

ÜBUNG 07

19.04.2024 - LINA DE WINDT

Alle Unterlagen auf n.ethz.ch/~ldewindt

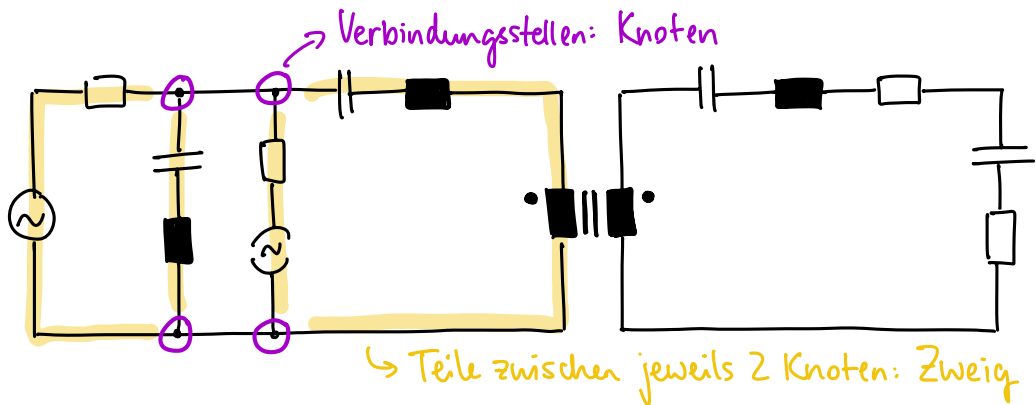
Themen von heute:

1. Recap der Theorie von dieser Woche
 - 1.1 Netzwerkanalyse :
 - 1.1.1 Maschenstromverfahren
2. Beispielaufgaben
3. Vorbesprechung der Serie 7

1.1 Netzwerkanalyse

↳ Ist die Berechnung von Strömen & Spannungen in einem elektrischen Netzwerk.

Ein Netzwerk ist einfach irgendeine Zusammenschaltung von NW-Elementen:

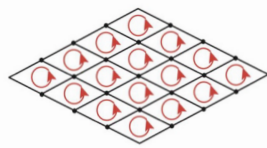


Ein Netzwerk kann man klassifizieren in ebene & nicht-ebene Netzwerke:

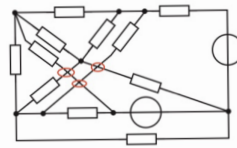
Ebene VS. nicht-ebene Netzwerke

Ebene NWe sind kreuzungsfreie NWe. D.h., die Zweige des NWs schneiden sich nur in Knoten. Solche NWe treten in der Praxis häufig auf.

Nicht-ebene NWe hingegen haben Zweige, die sich nicht nur in Knoten, sondern auch in anderen Stellen des NWs schneiden.

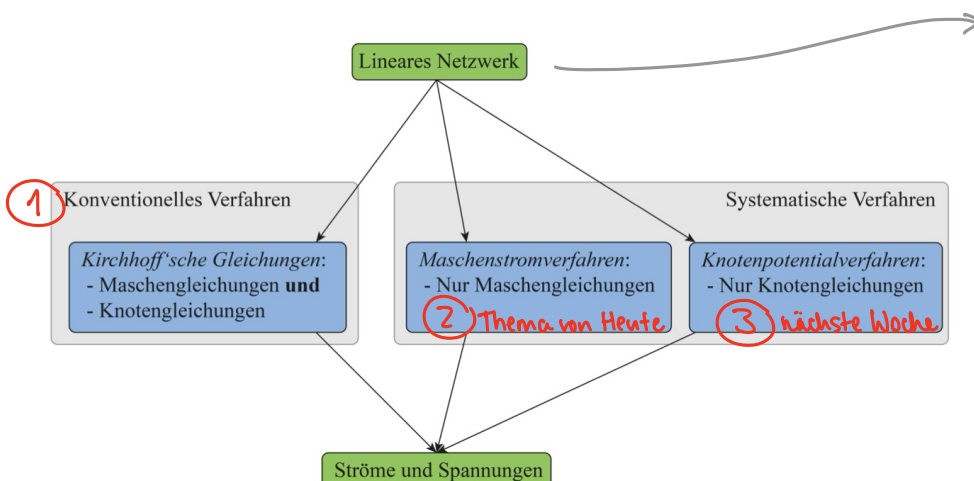


Kreuzungsfreies (ebenes) Netzwerk



Nicht-kreuzungsfreies Netzwerk

Für die Analyse eines NWs gibt es ein klares Verfahren:



D.h. besteht nur aus linearen NW-Elementen:

- Widerstand
- Induktivität
- Kapazität
- Unabhängige Quelle
- Gesteuerte (=abhängige) Quelle
- Transformator (=Übertrager)

① Konventionelles Verfahren

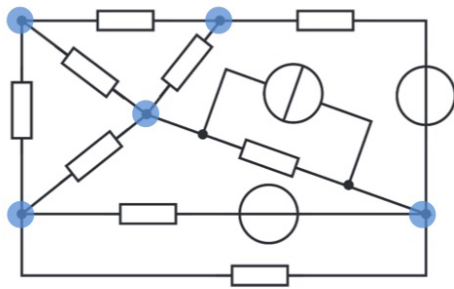
Gegeben ist ein Netzwerk mit K Knoten & Z Zweigen. Für die Berechnung der Z Zweigen muss man dann:

$K-1$ linear unabhängige Knotengleichungen

&

$Z-(K-1)$ linear unabhängige Maschengleichungen aufstellen.

