

Aufgabe:

RL - Schaltung mit Laplace-Transformation

Die Spannungsquelle in Abb. 1 liefert die im rechten Teilbild dargestellte periodische Sägezahnspannung mit der Amplitude $\hat{u}$ und der Periodendauer T.

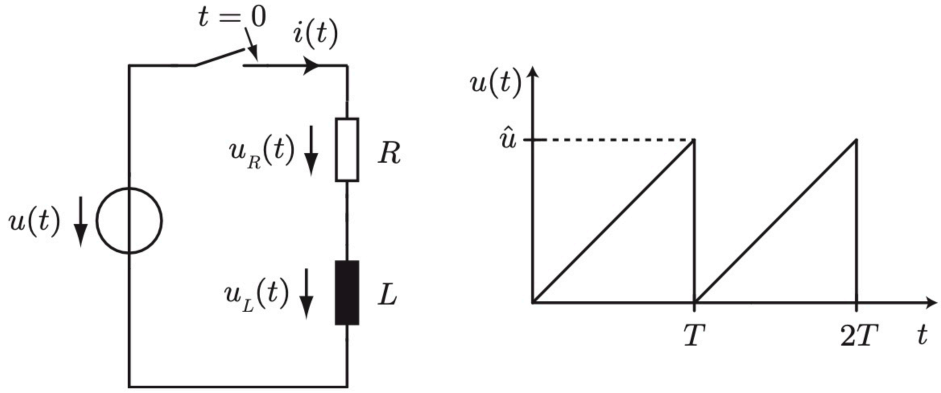
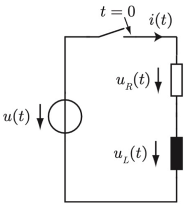
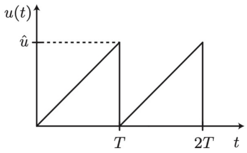


Abbildung 1: Sägezahnspannung an RL-Schaltung

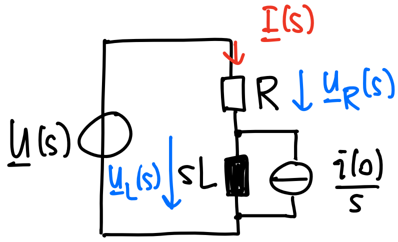
Bestimmen sie den Verlauf des Stromes $i(t)$ für den Zeitbereich $0 \le t \le 2T$. Stellen Sie den Zeitverlauf für $R = 1\Omega, L = 10mH, \hat{u} = 10$V und $T = 100\mu s$ dar.

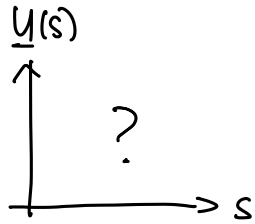
① Komponenten in den Laplace - Bereich transformieren & Netzwerk neu zeichnen



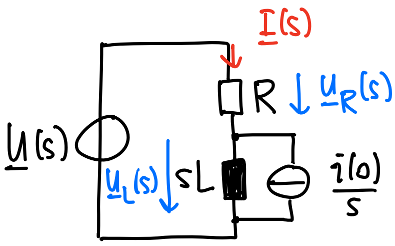


$\circ\!\!\xrightarrow{\ \mathcal{L}\ }\!\!\bullet$





② Die gesuchten Zweigströme & -spannungen im Laplace - Bereich berechnen



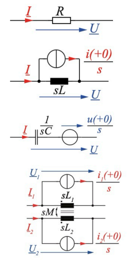
$$\underline{I}(s) = \frac{1}{sL}\underline{U}_L(s) + \frac{i(+0)}{s}$$

$$\Rightarrow \underline{U}_L(s) = \underline{U}(s) - \underline{U}_R(s)$$

$$\Leftrightarrow \underline{U}_L(s) = \underline{U}(s) - \underline{I}(s)\cdot R$$

