NETZWERKE UND SCHALTUNGEN 2

ÜBUNG 04

15.03.2024 - LINA DE WINDT

Alle Unterlagen auf n.ethz.ch/~ldewindt

Themen von heute:

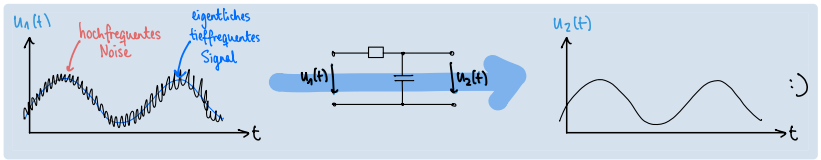
1. Recap der Theorie von dieser Woche
   - 1.1 Fortsetzung Resonanzschaltungen
     - 1.1.1 RLC Parallelschwingkreis
     - 1.1.2 Güte & Dämpfung

   } Zusammenfassung S. 8

   - 1.2 Bodeplots → Zusammenfassung S. 7
2. Beispielaufgaben
3. Vorbesprechung der Serie 4

Von letzter Woche:

Filter



Übertragungsfunktion: $\underline{F} = \frac{\hat{\underline{u}}_2}{\hat{\underline{u}}_1}$

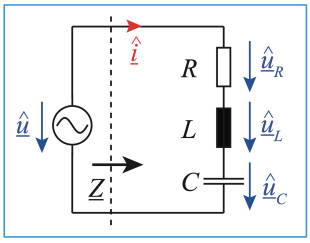
Verstärkung (auch: Amplitudengang): $V_u = \frac{|\hat{\underline{u}}_2|}{|\hat{\underline{u}}_1|}$

Verstärkung in Dezibel (dB): $V_{u,dB} = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{|\hat{\underline{u}}_2|}{|\hat{\underline{u}}_1|}\right) dB$

↳ sehr wichtige Einheit im Kontext von Signale & Verstärkung!

Phasenverschiebung: $\varphi = \varphi_{u_a} - \varphi_{u_e} = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(\underline{F})}{\mathrm{Re}(\underline{F})}\right)$

RLC-Serienschwingkreis



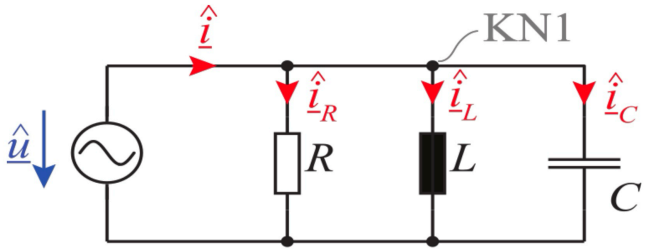
Impedanz: $\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$

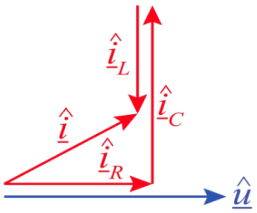
Resonanzfrequenz: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

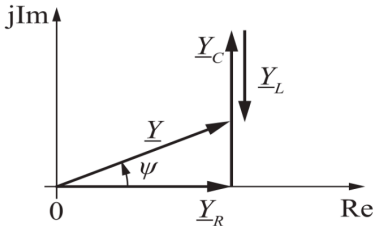
Bei Resonanz nimmt die Impedanz den minimalen Wert an.

1.1 Fortsetzung Resonanzschaltungen

1.1.1 RLC Parallelschwingkreis







Impedanz:

Admittanz:

Bei Resonanz nimmt die Impedanz / Admittanz den ..... an bzw. der ..... (= Imaginärteil der Impedanz / Admittanz) verschwindet:

@ $f = f_0$ gilt also:

Bei Resonanz tritt am Kondensator & Induktivität betragsmässig derselbe Strom auf:

1.1.2 Güte & Dämpfung

Die Güte ist ein Mass für die Spannungs- bzw. Stromüberhöhung. Es ist ein Parameter, der in einem frei schwingenden Resonator das Verhältnis der gespeicherten Energie zu dem thermischen Energieverlust während einer Schwingungsperiode ausdrückt. Eine hohe Güte eines Systems besagt, dass das System die gespeicherte Energie in nur geringem Umfang in thermische Energie umsetzt & die Schwingung nur in geringem Umfang abnimmt.

RLC Serienschwingkreis:

RLC Parallelschwingkreis:

⚠ Eine Strom- bzw. Spannungsüberhöhung tritt nur auf, wenn

⚠ Im Bereich nimmt der Strom max. den Wert des Eingangsstromes auf.

Die Dämpfung ist der Kehrwert der Güte. Sie wird auch Verlustfaktor genannt und ist ein Mass für die Verluste eines Resonators.

Beispielaufgabe

Aufgabe 1 Serienschaltung von zwei Parallelschwingkreisen

Gegeben ist die in Abb. 1 dargestellte Schaltung mit den Netzwerkelementen $R = 1\,k\Omega$, $L_1 = 1\,mH$, $C_1 = 100\,nF$, $L_2 = 0.1\,mH$ und $C_2 = 10\,nF$.