Beispiel:



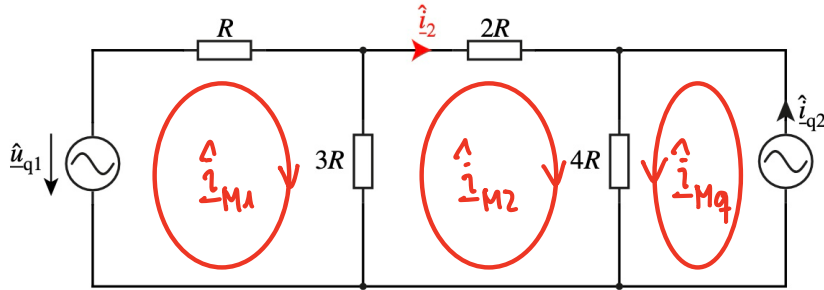
Anzahl Knoten: $K=5$

Anzahl Zweige: $Z=9$

$\Rightarrow (5-1) + (9-(5-1)) = 9$ Gleichungen, wenn man das NW mit dem konventionellen Verfahren analysieren möchte!

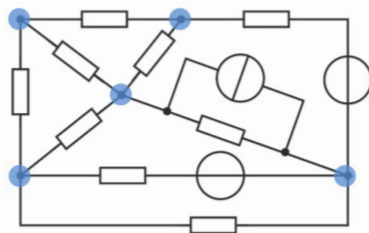
1.1.1 Maschenstromverfahren

Idee: Die Anzahl der Gleichungen bei einer Netzwerk-Analyse durch das Einführen von virtuellen Maschenströmen reduzieren!



Die Maschenströme werden in den linear unabhängigen Maschenumläufen des Netzwerks definiert. Diese Maschenströme erfüllen die Knotengleichungen, da sie jeweils in einen Knoten hinein & wieder hinaus fließen. Das heißt, die K Knotengleichungen müssen nicht mehr aufgestellt werden. Insgesamt müssen also beim Maschenstromverfahren nur noch $Z-(K-1)$ Gleichungen (bzw. Maschengleichungen) aufgestellt werden!

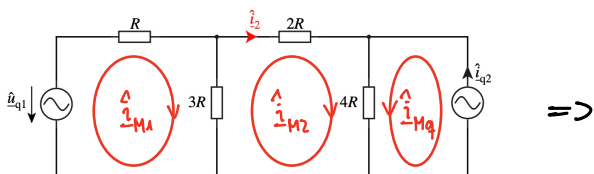
Also wenn wir das Beispiel von vorher wieder nehmen...



=> nur noch 5 Gleichungen zum aufstellen beim Maschenstromverfahren.

Dann muss man nur noch diese $Z-(K-1)$ Gleichungen lösen, um das Netzwerk komplett zu analysieren.

Bsp:



Maschengleichungen:

$$M1: -\hat{u}_{q1} + R \cdot \hat{i}_{M1} + 3R \cdot (\hat{i}_{M1} - \hat{i}_{M2}) = 0$$

$$M2: 3R \cdot (\hat{i}_{M2} - \hat{i}_{M1}) + 2R \cdot \hat{i}_{M2} + 4R \cdot (\hat{i}_{M2} + \hat{i}_{q2}) = 0$$

2 Gleichungen, 2 Unbekannte :)

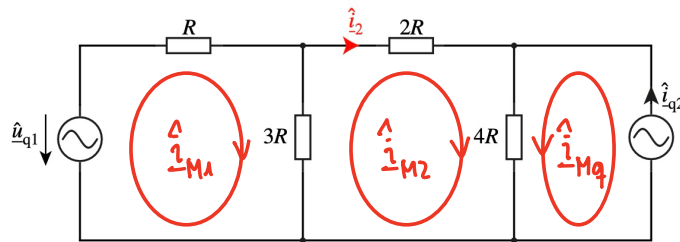
Doch wie kann man identifizieren, welche Maschen eines Netzwerks linear unabhängig zueinander sind und somit an den richtigen Stellen ein Maschenstrom einführen?

Dafür gibt es zwei Methoden:

1. Methode der Elementarmaschen:

Überall wo eine Elementarmasche ist, einen Maschenstrom einführen.

Elementarmaschen sind alle Maschen, in deren Inneren sich keine Zweige befinden.



⇒ Diese Methode wird in der Praxis oft angewendet. Sie funktioniert nur für ebene Netzwerke.