Transformation der Komponenten in den Laplace Bereich

Widerstand		$\underline{U}(s) = R\,\underline{I}(s)$
Induktivität	$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$	$\underline{U}(s) = sL\,\underline{I}(s) - L\,i(0)$ $\underline{I}(s) = \frac{1}{sL}\underline{U}(s) + \frac{i(0)}{s}$
Kondensator	$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$	$\underline{I}(s) = sC\,\underline{U}(s) - C\,u(0)$ $\underline{U}(s) = \frac{1}{sC}\underline{I}(s) + \frac{u(0)}{s}$
Transformator		$\underline{U}_1(s) = sL_1\underline{I}_1(s) - L_1 i_1(0) + sM\underline{I}_2 - Mi_2(0)$ $\underline{U}_2(s) = sM\underline{I}_1(s) - Mi_1(0) + sL_2\underline{I}_2 - L_2 i_2(0)$



$$\Rightarrow \underline{I}(s) = \frac{1}{sL}\left(\underline{U}(s) - \underline{I}(s)\cdot R\right) + \frac{i(+0)}{s}$$

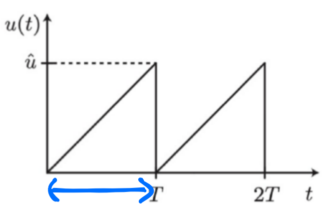
$$\Leftrightarrow \underline{I}(s) = \frac{1}{sL}\underline{U}(s) - \frac{1}{sL}\underline{I}(s)\cdot R + \frac{i(+0)}{s}$$

$$\Leftrightarrow \underline{I}(s)\cdot\left(1 + \frac{R}{sL}\right) = \frac{1}{sL}\underline{U}(s) + \frac{i(+0)}{s}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{I}(s) = \frac{1}{\left(1+\frac{R}{sL}\right)}\left(\frac{1}{sL}\underline{U}(s) + \frac{i(+0)}{s}\right)}$$

bis hier gleich $\forall t$.

Für $0 \leq t \leq T$:



$$u(t) = \frac{\hat{u}}{T}\operatorname{ramp}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \underline{U}(s) = \frac{\hat{u}}{Ts^2}$$

und $i(+0) = 0$

Zeitbereich $\xrightarrow{\mathcal{L}}$		Laplace Bereich	Zeitbereich $\xrightarrow{\mathcal{L}}$		Laplace Bereich
$\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}$ E(t)	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s\tau+1}$	$1-e^{-t/\tau}$ E(t)	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s(s\tau+1)}$
$\frac{1}{\tau^2}\,t\,e^{-t/\tau}$ E(t)	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{(s\tau+1)^2}$	$\frac{1}{\tau_1-\tau_2}\left(e^{-t/\tau_1}-e^{-t/\tau_2}\right)$ E(t)	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{(s\tau_1+1)(s\tau_2+1)}$
$\operatorname{ramp}(t) = \begin{cases}0 & t<0\\ t & t>0\end{cases}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s^2}$	$t-\tau+\tau e^{-t/\tau}$ E(t)	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s^2(\tau s+1)}$
$\cos(\omega t)$ E(t)	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$E(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s}$
$\sin(\omega t)$ E(t)	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{1}{a^2}(e^{at}-at-1)E(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s^2(s-a)}$
$\exp(at)$ E(t)	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s-a}$			
Zeitbereich $\xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}}$		Laplace Bereich	Zeitbereich $\xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}}$		Laplace Bereich

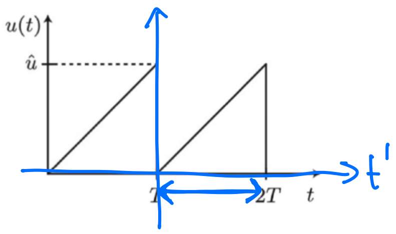
$$\Rightarrow \quad \underline{I}(s) = \frac{1}{\left(1+\frac{R}{sL}\right)} \cdot \frac{1}{sL} \cdot \frac{\hat{u}}{Ts^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{I}(s) = \frac{1}{\left(1+\frac{R}{sL}\right)} \cdot \frac{\hat{u}}{s \cdot L T s^2} = \frac{\hat{u}}{T} \cdot \frac{1}{s^2(sL+R)} = \frac{\hat{u}}{TR} \cdot \frac{1}{s^2\left(s\frac{L}{R}+1\right)}$$