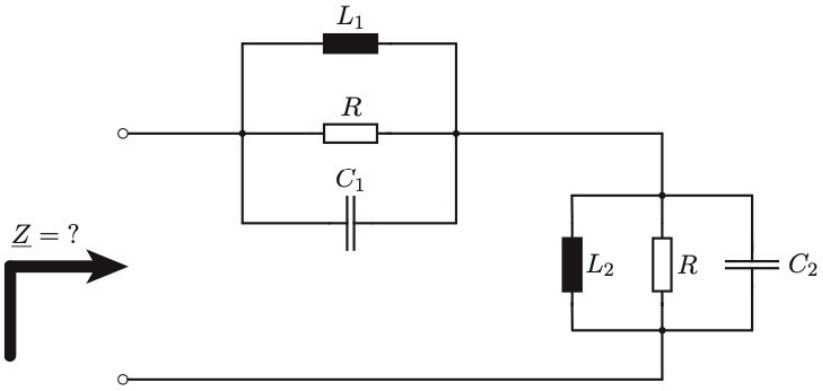


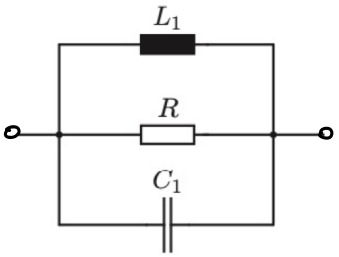
Abbildung 1: Zwei Parallelschwingkreise in Serienschaltung

A) Bestimmen Sie die Resonanzfrequenz f_1 und f_2, sowie die Güten Q_{p1} und Q_{p2} der beiden Schwingkreise.

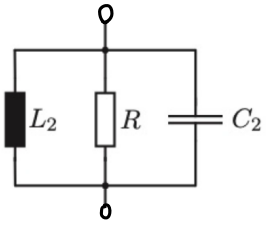
B) Bestimmen Sie den Betrag der Eingangsimpedanz $\underline{Z}$ in Abhängigkeit der Frequenz.

C) Stellen Sie den Betrag der Eingangsimpedanz $|\underline{Z}|$ als Funktion der Frequenz im Bereich $1\,kHz \leq f \leq 1\,MHz$ dar.

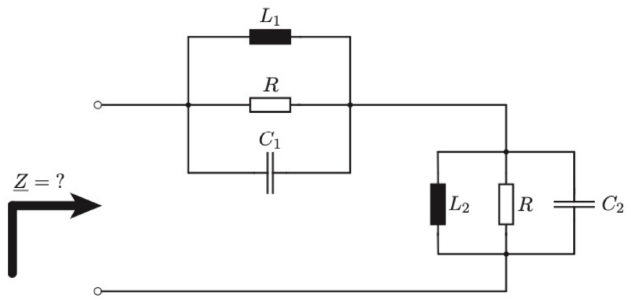
A) Schwingkreis 1:



Schwingkreis 2:



B)



C)

1.2 Bodeplots

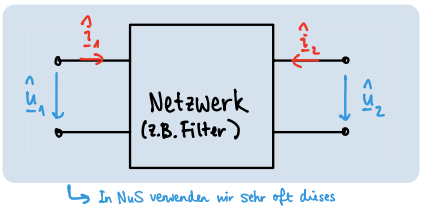
Von letzter Woche:

Die Übertragungsfunktion $\underline{F}(j\omega) = \frac{\hat{\underline{u}}_2}{\hat{\underline{u}}_1} = \frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} e^{j\varphi_F}$ besteht aus

($\frac{\hat{\underline{u}}_2}{\hat{\underline{u}}_1}$: komplexe Zahl; $\frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1} e^{j\varphi_F}$: Polarform)

einem **Amplitudengang** $\frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_1}$ und

einem **Phasengang** $\varphi_F = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(\underline{F})}{\mathrm{Re}(\underline{F})}\right)$

