NETZWERKE UND SCHALTUNGEN 2

ÜBUNG 02

01.03.2024 - LINA DE WINDT

Alle Unterlagen auf n.ethz.ch/~ldewindt

Themen von heute:

1. Recap der Theorie von dieser Woche
   1.1 Recap Zeigerdiagramme
   1.2 Komplexe Wechselstromrechnung - Impedanzen
2. Beispielaufgaben
3. Vorbesprechung der Serie 2

Abkürzungen:

NW: Netzwerk
d.h.: das heisst
bzw.: beziehungsweise

Von letzter Woche:

Zeitsignal

↳ kompliziert, Trigmles mühsam!

"Transformation in den Bildbereich"

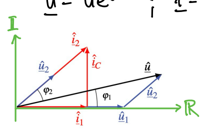
Zeigerdiagramm

→ betrachten NW im stationären Zustand.

↳ Zeit ist "fixiert" (Zeitabhängiger Teil beschreibt nur die Rotation des Zeigers ⇒ weglassen)

$\underline{\hat{u}} = \hat{u}e^{j\varphi_u}$; $\underline{\hat{i}} = \hat{i}e^{j\varphi_i}$

Verbindung zu vorher: $i(t) = \mathrm{Re}\{\hat{i}e^{j\varphi}e^{j\omega t}\}$

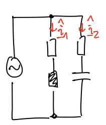


⇒ Vektoralgebra ✓

⇒ sind im komplexen Raum!

komplexe Wechselstromrechnung

→ NW komplett mit Zeigern analysieren.



gesuchte Grössen mit komplexe Wechselstromrechnung (d.h. mit den Zeigern) berechnen (einfacher! :))

"Bildbereich"

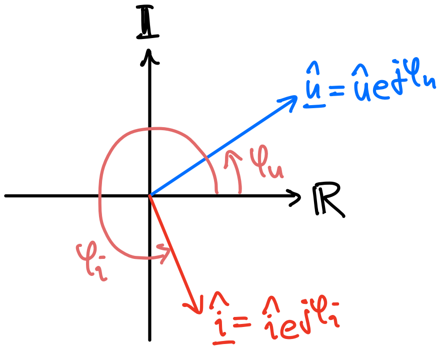
Heute & nächste Woche

Rücktransformation

Am Schluss kann man rücktransformieren, um die dazugehörigen Zeitsignale zu erhalten: $u(t) = \mathrm{Re}\{\underline{\hat{u}}\} = \mathrm{Re}\{\hat{u}e^{j\varphi}e^{j\omega t}\} = |\underline{\hat{u}}|\cos(\omega t + \arg(\underline{\hat{u}}))$

1.1 Recap Zeigerdiagramme

"Zeiger" sind nichts anderes als Vektoren im komplexen Raum (bzw. eine komplexe Zahl).



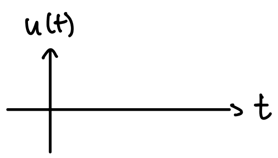
"Zeigerdiagramme" sind Diagramme von .... eines Netzwerks in einem .... (d.h. t fix! meistens t=0). Man zeichnet dann alle Spannungen & Ströme (bzw. die die in einer Aufgabe gefragt sind) eines NW's in das Zeigerdiagramm ein. Dabei darf man die Zeiger wie .... graphisch addieren / subtrahieren / multiplizieren!

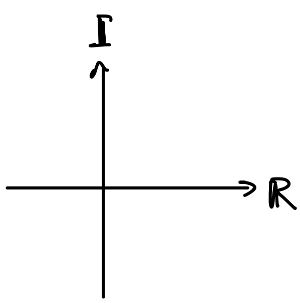
Mit dieser Methode können wir auch für komplexe NWe mit einer Wechselstrom / -spannungsquelle ziemlich einfach gesuchte Ströme & Spannungen berechnen! :)

Doch wie kann man aus dem Zeitsignal z.B. [   ] den entsprechenden Zeiger bestimmen? Ganz einfach: Wir wenden die Formel an:

[   ]

Es ist wichtig zu wissen was hier mathematisch gesehen genau passiert ist. Wir haben ein reales, zeitabhängiges Signal u(t) der in der Realen Ebene $\mathbb{R}$ lebt, zu einem komplexen, zeitunabhängigen Zeiger $\underline{\hat{u}}$ transformiert, der in der komplexe Ebene lebt!



