

ÜBUNG 12

24.05.2024 - LINA DE WINDT

Alle Unterlagen auf in.eethz.ch/~ldewindt

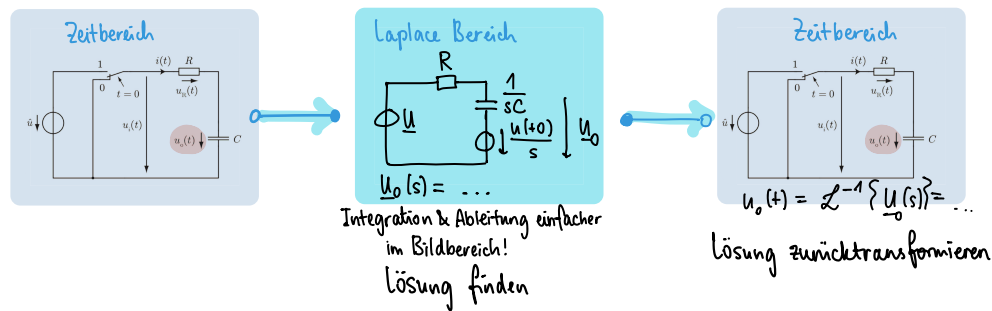
>>> Themen von heute:

1. Recap Laplace Transformation
↳ komplexeres Beispiel
2. Einführung in Verstärker

1. Recap Laplace Transformation

Warum Laplace Transformation?

=> Dank der Laplace Transformation muss man auch bei der Berechnung von Netzwerken mit nicht-sinusförmigen Signalen oder Schaltvorgängen keine DGL's aufstellen:

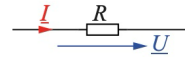


Die Transformationen der Strom-Spannungs Beziehungen der Bauelemente (R, L, C , Transformator) vom Zeitbereich in den Laplacebereich ist immer gleich. Deswegen

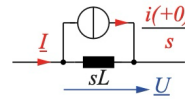
verwendet man i.d.R. einfach die Tabelle auf der Zusammenfassung:

Transformation der Komponenten in den Laplace Bereich

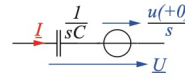
Widerstand $\underline{U}(s) = R \underline{I}(s)$



Induktivität
 $u(t) = L \frac{di}{dt}$
 $\underline{U}(s) = sL \underline{I}(s) - L i(0)$
 $\underline{I}(s) = \frac{1}{sL} \underline{U}(s) + \frac{i(0)}{s}$

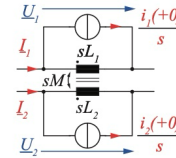


Kondensator
 $i(t) = C \frac{du}{dt}$
 $\underline{I}(s) = sC \underline{U}(s) - C u(0)$
 $\underline{U}(s) = \frac{1}{sC} \underline{I}(s) + \frac{u(0)}{s}$



Transformator

$$\begin{aligned} \underline{U}_1(s) &= sL_1 \underline{I}_1(s) - L_1 i_1(0) + sM \underline{I}_2(s) - M i_2(0) \\ \underline{U}_2(s) &= sM \underline{I}_1(s) - M i_1(0) + sL_2 \underline{I}_2(s) - L_2 i_2(0) \end{aligned}$$

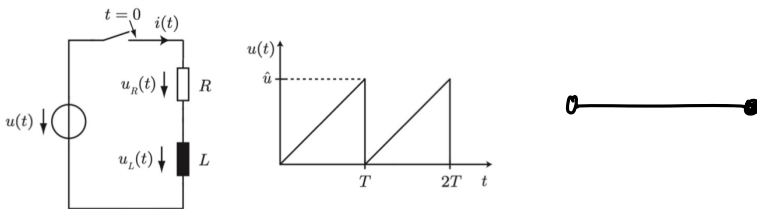


Wie man sieht, sind alle Gleichungen => viel einfacher zu lösen als DGLs!

Deshalb macht man NW-Berechnungen mit der Laplace Transformation.

