

Themen von heute:

1. Recap der Theorie von dieser Woche

1.1 Netzwerkanalyse:

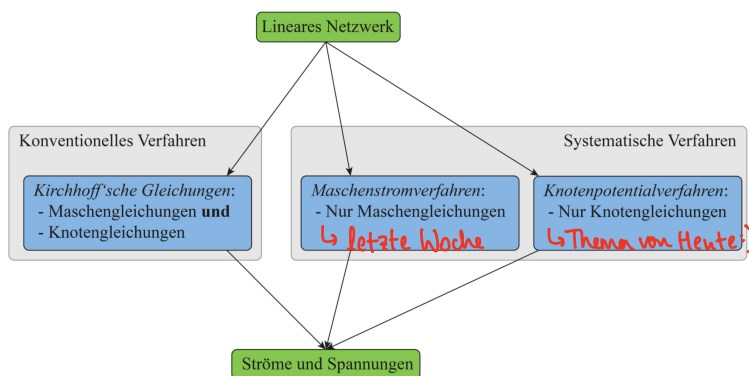
1.1.1 Knotenpotentialverfahren → Zusammenfassung S.3

2. Beispielaufgaben

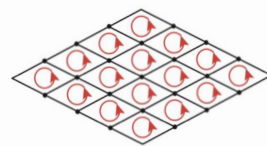
3. Vorbesprechung der Serie 8

Wichtiges aus letzter Woche:

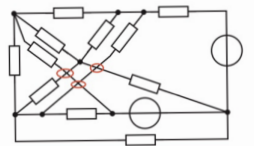
Netzwerkanalyse:



Ebene vs. nicht-ebene Netzwerke



Kreuzungsfreies (ebenes) Netzwerk

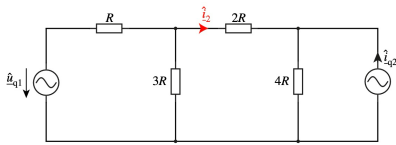


Nicht-kreuzungsfreies Netzwerk

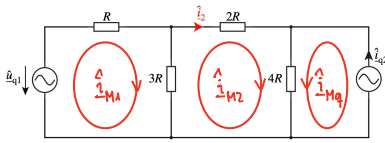
K = Anzahl Knoten eines NW
 Z = Anzahl Zweige eines NW

Maschenstromverfahren

↳ Grundidee: Anzahl Gleichungen bei der Netzwerkanalyse reduzieren durch das Einführen von virtuellen Maschenströmen!



→ konventionelles Verfahren: $K-1+Z-(K-1)$ Gleichungen



→ Maschenstromverfahren: nur noch $Z-(K-1)$ Gleichungen!

Beim Maschenstromverfahren werden Maschenströme definiert & Maschengleichungen aufgestellt.

Knotenpotentialverfahren

Das Knotenpotentialverfahren ist im Prinzip sehr ähnlich zum Maschenstromverfahren.

Hierbei ist die Grundidee, dass man die Anzahl Gleichungen um das Netzwerk zu analysieren durch das Einführen von Knotenspannungen reduziert:

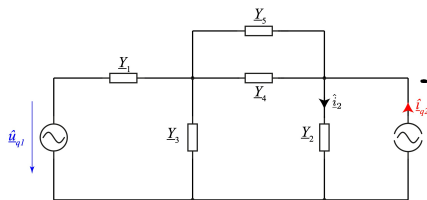


Abbildung 1: Gegebenes Netzwerk

→ konventionelles Verfahren: $K-1+Z-(K-1)$ Gleichungen

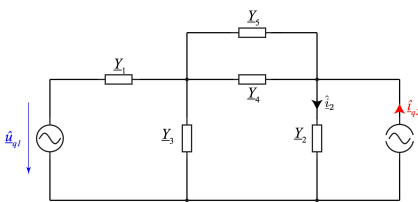
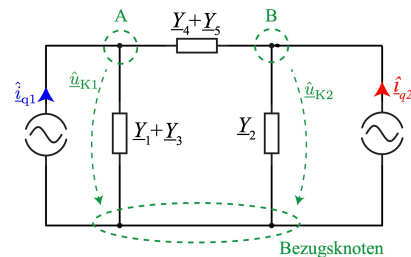