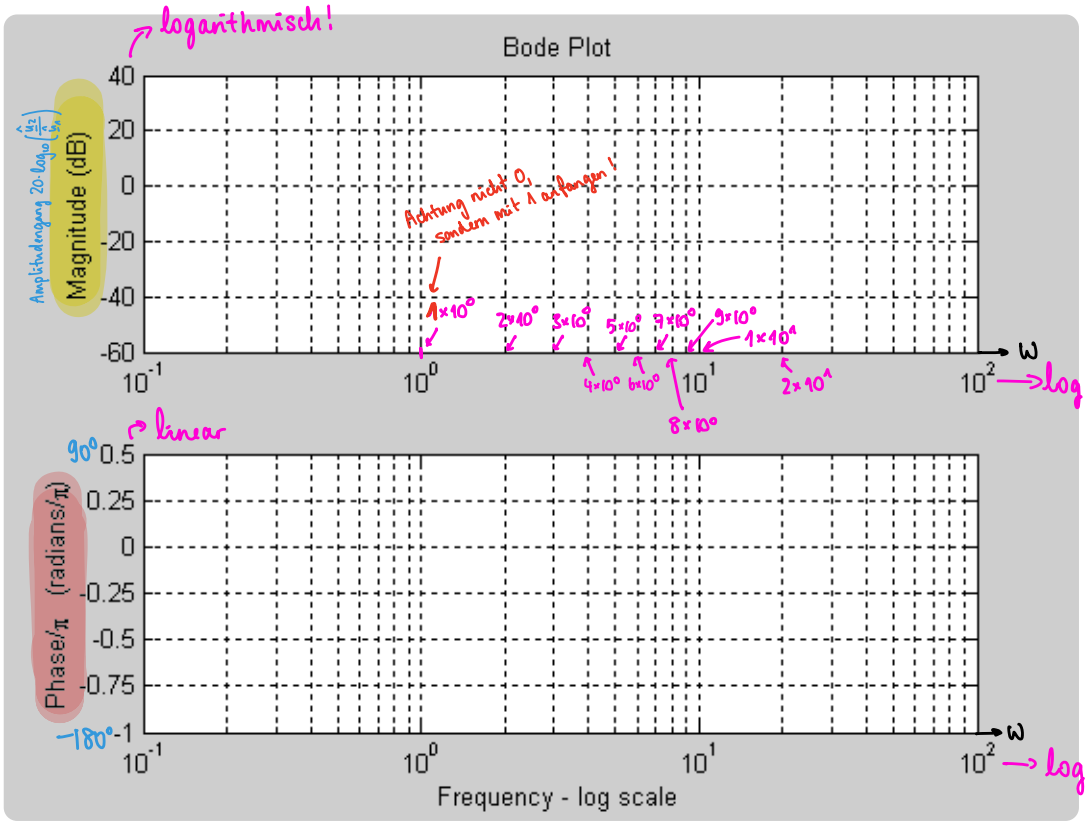


↳ In NuS verwenden wir sehr oft dieses Modell ("Zweitor") um unsere NWe darzustellen!

=> Wir verwenden Bodeplots, um das Verhalten von Übertragungsfunktionen bei verschiedenen Frequenzen zu untersuchen !

=> Ein Bode-Plot besteht aus zwei Plots: .....

=> Da uns das Verhalten von Übertragungsfunktionen über mehrere Grössenordnungen interessiert, verwenden wir ..... Skalen:



Heute lernen wir, wie wir diese Bodeplots zeichnen.

↗ Zusammenfassung S.7

Bode-Diagramm → Asymptotennäherung

Gezeichnet wird von kleinen zu grossen Frequenzen, d.h. links nach rechts / Darstellung in dB-Skala → $F(\omega)[dB] = 20\log_{10}(F(\omega))$

1. Faktorisieren der Funktion: $\underline{F}_{ges}(j\omega) = K_0 \cdot (j\omega)^r \cdot \underbrace{\underline{F}_1(j\omega) \cdot \underline{F}_2(j\omega) \cdot \ldots \cdot \underline{F}_n(j\omega)}_{\underline{F}^*_{ges}(j\omega)}$ (1)

Teilsysteme $F_i(j\omega)$ in Standardform (*)

	Steigungsänderung → ZUSÄTZLICH zur bereits vorhandenen Steigung/Phase!	Phasenänderung
$F_i(j\omega) = 1 + j\omega T_{n,i}$	Steigung +20dB/Dekade	Phase +90° (zwischen $0.1\omega_i$ & $10\omega_i$)
$F_i(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T_{p,i}}$	Steigung -20dB/Dekade	Phase -90° (zwischen $0.1\omega_i$ & $10\omega_i$)
$F_i(j\omega) = 1 + 2d_i T_{n,i}(j\omega) + (j\omega)^2 T^2_{n,i}$	Steigung +40dB/Dekade Bedingung: $d_i \leq 1$, sonst Polynom mit 2 reellen Nullstellen	Phase +180° (siehe Punkt 9)
$F_i(j\omega) = \frac{1}{1+2d_i T_{p,i}(j\omega)+(j\omega)^2 T^2_{p,i}}$	Steigung -40dB/Dekade Bedingung: $d_i \leq 1$, sonst Polynom mit 2 reellen Polstellen	Phase -180° (siehe Punkt 9)

(2)

2. Teilsysteme nach aufsteigenden Eckfrequenzen $\omega_i = 1/T_{ni}$ bzw. $\omega_i = 1/T_{pi}$ sortieren (ω_1 = kleinste Eckfrequenz)

Amplitudengang (doppellogarithmische Darstellung)

(3)

3. Startpunkt: ω_1 ; $F_{dB}(\omega_1) = 20\log_{10}(|K_0 F^*_{ges}(0)| \cdot \omega_1^r)$
4. Startpunkt nach links: Gerade mit Steigung $r \cdot 20^{dB}/_{Dekade}$ (Für $r = 0$ waagerechte Gerade)
5. Startpunkt nach rechts: Geradensegmente von einer Eckfrequenz bis zur nächst höheren Eckfrequenz. Bei jeder Eckfrequenz ω_i ändert Amplitudengang Steigung je nach Teilsystem, das zur Eckfrequenz gehört (s.o.).
   Mehrfache Pol-/Nullstellen: Steigungsänderung mehrfach nehmen.