Das aufwändigste bei NW-Berechnungen mit der Laplace-Transformation

ist meistens die Transformation der Quellgrösse in den Laplace-Bereich:



Solche Laplace Transformationen von Hand mit dem Integral ($\underline{U}(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^\infty u(t) e^{-st} dt$)

zu berechnen kann sehr aufwändig werden. Deshalb verwenden wir in der Regel

die Transformationstabelle:

Zeitbereich	$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	Laplace Bereich	Zeitbereich	$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	Laplace Bereich
$\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} E(t)$	$\circ \bullet$	$\frac{1}{s\tau + 1}$	$1 - e^{-t/\tau} E(t)$	$\circ \bullet$	$\frac{1}{s(s\tau + 1)}$
$\frac{1}{\tau^2} t e^{-t/\tau} E(t)$	$\circ \bullet$	$\frac{1}{(s\tau + 1)^2}$	$\frac{1}{\tau_1 - \tau_2} (e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2}) E(t)$	$\circ \bullet$	$\frac{1}{(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)}$
$\text{ramp}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t > 0 \end{cases}$	$\circ \bullet$	$\frac{1}{s^2}$	$t - \tau + \tau e^{-t/\tau} E(t)$	$\circ \bullet$	$\frac{1}{s^2(\tau s + 1)}$
$\cos(\omega t) E(t)$	$\circ \bullet$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$E(t)$	$\circ \bullet$	$\frac{1}{s}$
$\sin(\omega t) E(t)$	$\circ \bullet$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{a^2} (e^{at} - at - 1) E(t)$	$\circ \bullet$	$\frac{1}{s^2(s - a)}$
$\exp(at) E(t)$	$\circ \bullet$	$\frac{1}{s - a}$			
Zeitbereich	$\xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}}$	Laplace Bereich	Zeitbereich	$\xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}}$	Laplace Bereich

Die Laplace-Transformation hat folgende Eigenschaften:

$u(at), a > 0$	$\circ \rightarrow \frac{1}{a} \underline{U}\left(\frac{s}{a}\right)$	Linearität: (sehr wichtig)	$\lambda u(t) + \mu v(t)$	$\circ \rightarrow \lambda \underline{U}(s) + \mu \underline{V}(s)$
$u(t - t_0)$	$\circ \rightarrow e^{-st_0} \underline{U}(s)$ (Zeitverschiebung)		$e^{-at} u(t)$	$\circ \rightarrow \underline{U}(s + a)$
$-t u(t)$	$\circ \rightarrow \underline{U}'(s)$		$t^2 u(t)$	$\circ \rightarrow \underline{U}''(s)$
$(-t)^n u(t)$	$\circ \rightarrow \underline{U}^{(n)}(s)$			
$u'(t)$	$\circ \rightarrow s \underline{U}(s) - u(0)$		$u''(t)$	$\circ \rightarrow s^2 \underline{U}(s) - s u(0) - u'(0)$
$u^{(n)}(t)$	$\circ \rightarrow s^n \underline{U}(s) - s^{n-1} u(0) - s^{n-2} u'(0) - \dots - u^{(n-1)}(0)$			
$\int_0^t u(\tau) d\tau$	$\circ \rightarrow \frac{1}{s} \underline{U}(s)$		period. mit T	$\circ \rightarrow \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T u(t) e^{-st} dt$

Bei der NW-Berechnung mit der Laplace-Transformation kann man wie folgt vorgehen:

- 1 Komponenten in den Laplace-Bereich transformieren & Netzwerk neu zeichnen
- 2 Die gesuchten Zweigströme & -spannungen im Laplace-Bereich berechnen (meistens über Maschen- & Knotengleichungen)
- 3 Die gesuchten Größen in den Zeitbereich zurücktransformieren: $u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\underline{u}(s)\}$

Aufgabe:

RL - Schaltung mit Laplace-Transformation

Die Spannungsquelle in Abb. 1 liefert die im rechten Teilbild dargestellte periodische Sägezahnspannung mit der Amplitude $\hat{u}$ und der Periodendauer T .

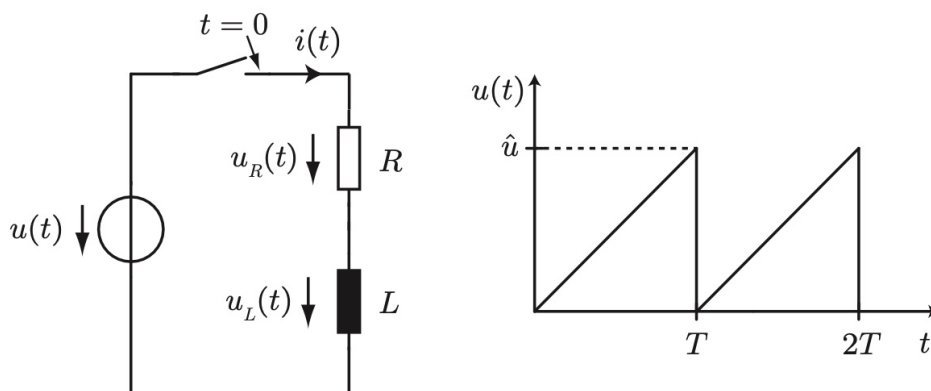
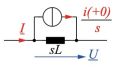
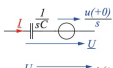
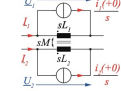