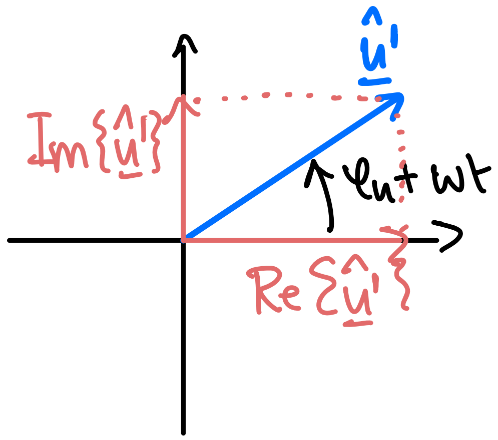


Die Transformation erfolgt in 2 Schritten:

Im 1. Schritt transformiren wir den Zeitsignal $u(t) = \hat{u}\cos(\omega t + \varphi_u)$ zu einem zeitabhängigen, komplexen Zeiger

Dabei bekommt das Signal $u(t)$ einen imaginären Teil hinzugefügt!

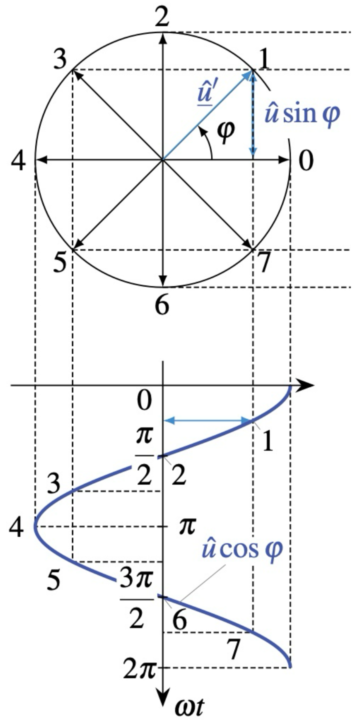
(wegen der Euler'schen Identität)



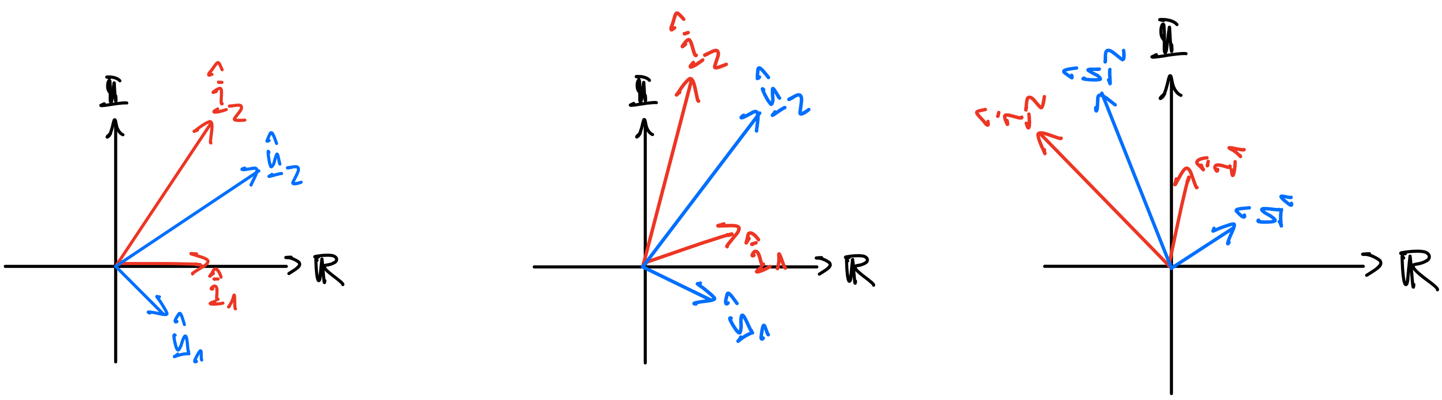
$$\underline{\hat{u}}' = \hat{u}e^{j\varphi_u}e^{j\omega t} = \underbrace{\hat{u}\cos(\omega t + \varphi_u)}_{\text{ursprüngliches Signal}} + \underbrace{\hat{u}j\sin(\omega t + \varphi_u)}_{\text{konstruierter, imaginärer Teil}}$$