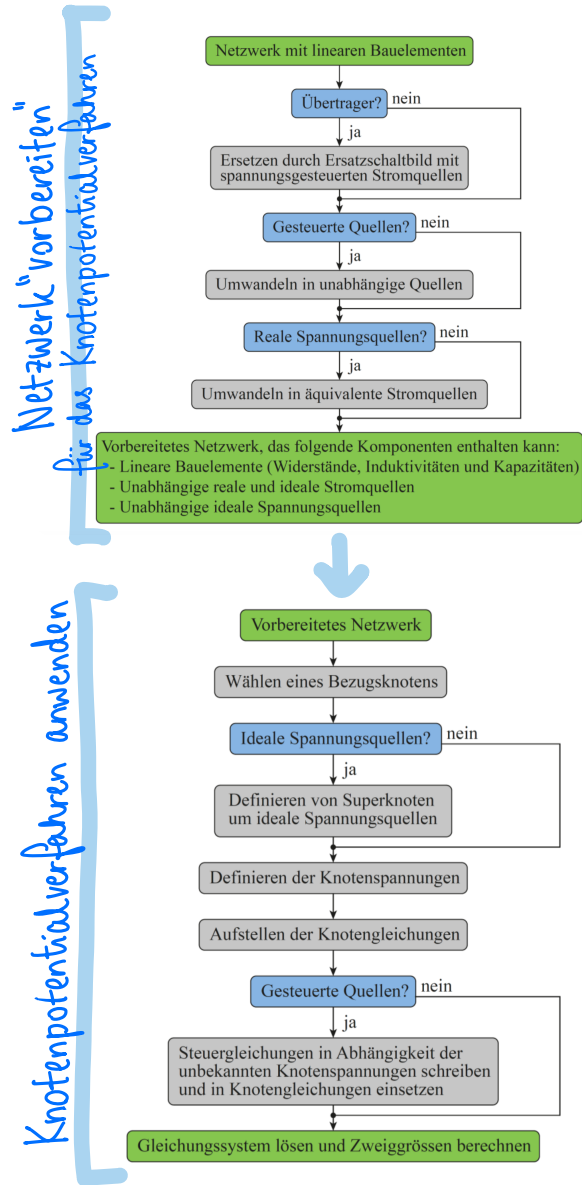
Abbildung 1: Gegebenes Netzwerk

→ Knotenpotentialverfahren:
nur noch $K-1$ Gleichungen.
(Die Knotenspannungen erfüllen die Maschengleichungen bereits! :))