Abbildung 1: Sägezahnspannung an RL-Schaltung

Bestimmen Sie den Verlauf des Stromes $i(t)$ für den Zeitbereich $0 \leq t \leq 2T$. Stellen Sie den Zeitverlauf für $R = 1\Omega$, $L = 10\text{mH}$, $\hat{u} = 10\text{V}$ und $T = 100\mu\text{s}$ dar.

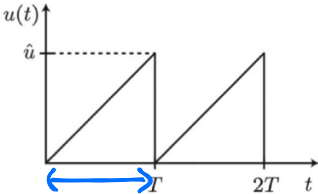
1 Komponenten in den Laplace - Bereich transformieren & Netzwerk neu zeichnen

Transformation der Komponenten in den Laplace Bereich

Widerstand	$\underline{U}(s) = R \underline{I}(s)$	
Induktivität	$\underline{U}(s) = sL \underline{I}(s) - L i(0)$ $\underline{I}(s) = \frac{1}{sL} \underline{U}(s) + \frac{i(0)}{s}$	
Kondensator	$\underline{I}(s) = sC \underline{U}(s) - C u(0)$ $\underline{U}(s) = \frac{1}{sC} \underline{I}(s) + \frac{u(0)}{s}$	
Transformator	$\underline{U}_1(s) = sL_1 \underline{I}_1(s) - L_1 i_1(0) + sM \underline{I}_2(s) - M i_2(0)$ $\underline{U}_2(s) = sM \underline{I}_1(s) - M i_1(0) + sL_2 \underline{I}_2(s) - L_2 i_2(0)$	

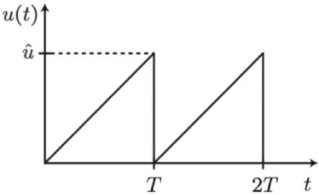
2 Die gesuchten Zweigströme & -spannungen im Laplace - Bereich berechnen

für $0 \leq t \leq T$:



Zeitbereich	$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	Laplace Bereich	Zeitbereich	$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	Laplace Bereich
$\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \mathcal{E}(t)$	$\circ \bullet$	$\frac{1}{s\tau+1}$	$1 - e^{-t/\tau} \mathcal{E}(t)$	$\circ \bullet$	$\frac{1}{s(\tau+1)}$
$\frac{1}{\tau^2} t e^{-t/\tau} \mathcal{E}(t)$	$\circ \bullet$	$\frac{1}{(s\tau+1)^2}$	$\frac{1}{\tau_1 - \tau_2} (e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2}) \mathcal{E}(t)$	$\circ \bullet$	$\frac{1}{(s\tau_1+1)(s\tau_2+1)}$
$\text{ramp}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases}$	$\circ \bullet$	$\frac{1}{s^2}$	$t - \tau + \tau e^{-t/\tau} \mathcal{E}(t)$	$\circ \bullet$	$\frac{1}{s^2(\tau+1)}$
$\cos(\omega t) \mathcal{E}(t)$	$\circ \bullet$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$E(t)$	$\circ \bullet$	$\frac{1}{s}$
$\sin(\omega t) \mathcal{E}(t)$	$\circ \bullet$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{a^2} (e^{at} - at - 1) E(t)$	$\circ \bullet$	$\frac{1}{s^2(s-a)}$
$\exp(at) \mathcal{E}(t)$	$\circ \bullet$	$\frac{1}{s-a}$			
Zeitbereich	$\xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}}$	Laplace Bereich	Zeitbereich	$\xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}}$	Laplace Bereich