Zeitbereich $\xrightarrow{\mathcal{L}}$		Laplace Bereich	Zeitbereich $\xrightarrow{\mathcal{L}}$		Laplace Bereich
$\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} E(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s\tau+1}$	$1 - e^{-t/\tau} E(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s(s\tau+1)}$
$\frac{1}{\tau^2} t e^{-t/\tau} E(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{(s\tau+1)^2}$	$\frac{1}{\tau_1-\tau_2}(e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2}) E(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{(s\tau_1+1)(s\tau_2+1)}$
$\mathrm{ramp}(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ t & t>0 \end{cases}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s^2}$	$t - \tau + \tau e^{-t/\tau} E(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s^2(\tau s+1)}$
$\cos(\omega t) E(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$E(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s}$
$\sin(\omega t) E(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{1}{a^2}(e^{at} - at - 1)E(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s^2(s-a)}$
$\exp(at) E(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s-a}$			
Zeitbereich $\xleftarrow[\mathcal{L}^{-1}]{}$		Laplace Bereich	Zeitbereich $\xleftarrow[\mathcal{L}^{-1}]{}$		Laplace Bereich

$$\Rightarrow \quad i(t) = \frac{\hat{u}}{TR}\left(t - \frac{L}{R} + \frac{L}{R} e^{-t\frac{R}{L}}\right) E(t) \qquad (*)$$

für $T \leq t \leq 2T$



$$u(t') = \frac{\hat{u}}{T} \mathrm{ramp}(t')$$

$$\Leftrightarrow \quad u(t-T) = \frac{\hat{u}}{T} \mathrm{ramp}(t-T) \quad \circ\!-\!\bullet \quad \underline{U}(s) = e^{-sT} \frac{\hat{u}}{T} \cdot \frac{1}{s^2}$$

Nullpunkt bei $t=T$ setzen !!

$\Rightarrow \quad t' = t - T$

$u(at)$, $a>0$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{a}\underline{U}(\frac{s}{a})$	$\lambda u(t) + \mu v(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\lambda \underline{U}(s) + \mu \underline{V}(s)$
$u(t-t_0)$	$\circ\!-\!\bullet$	$e^{-st_0}\underline{U}(s)$	$e^{-at} u(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\underline{U}(s+a)$
$-t\,u(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\underline{U}'(s)$	$t^2 u(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\underline{U}''(s)$
$(-t)^n u(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\underline{U}^{(n)}(s)$			
$u'(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$s\underline{U}(s) - u(0)$	$u''(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$s^2\underline{U}(s) - s\,u(0) - u'(0)$
$u^{(n)}(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$s^n\underline{U}(s) - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - \ldots - u^{(n-1)}(0)$			
$\int_0^t u(\tau)\,d\tau$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s}\underline{U}(s)$	period. mit T	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T u(t)e^{-st}\,dt$

$$i(t'=+0) = i(T) \overset{(*)}{=} \frac{\hat{u}}{TR}\left(T - \frac{L}{R} + \frac{L}{R} e^{-T\frac{R}{L}}\right)$$

Strom für $(t' \leq 0)$ ist der Strom den wir vorher berechnet haben für $0 \leq t \leq T$!

$$\Rightarrow \quad \underline{I}(s) = \frac{1}{\left(1+\frac{R}{sL}\right)} \left(\frac{1}{sL}\underline{U}(s) + \frac{i(+0)}{s}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{I}(s) = \frac{1}{\left(1+\frac{R}{sL}\right)} \cdot \frac{1}{sL} \cdot e^{-sT} \frac{\hat{u}}{T} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s \cdot \left(1+\frac{R}{sL}\right)} i(T) e^{-sT}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{I}(s) = \frac{\hat{u}}{TR} \cdot \frac{1}{s^2\left(s\frac{L}{R}+1\right)} \cdot e^{-sT} + \frac{1}{\left(s+\frac{R}{L}\right)} e^{-sT} i(T)$$