2. Methode des vollständigen Baums:

Die erste Methode wird als **vollständiger Baum** bezeichnet. Zunächst werden alle k Netzwerkknoten entlang der Zweige so miteinander verbunden, dass keine geschlossene Masche entsteht. Bei k Knoten werden genau $k - 1$ Zweige für die Verbindungen benötigt. Die ► Abb. 3.39 zeigt nur zwei der Möglichkeiten, für das gegebene Netzwerk einen vollständigen Baum zu konstruieren.

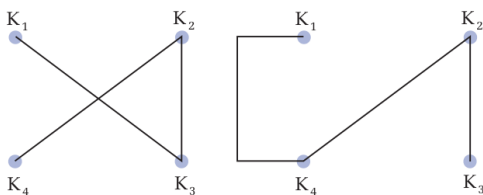


Abbildung 3.39: Vollständiger Baum

Von den insgesamt z Zweigen des Netzwerks gehören damit $k - 1$ Zweige zu dem vollständigen Baum und $z - (k - 1) = m$ Zweige, die so genannten **Verbindungs Zweige**, sind unabhängig von dem vollständigen Baum. Da die Anzahl der Verbindungs Zweige identisch ist zu der noch benötigten Anzahl unabhängiger Maschengleichungen, werden die Maschen jetzt so gewählt, dass jeder Verbindungs Zweig in genau einer Masche enthalten ist. Dazu muss jeder Verbindungs Zweig über den vollständigen Baum zu einer Masche geschlossen werden. Die Vorgehensweise wird am rechten Beispiel der Abb. 3.39 demonstriert.

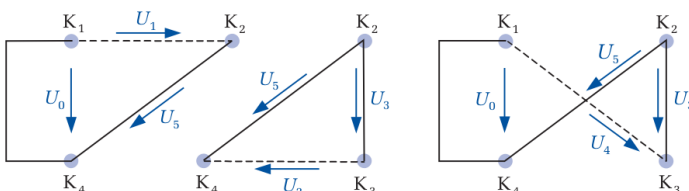
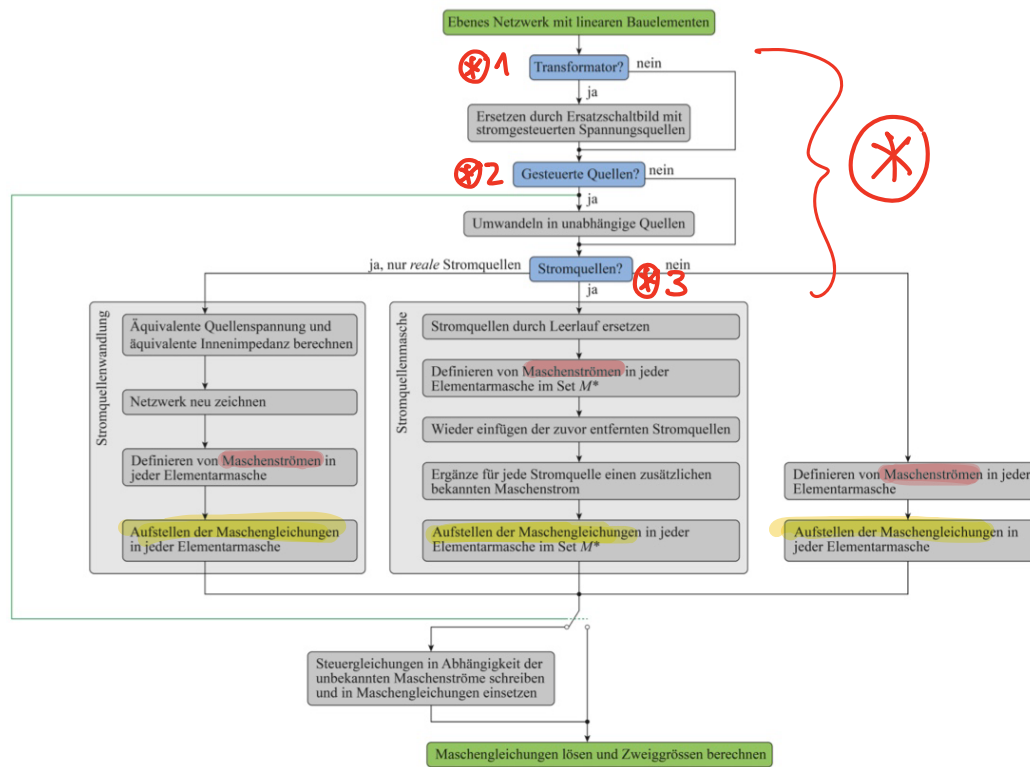


Abbildung 3.40: Aufstellung der Maschengleichungen beim vollständigen Baum

→ Diese Methode ist in der Praxis ungeeignet, aber findet Anwendung in Berechnungsprogrammen. Sie funktioniert sowohl für ebene als auch für nicht-ebene NWe.