(4) repeat $\forall \omega_i$

6. Annäherung: Ecken bei Eckfrequenz noch um ± 3dB bzw. Vielfachen davon bei mehrfachen Pol-/Nullstellen abrunden ($+n$·3dB bei konvexem / $-n$·3dB bei konkavem Verlauf). Dies gilt nur für konjugiert komplexe Pole mit Dämpfung $d_i > 1/2$.
   Falls $d_i < 1/2$:
   - Resonanzüberhöhung bei ω_i um $-20\log_{10}(2d_i)$dB oberhalb Geradennäherung
   - Amplitude: $|F(j\omega_i)| = \frac{1}{2d_i}$
   - Resonanzkreisfrequenz $\omega_r = \omega_i\sqrt{1-2d_i^2}$ ⇒ Punkt um $-20\log_{10}(2d_i\sqrt{1-d_i^2})$dB oberhalb Geradennäherung

(5)

Phasengang (logarithmische x-Achse)

7. Startfrequenz ω_1 nach links:

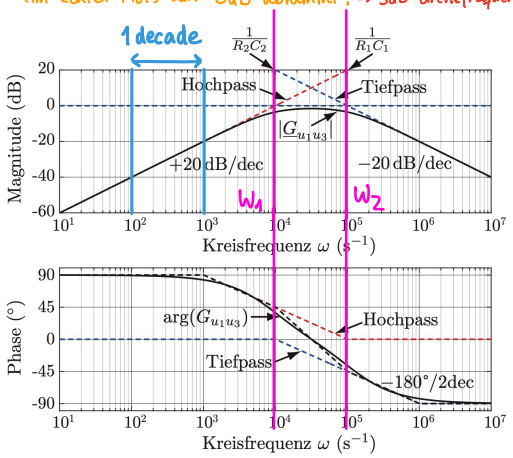
$$\varphi(0) = \begin{cases} r \cdot 90° & \text{falls } K_0 F^*_{ges}(0) > 0 \\ -180° + r \cdot 90° & \text{falls } K_0 F^*_{ges}(0) < 0 \end{cases}$$

(6) repeat $\forall \omega_i$

8. Startpunkt nach rechts: Phase ändert sich bei jeder Eckfrequenz ω_i je nach Teilsystem (s.o.).
9. Annäherung: Glieder 1. Ordnung – Phasenverlauf mit ±45°/Dekade zwischen $0.1\omega_i$ und $10\omega_i$
   Konjugiert komplexe Pole: Phasenänderung bei Eckfrequenz um so steiler, je kleiner d_i
   Phasengang für Teilsystem $F_i(j\omega)$ ist punktsymmetrisch zu dazugehörigen Eckfrequenz ω_i.
10. $\omega \to \infty$: Phase φ_{ges} strebt gegen $(m-n)\cdot 90°$ (n Grad Nenner- & m Grad Zählerpolynom).

Generelles Vorgehen: Bodeplots werden von links nach rechts gezeichnet.

Sidenote: da es eine Geradennäherung ist, ist der "echte" Bodeplot etwas runder bei den Eckfrequenzen/Knicks. Die Eckfrequenzen sind genau dort, wo die Verstärkung (im "echten" Plot) um 3dB abnimmt! ⇒ 3dB-Grenzfrequenz



(1) Übertragungsfunktion in Nullstellenform / nach Grundbausteinen (*) faktorisieren
   => z.T. mit Partialbruchzerlegung!
   => alle Parameter in dieser Form bestimmen! $K_0, r, \ldots$

(2) Eckfrequenzen ($\hat{=}$ Grenzfrequenz $\hat{=}$ 3dB-Grenzfrequenz) berechnen (aus den Grundbausteinen ablesen) & in beiden Plots einzeichnen

AMPLITUDENGANG

(3) Startpunkt berechnen @ω_1 (kleinste Eckfrequenz):
$F_{dB}(\omega_1) = 20\cdot\log_{10}(|K_0 F^*_{ges}(0)|\cdot\omega_1^r)$ → im Plot einzeichnen.
Steigung nach links bestimmen & einzeichnen.