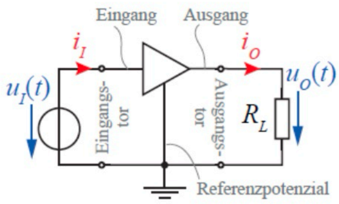
$$i(t) = \frac{\hat{u}}{TR}\left(t - T - \frac{L}{R} + \frac{L}{R} e^{-(t-T)\frac{R}{L}}\right) E(t-T) + e^{-(t-T)\frac{R}{L}} \, i(T)\, E(t-T)$$

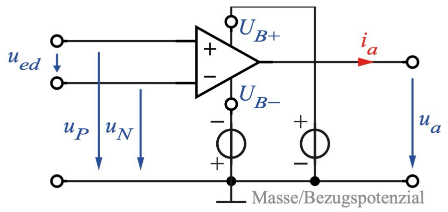
Zeitbereich	$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	Laplace Bereich	Zeitbereich	$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	Laplace Bereich
$\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau} E(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s\tau+1}$	$1-e^{-t/\tau} E(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s(s\tau+1)}$
$\frac{1}{\tau^2}\, t\, e^{-t/\tau} E(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{(s\tau+1)^2}$	$\frac{1}{\tau_1-\tau_2}\left(e^{-t/\tau_1}-e^{-t/\tau_2}\right) E(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{(s\tau_1+1)(s\tau_2+1)}$
$\mathrm{ramp}(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ t & t>0 \end{cases}$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s^2}$	$t-\tau+\tau e^{-t/\tau} E(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s^2(\tau s+1)}$
$\cos(\omega t) E(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$E(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s}$
$\sin(\omega t) E(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{1}{a^2}(e^{at}-at-1)E(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s^2(s-a)}$
$\exp(at) E(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s-a}$			
Zeitbereich	$\xleftarrow[\mathcal{L}^{-1}]{}$	Laplace Bereich	Zeitbereich	$\xleftarrow[\mathcal{L}^{-1}]{}$	Laplace Bereich

$u(at),\ a>0$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{a}\underline{U}\left(\frac{s}{a}\right)$	$\lambda u(t)+\mu v(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\lambda \underline{U}(s)+\mu \underline{V}(s)$
$u(t-t_0)$	$\circ\!-\!\bullet$	$e^{-st_0}\underline{U}(s)$	$e^{-at}u(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\underline{U}(s+a)$
$-t\,u(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\underline{U}'(s)$	$t^2 u(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\underline{U}''(s)$
$(-t)^n u(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$\underline{U}^{(n)}(s)$			
$u'(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$s\underline{U}(s)-u(0)$	$u''(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$s^2\underline{U}(s)-s\,u(0)-u'(0)$
$u^{(n)}(t)$	$\circ\!-\!\bullet$	$s^n\underline{U}(s)-s^{n-1}u(0)-s^{n-2}u'(0)-\ldots-u^{(n-1)}(0)$			
$\int_0^t u(\tau)\,d\tau$	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{s}\underline{U}(s)$	period. mit T	$\circ\!-\!\bullet$	$\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T u(t)e^{-st}\,dt$

2. Einführung in Verstärker (nur das nötigste für die Serie)

Symbolisches Schaltbild:





- **Ein idealer Verstärker verstärkt das Eingangssignal $u_I(t)$ um einen Faktor A, der unabhängig von der Signalfrequenz ist.**

  => $u_O(t) = A \cdot u_I(t)$
- **Verstärkungen werden vielfach auch in Dezibel angegeben:**

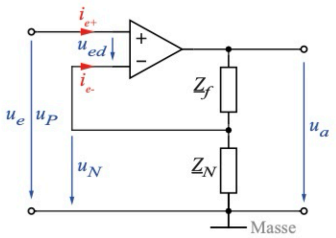
  => $A_{dB} = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{u_O}{u_I}\right)$ $\qquad 10^{\frac{A_{dB}}{20}} = \frac{u_O}{u_I}$

Negative Rückkopplung - Verstärkerschaltungen

-> Zusammenfassung S. 14

Der Operationsverstärker mit negativer Rückkopplung (Verstärkerschaltung) kann als Regelkreis betrachtet werden. Verstärkerschaltungen werden in zwei Gruppen unterteilt: Invertierende und nichtinvertierende Verstärker. Bei einfachen Schaltungen erkennt man den Typ daran, ob das Eingangssignal am positiven oder am negativen Eingang anliegt.