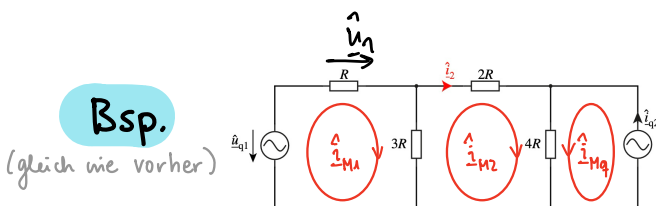
Kochrezept Maschenstromverfahren für ebene NWe



→ Möglichkeiten, das Gleichungssystem nach den Maschenströmen aufzulösen:

- Einsetzungsverfahren
- Gauß'sches Eliminationsverfahren
- Matrixlösung

Anhand der berechneten Maschenströme können anschliessend die gesuchten Zweiggrößen bestimmt werden :)



Maschengleichungen:

$$\Rightarrow \begin{aligned} M1: & -\hat{u}_{q1} + R \cdot \hat{i}_{M1} + 3R \cdot (\hat{i}_{M1} - \hat{i}_{M2}) = 0 \\ M2: & 3R \cdot (\hat{i}_{M2} - \hat{i}_{M1}) + 2R \cdot \hat{i}_{M2} + 4R \cdot (\hat{i}_{M2} + \hat{i}_{q2}) = 0 \end{aligned}$$

⇒ lösen nach $\hat{i}_{M1}$, $\hat{i}_{M2}$ - Dann daraus Zweiggrößen bestimmen,

z.B. $\hat{u}_1 = R \cdot \hat{i}_{M1}$

(*) Seeeeeeeeeehr wichtig:

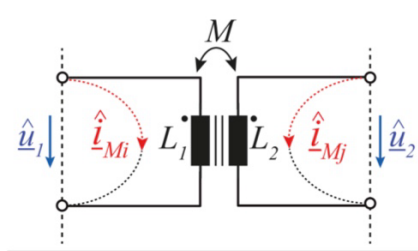
Wenn Transformatoren, gesteuerte Quellen oder Stromquellen im NW enthalten sind, muss man diese zuerst **umwandeln**, bevor man anfängt die Maschenströme zu definieren:

Transformatoren (*)1

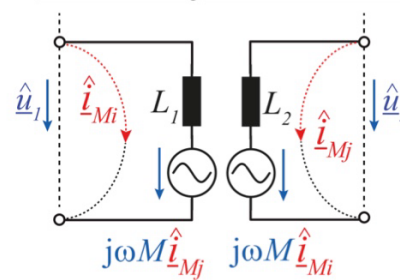
- Jede Transformatorseite wie einen separaten Netzwerkzweig behandeln
- Die entsprechenden Zweigspannungen $\hat{u}_1$ und $\hat{u}_2$ setzen sich zusammen aus:
 - Spannungsabfall über Selbstinduktivitäten L_1 und L_2 , sowie
 - Induzierte Spannungen $\hat{u}_{ind,1}$ und $\hat{u}_{ind,2}$ aufgrund der magnetischen Kopplung (Kopplungsinduktivität M) zwischen den Spulen

$$\hat{u}_1 = j\omega L_1 \hat{i}_{M1} + \hat{u}_{ind,1} \quad \hat{u}_{ind,1} = j\omega M \hat{i}_{M2}$$

$$\hat{u}_2 = j\omega L_2 \hat{i}_{M2} + \hat{u}_{ind,2} \quad \hat{u}_{ind,2} = j\omega M \hat{i}_{M1}$$



Ersatzschaltung des Transformators



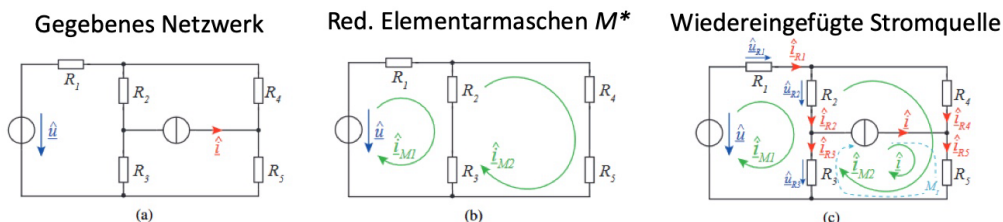
Stromquellen (*)3

Stromquellen müssen beim Maschenstromverfahren speziell behandelt werden. Dafür gibt es zwei Methoden.

- Stromquellen müssen beim Maschenstromverfahren speziell behandelt werden.

1.) Stromquellenmasche:

- Bevorzugte Variante, weil anwendbar für reale und ideale Stromquellen
- Stromquellen aus Netzwerk entfernen (durch Leerläufe ersetzen).
- Übrig bleibt ein reduziertes Set M^* an Elementarmaschen
- In diesem Set M^* die Maschenströme definieren
- Stromquellen wieder hinzufügen und je einen zusätzlichen, bekannten Maschenstrom definieren, der über die jeweilige Stromquelle verläuft.
- Dieser zusätzliche Maschenstrom ist dabei gleich dem Strom der jeweiligen idealen Stromquelle.