(4) repeat $\forall \omega_i$ Steigung nach rechts:
Beiträge der einzelnen Grundbausteinen bestimmen (→ steht bei *) und einzeichnen

PHASENGANG

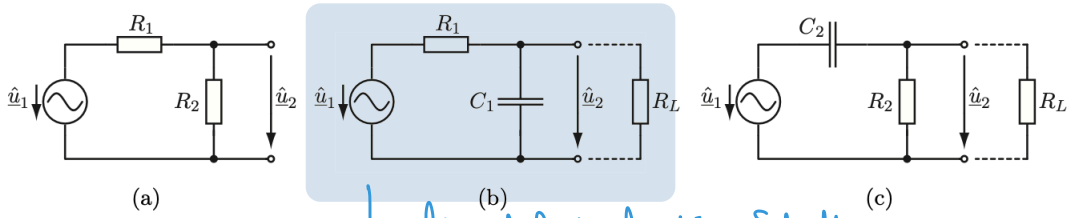
(5) $\varphi(\omega=0)$ bestimmen.
$\omega=0$ bis $\omega=\omega_1$ ist es immer eine Gerade → einzeichnen

(6) repeat $\forall \omega_i$ Beiträge der einzelnen Grundbausteinen bestimmen (→ steht bei *) und einzeichnen

Beispielaufgabe

↳ Aufgabe aus Serie 4

Aufgabe 1 Übertragungsfunktion und Bode Diagramm



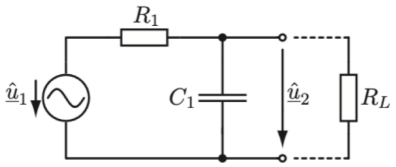
↳ lösen Aufgabe für diese Schaltung

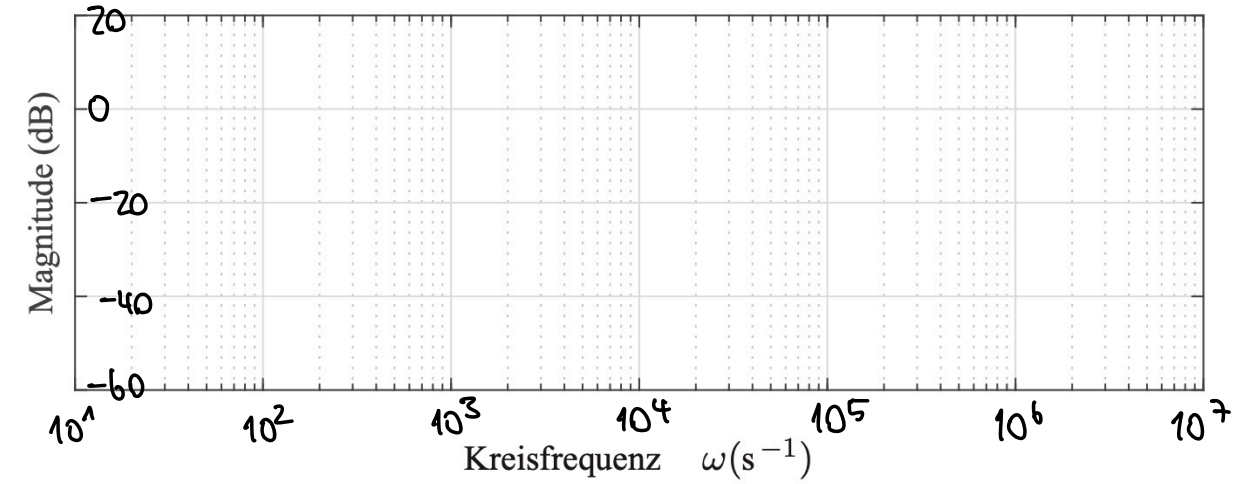
Abbildung 1: (a) Spannungsteiler, (b) RC-Tiefpassfilter, und (c) RC-Hochpassfilter.

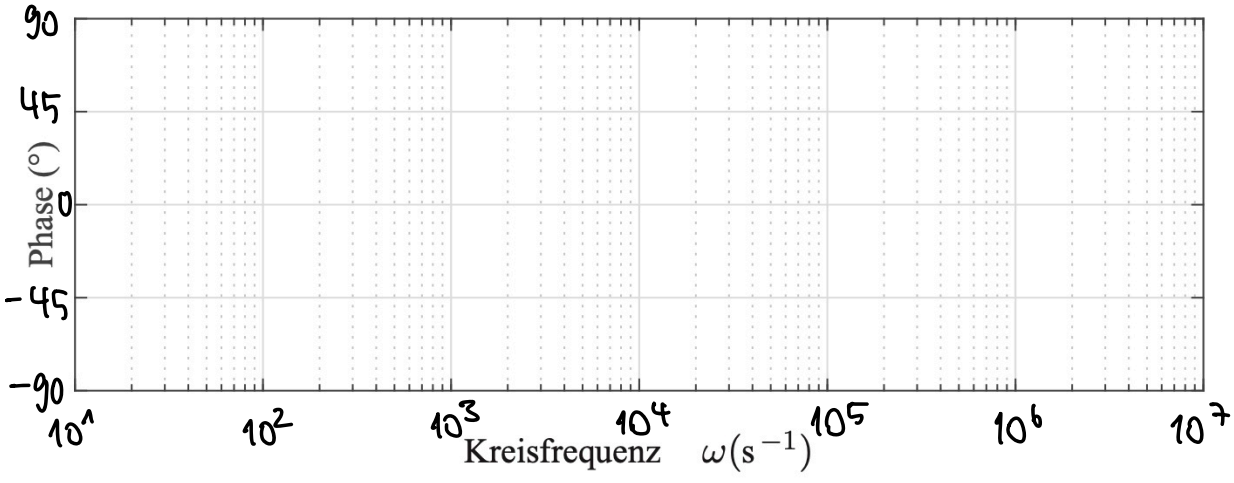
Gegeben sind die in Abbildung 1 gezeigten Schaltungen mit einer sinusförmigen Quellenspannung $\hat{u}_1$ und den Bauteilwerten $R_1 = R_2 = 10\,\text{k}\Omega$, $C_1 = 1\,\text{nF}$ und $C_2 = 10\,\text{nF}$. Der Lastwiderstande R_L in Abbildung 1(b) und 1(c) wird erst in Aufgabenteil 1.3) berücksichtigt.