für $T \leq t \leq 2T$



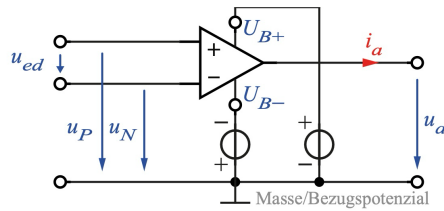
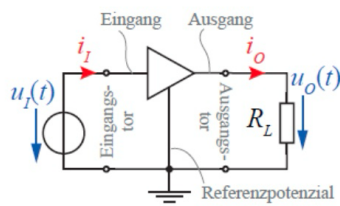
$u(at), a > 0$	$\circ \bullet$	$\frac{1}{a} U(\frac{s}{a})$	$\lambda u(t) + \mu v(t)$	$\circ \bullet$	$\lambda U(s) + \mu V(s)$
$u(t - t_0)$	$\circ \bullet$	$e^{-st_0} U(s)$	$e^{-at} u(t)$	$\circ \bullet$	$U(s + a)$
$-t u(t)$	$\circ \bullet$	$U'(s)$	$t^2 u(t)$	$\circ \bullet$	$U''(s)$
$(-t)^n u(t)$	$\circ \bullet$	$U^{(n)}(s)$			
$u'(t)$	$\circ \bullet$	$s U(s) - u(0)$	$u''(t)$	$\circ \bullet$	$s^2 U(s) - s u(0) - u'(0)$
$u^{(n)}(t)$	$\circ \bullet$	$s^n U(s) - s^{n-1} u(0) - s^{n-2} u'(0) - \dots - u^{(n-1)}(0)$			
$\int_0^t u(\tau) d\tau$	$\circ \bullet$	$\frac{1}{s} U(s)$	period. mit T	$\circ \bullet$	$\frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T u(t) e^{-st} dt$

Zeitbereich	$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	Laplace Bereich	Zeitbereich	$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	Laplace Bereich
$\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \mathcal{E}(t)$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{s\tau+1}$	$1 - e^{-t/\tau} \mathcal{E}(t)$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{s(\tau+1)}$
$\frac{1}{\tau^2} t e^{-t/\tau} \mathcal{E}(t)$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{(\tau s+1)^2}$	$\frac{1}{\tau_1 - \tau_2} (e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2}) \mathcal{E}(t)$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{(\tau_1+1)(\tau_2+1)}$
$\text{ramp}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t > 0 \end{cases}$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{s^2}$	$t - \tau + \tau e^{-t/\tau} \mathcal{E}(t)$	$\circ \rightarrow$	$-\frac{1}{s^2(\tau+1)}$
$\cos(\omega t) \mathcal{E}(t)$	$\circ \rightarrow$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$E(t)$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{s}$
$\sin(\omega t) \mathcal{E}(t)$	$\circ \rightarrow$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{\omega^2} (e^{at} - at - 1) E(t)$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{s^2(s-a)}$
$\exp(at) \mathcal{E}(t)$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{s-a}$			
Zeitbereich	$\xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}}$	Laplace Bereich	Zeitbereich	$\xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}}$	Laplace Bereich

$u(at), a > 0$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{a} U(\frac{s}{a})$	$\lambda u(t) + \mu v(t)$	$\circ \rightarrow$	$\lambda U(s) + \mu V(s)$
$u(t-t_0)$	$\circ \rightarrow$	$e^{-st_0} U(s)$	$e^{-at} u(t)$	$\circ \rightarrow$	$U(s+a)$
$-t u(t)$	$\circ \rightarrow$	$U'(s)$	$t^2 u(t)$	$\circ \rightarrow$	$U''(s)$
$(-t)^n u(t)$	$\circ \rightarrow$	$U^{(n)}(s)$			
$u'(t)$	$\circ \rightarrow$	$s U(s) - u(0)$	$u''(t)$	$\circ \rightarrow$	$s^2 U(s) - s u(0) - u'(0)$
$u^{(n)}(t)$	$\circ \rightarrow$	$s^n U(s) - s^{n-1} u(0) - s^{n-2} u'(0) - \dots - u^{(n-1)}(0)$			
$\int_0^t u(\tau) d\tau$	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{s} U(s)$	period. mit T	$\circ \rightarrow$	$\frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T u(t) e^{-st} dt$

2. Einführung in Verstärker (nur das nötigste für die Serie)

Symbolisches Schaltbild:



- Ein idealer Verstärker verstärkt das Eingangssignal $u_I(t)$ um einen Faktor A , der unabhängig von der Signalfrequenz ist.

$$\Rightarrow u_O(t) = A \cdot u_I(t)$$

- Verstärkungen werden vielfach auch in Dezibel angegeben:

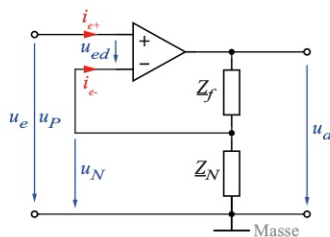
$$\Rightarrow A_{dB} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{u_O}{u_I} \right) \quad 10^{\frac{A_{dB}}{20}} = \frac{u_O}{u_I}$$

Negative Rückkopplung - Verstärkerschaltungen

→ Zusammenfassung S. 14

Der Operationsverstärker mit negativer Rückkopplung (Verstärkerschaltung) kann als Regelkreis betrachtet werden. Verstärkerschaltungen werden in zwei Gruppen unterteilt: Invertierende und nichtinvertierende Verstärker. Bei einfachen Schaltungen erkennt man den Typ daran, ob das Eingangssignal am positiven oder am negativen Eingang anliegt.

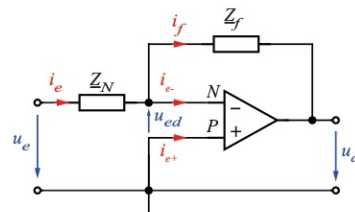
Nichtinvertierender Verstärker



$$A(\omega) = \frac{\hat{u}_a}{\hat{u}_e} = 1 + \frac{Z_f}{Z_N} \quad (v_g \rightarrow \infty)$$

$$A(\omega) = \left(1 + \frac{Z_f}{Z_N} \right) \left(\frac{1}{v_g(\omega)} \left(1 + \frac{Z_f}{Z_N} \right) + 1 \right)^{-1}$$

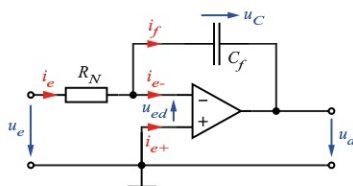
Invertierender Verstärker



$$A(\omega) = \frac{\hat{u}_a}{\hat{u}_e} = -\frac{Z_f}{Z_N} \quad (v_g \rightarrow \infty)$$

$$A(\omega) = -\frac{Z_f}{Z_N} \left(\frac{1}{v_g(\omega)} \left(1 + \frac{Z_f}{Z_N} \right) + 1 \right)^{-1}$$

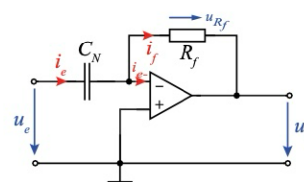
Integrierschaltung



$$A(\omega) = \frac{\hat{u}_a}{\hat{u}_e} = -\frac{1}{j\omega CR}$$

$$u_a = -u_C = -\frac{1}{C_f} \int_0^t i_f(\tau) d\tau = -\frac{1}{R_N C_f} \int_0^t u_e(\tau) d\tau$$

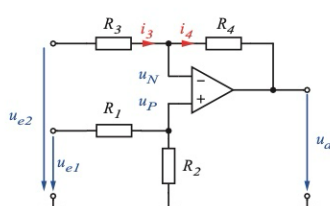
Differenzierschaltung



$$A(\omega) = \frac{\hat{u}_a}{\hat{u}_e} = -j\omega CR$$

$$u_a = -u_{R_f} = -R_f i_f = -R_f C_N \frac{du_e}{dt}$$

Subtraktionsschaltung (Nur falls $\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3}$)



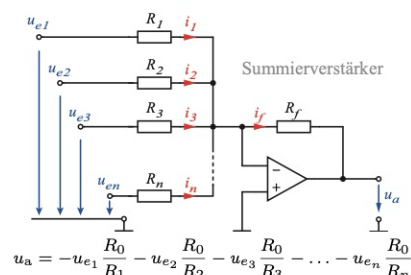
$$u_a = \frac{R_2}{R_1} (u_{e1} - u_{e2})$$

Differenzverstärkung $A_d = \frac{u_{out}}{u_{in}} = \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow u_{a,cm} = 0$

Differenzspannung $u_{ed} = u_P - u_N$

Common-Mode-Spannung $u_{e,cm} = \frac{1}{2}(u_N + u_P)$

Summierverstärker



$$u_a = -u_{e1} \frac{R_0}{R_1} - u_{e2} \frac{R_0}{R_2} - u_{e3} \frac{R_0}{R_3} - \dots - u_{en} \frac{R_0}{R_n}$$