2.) Stromquellenwandlung:

- Umwandeln einer realen Stromquelle in eine äquivalente Ersatzspannungsquelle.
- Für ideale Stromquellen nur anwendbar nach einer aufwändigen Quellenteilung und – versetzung.

Beispielaufgabe

Aufgabe 1 Maschenstromverfahren

Gegeben sei das Netzwerk in Abbildung 1 mit der Spannungsquelle $\hat{u}_{q1}$, der Stromquelle $\hat{i}_{q2}$ sowie den Widerständen R , $2R$, $3R$ und $4R$. Berechnen Sie den Zweigstrom $\hat{i}_2$ in Abhängigkeit von $\hat{u}_{q1}$, $\hat{i}_{q2}$ und R mit Hilfe des Maschenstromverfahrens.

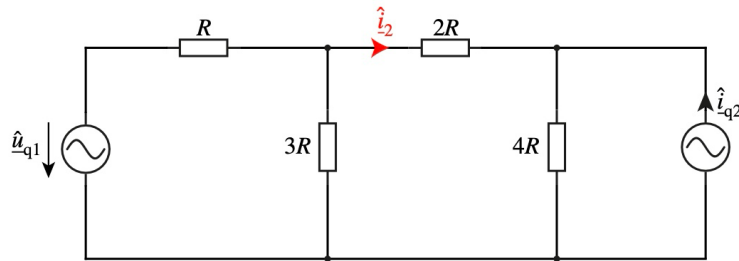


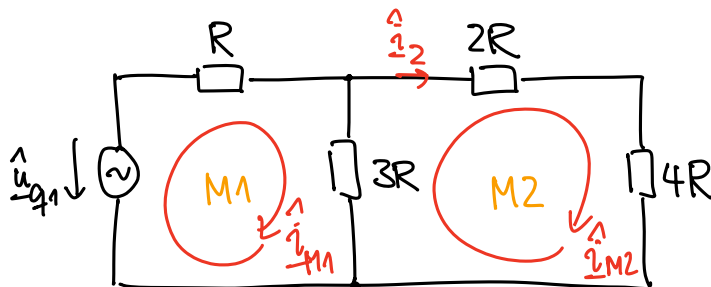
Abbildung 1: Mittels Maschenstromverfahren zu analysierendes Netzwerk. Gesucht ist der Zweigstrom $\hat{i}_2$.

①. Entscheiden, mit welcher Methode man die Stromquelle behandeln möchte:

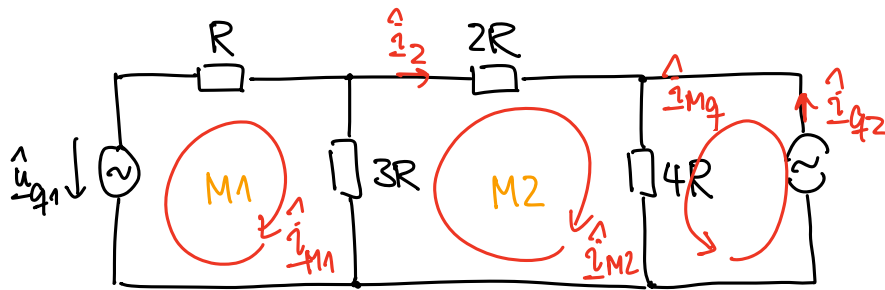
Stromquellenmasche oder Stromquellenwandlung.

Im weiteren nehme ich die Methode der Stromquellenmasche.

②. NW ohne Stromquelle zeichnen & Maschenströme definieren:



③. Stromquelle wieder hinzufügen und für die zusätzliche Masche einen bekannten Maschenstrom $\hat{i}_{M3} = \hat{i}_{q2}$ mit dem gleichen Richtungssinn wie der Quellstrom einführen:



④. Maschengleichungen aufstellen (in abhängigigkeit der Maschenströme):

$$M1: -\hat{u}_{q1} + R \cdot \hat{i}_{M1} + 3R \cdot (\hat{i}_{M1} - \hat{i}_{M2}) = 0$$

$$M2: 3R \cdot (\hat{i}_{M2} - \hat{i}_{M1}) + 2R \cdot \hat{i}_{M2} + 4R \cdot (\hat{i}_{M2} + \hat{i}_{q2}) = 0$$

faktorisieren (wollen die Form $A \cdot \hat{i}_{M1} + B \cdot \hat{i}_{M2} = C$)

$$\Rightarrow M1: 4R \cdot \hat{i}_{M1} - 3R \hat{i}_{M2} = \hat{u}_{q1}$$

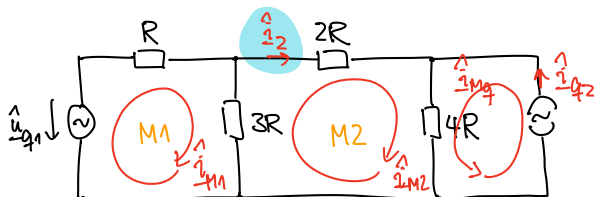
$$M2: -3R \cdot \hat{i}_{M1} + 9R \hat{i}_{M2} = -4R \hat{i}_{q2}$$

⑤. In Matrixform ausdrücken:

$$\underline{Z} \cdot \hat{\underline{i}}_M = \begin{pmatrix} 4R & -3R \\ -3R & 9R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{i}_{M1} \\ \hat{i}_{M2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u}_{q1} \\ -4R \hat{i}_{q2} \end{pmatrix}$$

Maschenimpedanzmatrix Maschenströme Quellgrößen

⑥. In dieser Aufgabe ist $\hat{i}_2$ gesucht.