1.1) Bestimmen Sie für jede der in Abbildung 1 gezeigten Schaltungen die Übertragungsfunktion $\underline{G}_{u1u2}(j\omega) = \frac{\hat{u}_2(j\omega)}{\hat{u}_1(j\omega)}$ und konstruieren Sie die zugehörigen Bode Diagramme (Amplitudengang und Phasengang) im Bereich $\omega \in [10^1 \ldots 10^7]\text{s}^{-1}$ mit Hilfe der Asymptotennäherung. Verwenden Sie die dazu angehängten Diagramme in Abbildungen 7 - 9. Geben Sie in beiden Fällen die 3 dB-Grenzfrequenz an.

1.1)




20
0
−20
−40
−60
Magnitude (dB)
10^1
10^2
10^3
10^4
10^5
10^6
10^7
Kreisfrequenz $\omega(\mathrm{s}^{-1})$


90
45
0
−45
−90
Phase (°)
10^1
10^2
10^3
10^4
10^5
10^6
10^7
Kreisfrequenz $\omega(\mathrm{s}^{-1})$

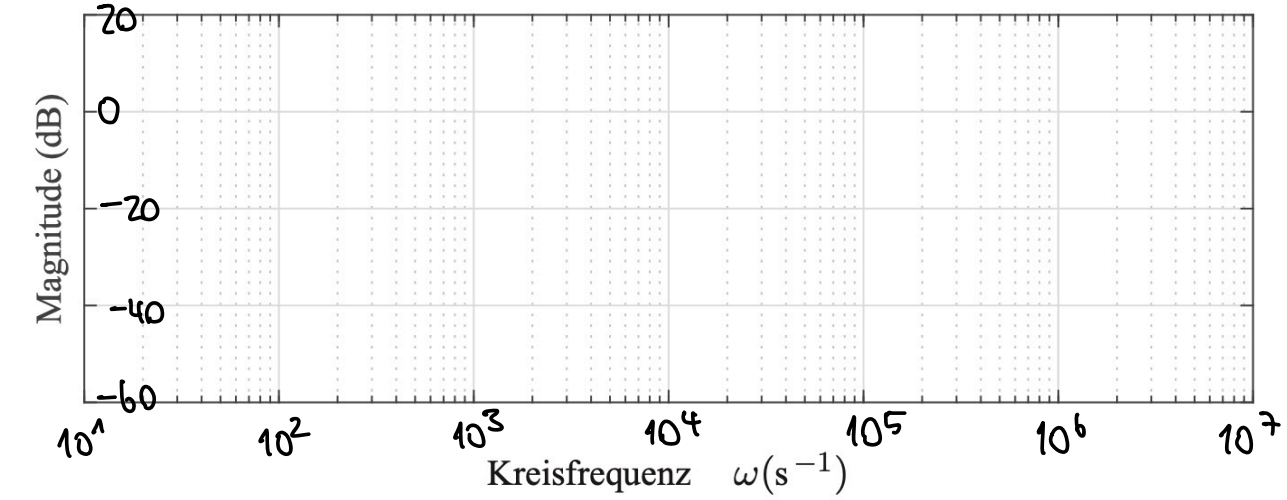
Beispielaufgabe

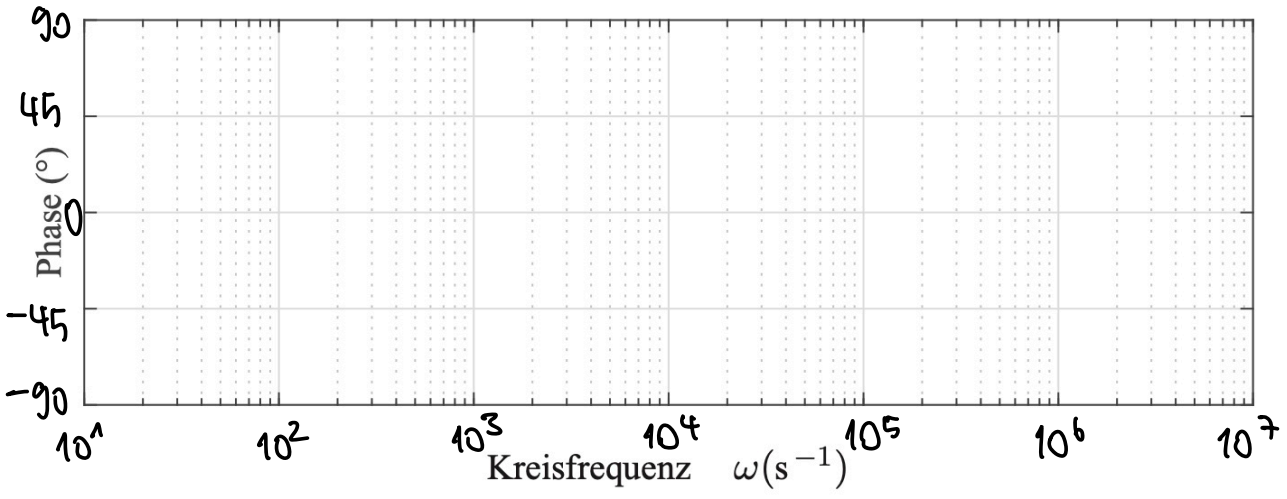
Sei die Übertragungsfunktion eines Bandpass-Filters gegeben als:

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{j\omega R_2 C_2}{1+j\omega R_2 C_2} \cdot \frac{1}{1+j\omega R_1 C_1}$$

mit $\frac{1}{R_1 C_1} = 10^4\,s^{-1}$ und $\frac{1}{R_2 C_2} = 10^5\,s^{-1}$.

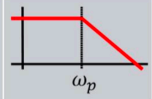
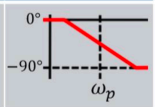
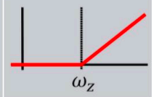
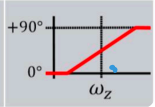
Konstruiere das Bode-Diagramm dieses Bandpassfilters.


20
0
−20
−40
−60
Magnitude (dB)