Der Realteil von diesem zeitabhängigen Zeiger ist $\mathrm{Re}\{\underline{\hat{u}}'\} = \hat{u}\cos(\omega t + \varphi_u)$, was unseren ursprünglichen Signal $u(t)$ entspricht. Der Imaginärteil $\mathrm{Im}\{\underline{\hat{u}}'\} = \hat{u}\sin(\omega t + \varphi_u)$ haben wir selbst konstruiert und hat daher keine physikalische Bedeutung (ist ein rein mathematischer Konstrukt).

Wir bemerken: In der komplexen Ebene wird die Schwingung $\cos(\omega t)$ beschrieben durch die ______ vom zeitabhängigen Zeiger um den Ursprung!



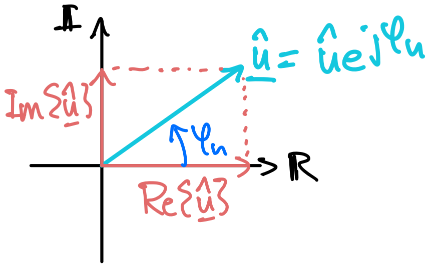
Da wir in der komplexen Wechselstromrechnung nur Netzwerke analysieren, bei welchen alle Signale dieselbe Frequenz haben, führen alle Zeiger die gleiche Rotation $e^{j\omega t}$ um den Ursprung:



$t=0$ $t=t_1$ $t=t_2$

Dabei bleiben alle Verhältnisse zwischen den Zeigern identisch!

Deshalb ist die Idee, dass wir in einem weiteren Schritt die Zeitabhängigkeit des Zeigers wegnehmen (d.h. $e^{j\omega t}$ weg). ⇒



Dann analysieren wir das NW mit den zeitunabhängigen Zeiger. Erst am Schluss geben wir den Zeigern ihre Zeitabhängigkeit zurück (d.h. mal $e^{j\omega t}$ und "es fängt alles an mit der gleichen Geschwindigkeit zu rotieren").

Das coole ist, wenn wir alle Signale eines Netzwerks im Zeigerdiagramm berechnen, müssen wir uns nicht um mühsame Trigrules, Zeitabhängigkeit, usw. kümmern:

Zeitsignale	Zeiger
$u_1(t) + u_2(t) = \hat{u}_1\cos(\omega t + \varphi_1) + \hat{u}_2\cos(\omega t + \varphi_2)$ $= \ldots$	$\underline{\hat{u}}_1 + \underline{\hat{u}}_2 =$
$\hat{u}_1(t) \cdot \hat{u}_2(t) = \hat{u}_1\cos(\omega t + \varphi_1) \cdot \hat{u}_2\cos(\omega t + \varphi_2)$ $=$ ... elend lange Berechnung...	$\underline{\hat{u}}_1 \cdot \underline{\hat{u}}_2 =$
$\frac{\hat{u}_1(t)}{\hat{u}_2(t)} = \frac{\hat{u}_1\cos(\omega t + \varphi_1)}{\hat{u}_2\cos(\omega t + \varphi_2)} = \ldots$ $=$ ... elend lange Berechnung	$\frac{\underline{\hat{u}}_1}{\underline{\hat{u}}_2} =$

Am Schluss möchten wir aber trotzdem die entsprechenden Zeitsignale als Lösung haben. Dafür können die Zeiger rücktransformiert werden:

1. Zuerst geben wir dem Zeiger seine Zeitabhängigkeit $e^{j\omega t}$ (die Rotation um den Ursprung) zurück:
2. Das Zeitsignal ist der Realteil vom zeitabhängigen Zeiger:

Bei der Transformation vom Zeitsignal zum Zeiger ($u(t) \rightarrow \hat{\underline{u}}$) muss man aufpassen, wenn man ein .... hat, z.B.