Da $\hat{i}_2 = \hat{i}_{M2} \Rightarrow$ Gleichungssystem nach $\hat{i}_{M2}$ auflösen:

$$\underline{Z} \cdot \hat{\underline{i}}_M = \hat{\underline{u}}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\underline{i}}_M = \underline{Z}^{-1} \cdot \hat{\underline{u}} \quad \left/ \quad \text{für } \underline{Z} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \text{ mit } \det(\underline{Z}) \neq 0 \text{ ist } \underline{Z}^{-1} = \frac{1}{\det(\underline{Z})} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right.$$

$$\Leftrightarrow \hat{\underline{i}}_M = \begin{pmatrix} \hat{i}_{M1} \\ \hat{i}_{M2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(\underline{Z})} \begin{pmatrix} 9R & 3R \\ 3R & 4R \end{pmatrix} \hat{\underline{u}} = \frac{1}{27R^2} \begin{pmatrix} 9R & 3R \\ 3R & 4R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_{q1} \\ -4R \hat{i}_{q2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{i}_{M2} = \frac{1}{27R^2} (3R \hat{u}_{q1} - 16R \hat{i}_{q2}) = \underline{\underline{\frac{1}{9R} \hat{u}_{q1} - \frac{16}{27} \hat{i}_{q2} = \hat{i}_{q2}}}$$

Beispiel (mit einem Transformator) - Aus Beispielklausur 1

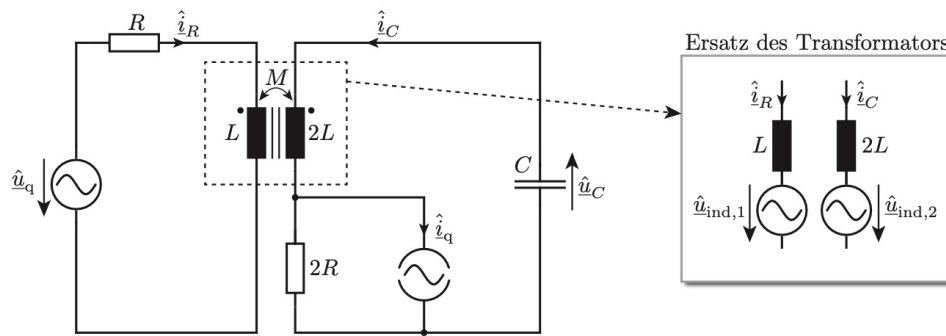


Abbildung 3: Netzwerk mit der Spannungsquelle $\hat{u}_q$, der Stromquelle $\hat{i}_q$ und einem Transformator.

Das in Abbildung 3 gezeigte Netzwerk enthält eine Spannungsquelle $\hat{u}_q$, eine Stromquelle $\hat{i}_q$, die Widerstände R und $2R$, die Kapazität C sowie einen Transformator. Der Transformator kann wie gezeigt durch ein Ersatzschaltbild mit den Selbstinduktivitäten L und $2L$ sowie den induzierten Spannungen $\hat{u}_{\text{ind},1}$ und $\hat{u}_{\text{ind},2}$ beschrieben werden. Die Kopplungsinduktivität beträgt $M = 1.5L$. Die induzierten Spannungen werden durch zwei stromgesteuerte Spannungsquellen modelliert und sind gegeben durch

$$\hat{u}_{\text{ind},1} = j\omega 1.5L \hat{i}_C$$

$$\hat{u}_{\text{ind},2} = j\omega 1.5L \hat{i}_R$$

Das Netzwerk befindet sich im eingeschwungenen Zustand und soll im Folgenden mittels dem Maschenstromverfahren berechnet werden.

- a.) Wie viele unabhängige Maschen gibt es im Netzwerk? Nennen Sie zwei Methoden zur Berücksichtigung der Stromquelle $\hat{i}_q$ im Maschenstromverfahren. Wählen Sie eine davon aus und zeichnen Sie alle notwendigen Maschenströme in das Netzwerk ein. (Falls erforderlich, zeichnen Sie das resultierende Netzwerk neu.)