10^1
10^2
10^3
10^4
10^5
10^6
10^7
Kreisfrequenz $\omega(\mathrm{s}^{-1})$


90
45
0
−45
−90
Phase (°)
10^1
10^2
10^3
10^4
10^5
10^6
10^7
Kreisfrequenz $\omega(\mathrm{s}^{-1})$

Good to have's:

Für Filter 1. Ordnung:

	Formula	Amplitude		Phase	
Left Half-Plane Pole	$\frac{1}{1+\frac{j\omega}{\omega_p}}$	−20dB per decade from pole		−90° over two decades	
Left Half-Plane Zero	$1+\frac{j\omega}{\omega_z}$	+20dB per decade from zero		+90° over two decades	

"Left half plane" heisst, dass der Pol / die NST einen negativen Realteil hat.
In NuS2 kommen nur solche Pole / NSTen vor und keine "Right half plane" Pole / NSTen (= Pole/NSTen mit einem positiven Realteil)

=> mehr dazu erst in SS2 im 4. Semester :)

Für Filter n-Ordnung:

Phasenänderung ↗ zw. $0.1\omega_i$ und $10\omega_i$

Steigungsänderung ↗ zusätzlich zur bereits vorhandenen Steigung!

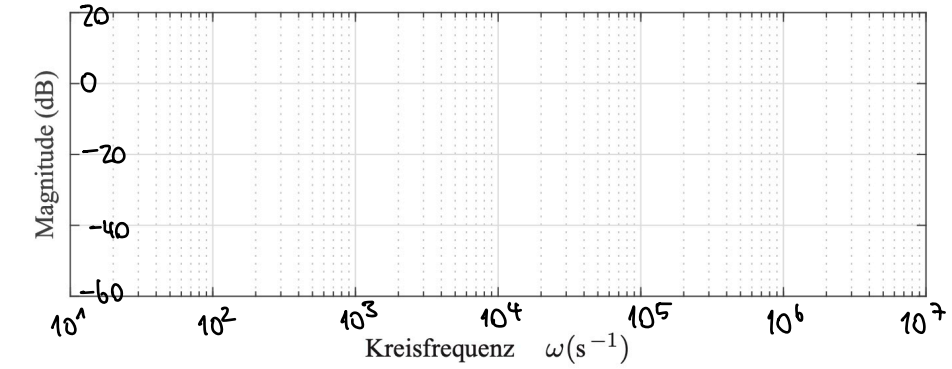
	$G(j\omega)$	$\phi(\omega=0)$	$\phi(\omega=\infty)$	$\triangle M(\omega=0)$	$\triangle M(\omega=\infty)$
Integrator	$\frac{1}{s}$	$-90°$	$-90°$	-20dB	-20dB
Differentiator	s	$90°$	$90°$	20dB	20dB
Negative Pole	$\frac{1}{(s+\alpha)}$	$0°$	$-90°$	0dB	-20dB
(Positive Pole	$\frac{1}{(\alpha-s)}$	$0°$	$90°$	0dB	-20dB)
Negative Zero	$(s+\alpha)$	$0°$	$90°$	0dB	20dB
(Positive Zero	$(\alpha-s)$	$0°$	$-90°$	0dB	20dB)