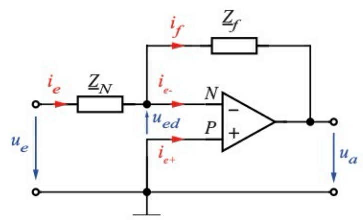
Nichtinvertierender Verstärker



$$\underline{A}(\omega) = \frac{\hat{u}_a}{\hat{u}_e} = 1 + \frac{\underline{Z}_f}{\underline{Z}_N} \quad (v_g \to \infty)$$

$$\underline{A}(\omega) = \left(1 + \frac{\underline{Z}_f}{\underline{Z}_N}\right)\left(\frac{1}{\underline{v}_g(\omega)}\left(1 + \frac{\underline{Z}_f}{\underline{Z}_N}\right) + 1\right)^{-1}$$

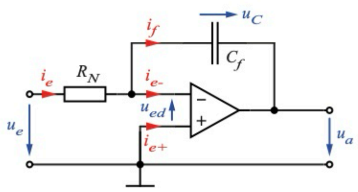
Invertierender Verstärker



$$\underline{A}(\omega) = \frac{\hat{u}_a}{\hat{u}_e} = -\frac{\underline{Z}_f}{\underline{Z}_N} \quad (v_g \to \infty)$$

$$\underline{A}(\omega) = -\frac{\underline{Z}_f}{\underline{Z}_N}\left(\frac{1}{\underline{v}_g(\omega)}\left(1 + \frac{\underline{Z}_f}{\underline{Z}_N}\right) + 1\right)^{-1}$$

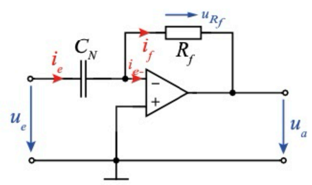
Integrierschaltung



$$\underline{A}(\omega) = \frac{\hat{u}_a}{\hat{u}_e} = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega CR}$$

$$u_a = -u_C = -\frac{1}{C_f}\int_0^t i_f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = -\frac{1}{R_N C_f}\int_0^t u_e(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

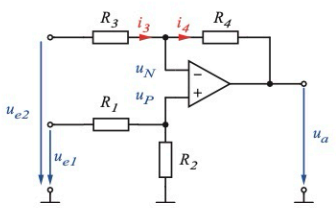
Differenzierschaltung



$$\underline{A}(\omega) = \frac{\hat{u}_a}{\hat{u}_e} = -\mathrm{j}\omega CR$$

$$u_a = -u_{R_f} = -R_f i_f = -R_f C_N \frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}t}$$

Subtraktionsschaltung (Nur falls $\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3}$)



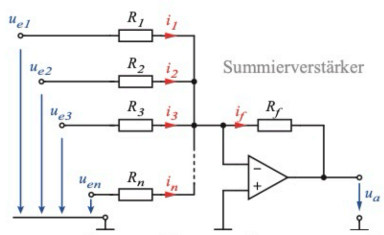
$$u_a = \frac{R_2}{R_1}(u_{e_1} - u_{e_2})$$

Differenzverstärkung $\quad A_d = \frac{u_{\text{out}}}{u_{\text{in}}} = \frac{R_2}{R_1} \implies u_{a,\text{cm}} = 0$

Differenzspannung $\quad u_{ed} = u_P - u_N$

Common-Mode-Spannung $\quad u_{e,cm} = \frac{1}{2}(u_N + u_P)$

Summierverstärker



$$u_a = -u_{e_1}\frac{R_0}{R_1} - u_{e_2}\frac{R_0}{R_2} - u_{e_3}\frac{R_0}{R_3} - \ldots - u_{e_n}\frac{R_0}{R_n}$$