Lösung:

Das Netzwerk enthält zwei unabhängige Maschen.
Stromquellenmasche und Stromquellenwandlung

Lösungsweg 1 mit Stromquellenmasche:

- Korrektes Einzeichnen der beiden Maschenströme $\hat{i}_{M1}$ und $\hat{i}_{M2}$ mit Umlaufsinn. Richtung beliebig wählbar.
- Korrektes Einzeichnen des zusätzlichen Maschenstroms $\hat{i}_{Mq}$ mit Umlaufsinn. Richtung beliebig wählbar. Beide eingezeichneten Varianten (rot und blau) möglich.
- $\hat{i}_{Mq}$ ist bekannt und es gilt $\hat{i}_{Mq} = \hat{i}_q$

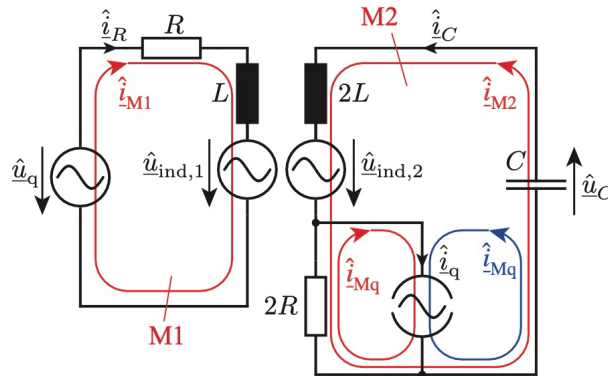


Abbildung 6: Schaltung mit Maschenströmen und zusätzlichem Maschenstrom über die Stromquelle.

Lösungsweg 2 mit Stromquellenwandlung:

- Korrektes Einzeichnen der beiden Maschenströme $\hat{i}_{M1}$ und $\hat{i}_{M2}$ mit Umlaufsinn. Richtung beliebig wählbar.
- Korrektes Zeichnen der Ersatzschaltung mit äquivalenter Spannungsquelle $\hat{u}_{q2}$ und seriellen Innenwiderstand R_i
- Korrekte Umwandlungsgleichungen $\hat{u}_{q2} = 2R\hat{i}_q$ und $R_i = 2R$

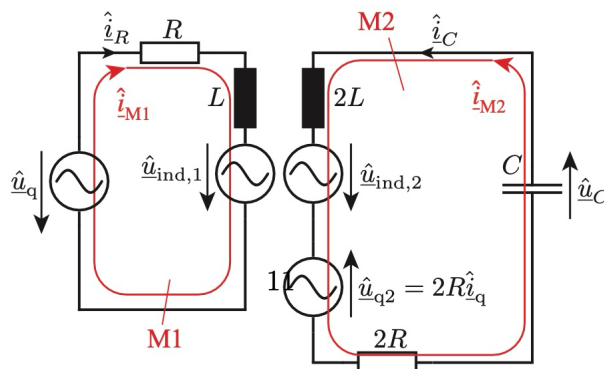


Abbildung 7: Schaltung mit Maschenströmen und äquivalenter Spannungsquelle.

- 1)• Gesteuerte Quellen vor dem Aufstellen der Maschengleichungen in unabhängige Quellen umwandeln. Dann Maschenströme definieren.
- 2)• Maschengleichungen aufstellen
- 3)• Steuergleichungen in Abhängigkeit der Maschenströme ausdrücken.
- 4)• Anschliessend Steuergleichungen in Maschengleichungen einsetzen und nach Maschenströmen auflösen.

Beispielaufgabe:

Aufgabe 2 Maschenstromverfahren mit gesteuerter Quelle

Gegeben sei das Netzwerk in Abbildung 2 mit der Spannungsquelle $\hat{u}_{q1}$ und der stromgesteuerten Stromquelle $\hat{i}_{q2} = \beta \hat{i}_3$, sowie den Impedanzen $\underline{Z}_n$ mit $n \in [1, 2, 3, 4]$. Stellen Sie die dazugehörigen Maschengleichungen in Matrixform auf.

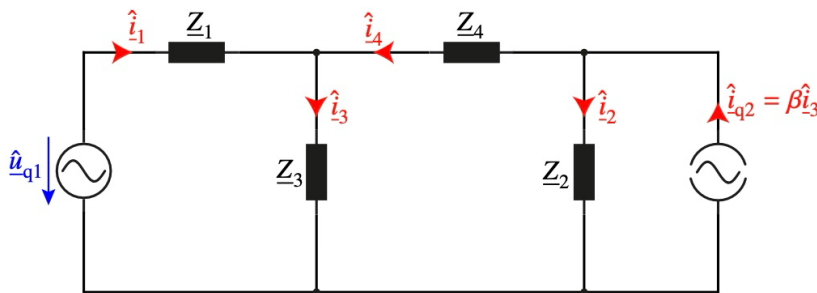


Abbildung 2: Mit dem Maschenstromverfahren zu analysierendes Netzwerk bestehend aus den Impedanzen $\underline{Z}_n$ mit $n \in [1, 2, 3, 4]$, der Konstantspannungsquelle $\hat{u}_{q1}$ und der stromgesteuerten Stromquelle $\hat{i}_{q2} = \beta \hat{i}_3$.