Dann muss man das ...., um die richtige Phase für den Zeiger zu erhalten. Da $\sin(\omega t)$ haben wir

Der dazugehörige Zeiger ist also

> Das ist so, weil die Zeiger über die Kosinusfunktion definiert sind. (Konvention). Man könnte sie theoretisch auch über die Sinusfunktion definieren, aber dann müsste man bei der Rücktransformation den Imaginärteil vom Zeiger nehmen um das zugehörige Zeitsignal zu erhalten.

So weit so gut, aber wir möchten endlich Netzwerke berechnen können mit dieser Zeiger-Methode! :)

1.2 Komplexe Wechselstromrechnung - Impedanzen

↳ Berechnung von Netzwerken mit sinusförmigen Quellen auf Basis der Zeiger

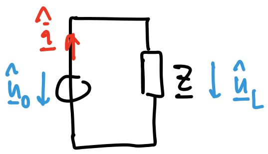
↳ Wir brauchen die Strom-Spannungs-Beziehungen im Bildbereich!

(wie z.B. unsere altbekannte $U = R \cdot I$ ⇝ im Bildbereich ??)

↳ Ein passives NW hat die Bauelemente . In der komplexen Wechselstromrechnung betrachten wir alle diese Bauelemente als , die

(oder "komplexe Leitfähigkeit", die Admittanz $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$).

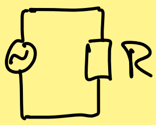
Dann ist die Strom-Spannungs-Beziehung über diese Impedanz:



Doch welchen Wert haben die Impedanzen eines Widerstands / einer Induktivität / eines Kondensators?

Widerstand:

Zeitbereich:



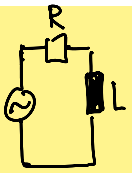
$u_R = R \cdot i_R$

Bildbereich:

Im Zeigerdiagramm:

Induktivität:

Zeitbereich:



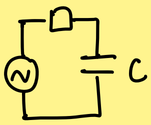
$u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$

Bildbereich:

Im Zeigerdiagramm:

Kondensator:

Zeitbereich:



$u_C = \frac{1}{C} \int i_C \, dt$

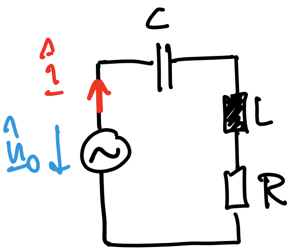
Bildbereich:

Im Zeigerdiagramm:

Die Impedanz $\underline{Z}$ bezeichnet also den komplexen Wechselstromwiderstand :)

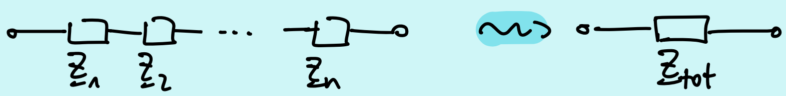
Das coole ist, in der komplexen Wechselstromrechnung sind wie oben verdeutlicht nicht nur Widerstände, sondern auch Induktivitäten & Kondensatoren Impedanzen und es gilt überall $\hat{\underline{u}} = \underline{Z} \cdot \hat{\underline{i}}$ ("Uzi")

⇒ d.h. man kann sie alle zusammenrechnen, z.B.:

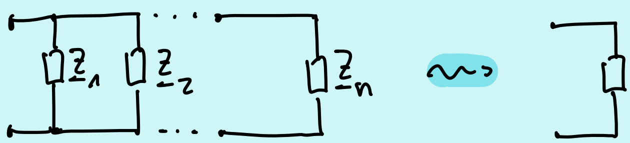


Für **Impedanzen** gelten die gleichen Regeln wie für Widerstände:

In Serie:

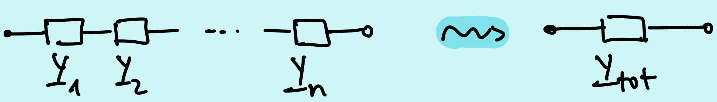


Parallel:

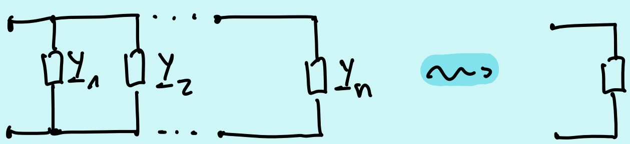


Für **Admittanzen** ist $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$, also genau "umgekehrt":

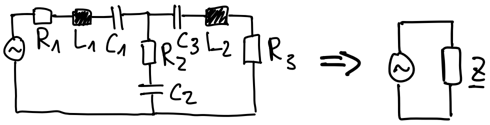
In Serie:



Parallel:



Die Gesamtimpedanz eines NW ist meistens komplex



↳ Wenn das NW nur aus Widerständen besteht, ist $\underline{Z}$ ....

↳ Wenn das NW nur aus L & C besteht, ist $\underline{Z}$ ....

Analog für die Admittanz:

Aufgabe 1 Komplexe Impedanzen und Zeigerdiagramme

Gegeben sie die Schaltung aus einer Induktivität L, einem Widerstand R und einer Kapazität C wie in Abb. 1 dargestellt. Die Schaltung wird von einer Sinusspannungsquelle mit der Ausgangsspannung $u_0 = \hat{u}_0 \cdot cos(\omega t)$ gespeist.

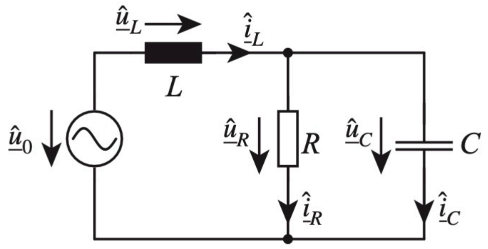


Abbildung 1: RLC Schaltung

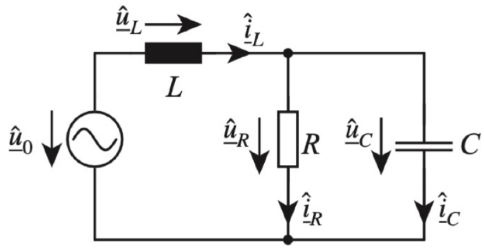
1.1) Geben Sie die Gesamtimpedanz der Schaltung an. $\underline{Z}_{tot}$

1.2) Bestimmen Sie den komplexen Amplitudenzeiger $\underline{\hat{i}}_C$ des Stroms durch die Kapazität C.

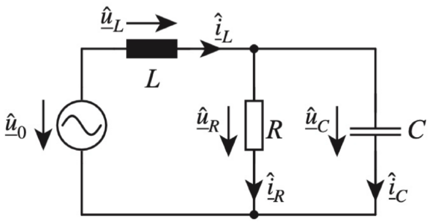
1.3) Skizzieren Sie die Zeitverläufe der Spannung $u_0(t)$ sowie es Stroms $i_C(t)$. Nehmen Sie dabei eine Phasenverschiebung von $-22.5°$ für den Strom an. Die Phase der Spannung sei $0°$.

1.4) Konstruieren Sie qualitativ ein Zeigerdiagramm für alle Spannungen und Ströme der Schaltung. Legen Sie dabei den Strom $\underline{\hat{i}}_R$ in die reelle Achse.

1.1)



1.2)



1.3)

Skizzieren Sie die Zeitverläufe der Spannung $u_0(t)$ sowie es Stroms $i_C(t)$. Nehmen Sie dabei eine Phasenverschiebung von $-22.5°$ für den Strom an. Die Phase der Spannung sei $0°$.

1.4)

1.4) Konstruieren Sie qualitativ ein Zeigerdiagramm für alle Spannungen und Ströme der Schaltung. Legen Sie dabei den Strom $\hat{\underline{i}}_R$ in die reelle Achse.