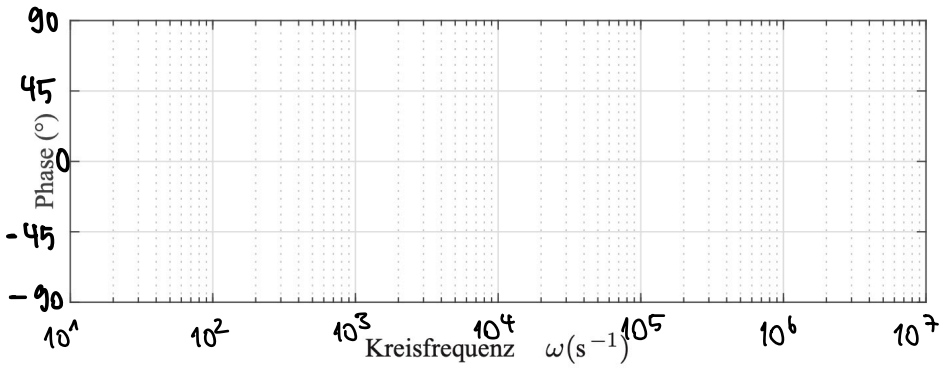
"Grundbausteine" — Phasengang — Amplitudengang

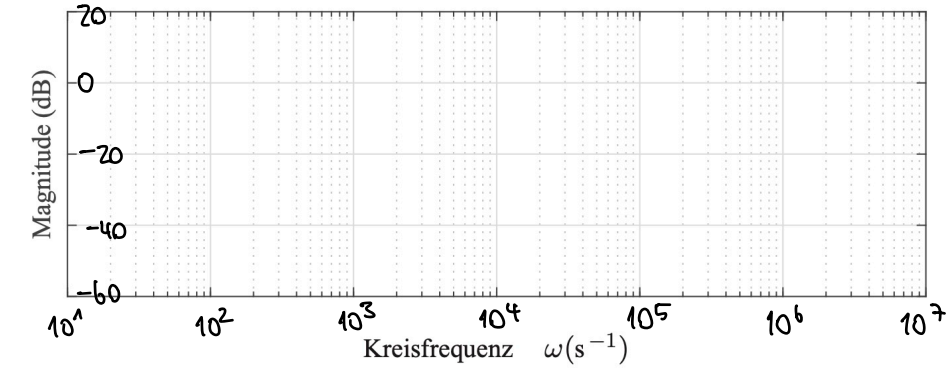
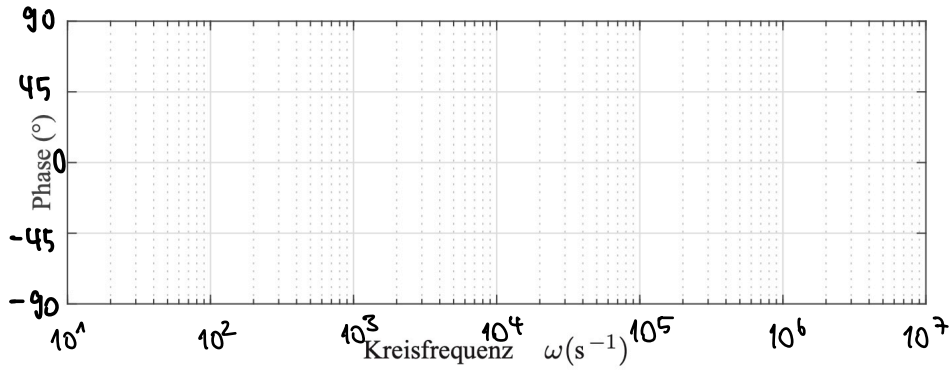
=> Um diese Tabellen verwenden zu können, muss man vorher noch die Übertragungsfunktion faktorisieren & im Grundbausteine-Form bringen & alle Eckfrequenzen berechnen, wie in den vorherigen Beispielen.

Gleiche Bsp.e wie vorher, nun mithilfe dieser Tabellen:

$$\underline{G}_{u_1u_2}(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega R_1 C_1} \qquad \text{mit } R_1 C_1 = 10^{-5}\,s$$





$$\underline{G}(j\omega) = j\omega R_2 C_2 \cdot \frac{1}{1+j\omega R_2 C_2} \cdot \frac{1}{1+j\omega R_1 C_1} \qquad \text{mit } R_1 C_1 = 10^{-4}\,s$$

$$R_2 C_2 = 10^{-5}\,s$$