Ebenes NW $\Rightarrow$ Maschengleichungen mit dem Verfahren der Elementarmaschen aufstellen.

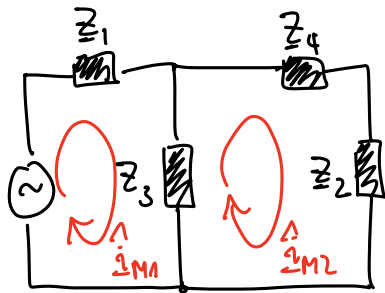
NW enthält eine gesteuerte Stromquelle !!

$\Rightarrow$ 1. in eine unabhängige Quelle umwandeln

2. entscheiden, mit welcher der 2 Methoden (Stromquellenmasche oder Stromquellenwandlung) die Stromquelle behandeln.

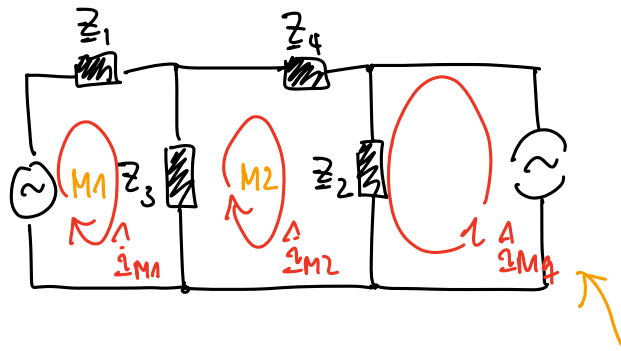
$\rightarrow$ hier nehme ich die Methode der Stromquellenmasche.

a) Stromquelle durch LL ersetzen & Maschenströme in den Elementarmaschen einführen:



b) Stromquelle wieder hinzufügen (hier die Steuergleichung noch ignorieren).

Ein weiterer Maschenstrom $\hat{i}_{Mq} = \hat{i}_{q2}$ in Richtung des Quellenstroms für die zusätzlich entstandene Masche definieren:



*dieser Maschenstrom ist bekannt (also keine zusätzliche Unbekannte)
Die Unbekannten Größen sind immernoch nur $\hat{i}_{M1}$ & $\hat{i}_{M2}$.
Die wollen wir im nächsten Schritt bestimmen.

3. Maschengleichungen aufstellen:

$$M1: \hat{u}_1 + \hat{u}_3 = 0$$

$$\Rightarrow Z_1 \hat{i}_{M1} + Z_3 (\hat{i}_{M1} - \hat{i}_{M2}) = \hat{u}_{q1}$$

$$M2: \hat{u}_2 - \hat{u}_3 - \hat{u}_4 = 0$$

$$\Rightarrow Z_2 (\hat{i}_{M2} + \hat{i}_{Mq}) - Z_3 (\hat{i}_{M1} - \hat{i}_{M2}) + Z_4 \hat{i}_{M2} = 0$$

4. Die Steuergleichung für die gesteuerte Quelle einsetzen. Dabei muss man die Steuergrösse $\hat{i}_3$ durch die Maschenströme ausdrücken!

Steuergleichung: $\hat{i}_{Mq} = \hat{i}_{q2} = \beta \hat{i}_3 = \beta (\hat{i}_{M1} - \hat{i}_{M2})$

In Abhängigkeit der Maschenströme darstellen!

=> Maschengleichungen:

M1: $\underline{z}_1 \hat{i}_{M1} + \underline{z}_3 (\hat{i}_{M1} - \hat{i}_{M2}) = \hat{u}_{q1}$

M2: $\underline{z}_2 (\hat{i}_{M2} + \beta (\hat{i}_{M1} - \hat{i}_{M2})) - \underline{z}_3 (\hat{i}_{M1} - \hat{i}_{M2}) + \underline{z}_4 \hat{i}_{M2} = 0$

5. Maschengleichungen in Matrixform darstellen:

Zuerst die Gleichungen in die Form $\underbrace{A}_{\text{A}} \cdot \hat{i}_{M1} + \underbrace{B}_{\text{B}} \cdot \hat{i}_{M2} = X$ bringen:

M1: $(\underline{z}_1 + \underline{z}_3) \hat{i}_{M1} - \underline{z}_3 \hat{i}_{M2} = \hat{u}_{q1}$

M2: $(\beta \underline{z}_2 - \underline{z}_3) \hat{i}_{M1} + (\underline{z}_2 (1 - \beta) + \underline{z}_3 + \underline{z}_4) \hat{i}_{M2} = 0$

=> $\underline{z}_M \cdot \hat{i}_M = \begin{pmatrix} \underline{z}_1 + \underline{z}_3 & -\underline{z}_3 \\ \beta \underline{z}_2 - \underline{z}_3 & \underline{z}_2 (1 - \beta) + \underline{z}_3 + \underline{z}_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{i}_{M1} \\ \hat{i}_{M2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u}_{q1} \\ 0 \end{pmatrix}$

Maschenimpedanzmatrix
Maschenströme
Quellgrößen