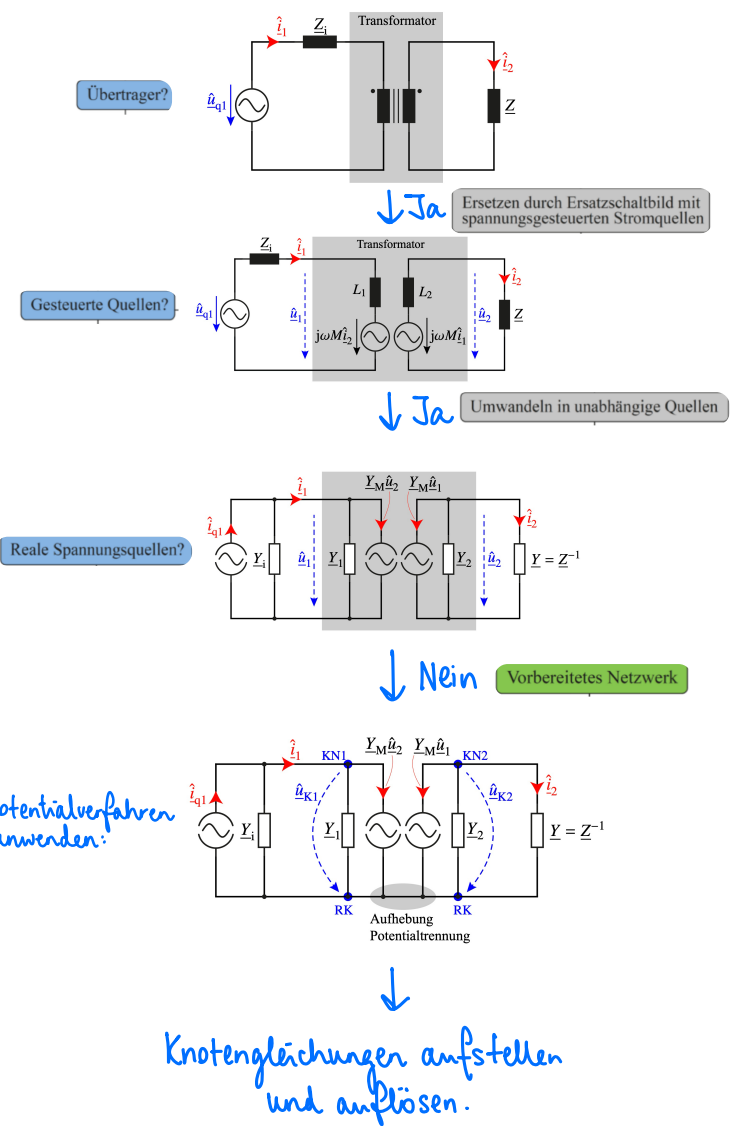


Beim Knotenpotentialverfahren werden also Knotenpotentiale (bzw.-spannungen) definiert und Knotengleichungen aufgestellt.

Kochrezept Knotenpotentialverfahren



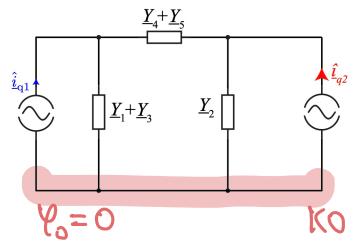
Visualisierung:



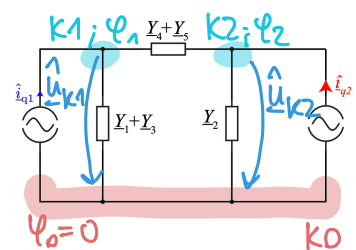
Doch wie wählt man das Bezugspotential und die Knotenspannungen?

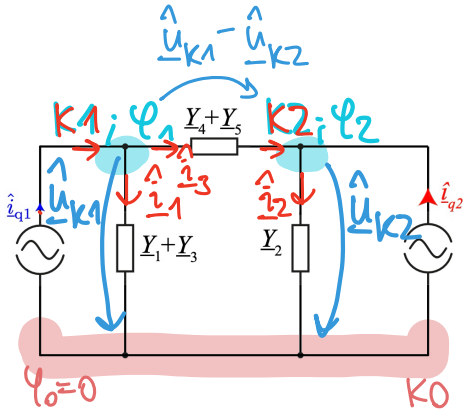
1. Schritt: Bezugsknoten wählen mit Potential $\varphi_0 = 0$

(Beliebig! Am besten ein zentraler Knoten mit vielen direkten Verbindungen zu anderen Knoten als Bezugspotential wählen.)



2. Schritt: Alle anderen Knoten eine unbekannte Knotenspannung (bezüglich Bezugsknoten) zuweisen. ($\hat{u}_{kx} = \varphi_x - \varphi_0$)





Wenn man so weit ist kann man die Knotengleichungen (in Abhängigkeit von den eingeführten Knotenspannungen) aufstellen:

$$K1: \hat{i}_{q1} - \hat{i}_1 - \hat{i}_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \hat{i}_1 + \hat{i}_3 = \hat{i}_{q1}$$

$$\Leftrightarrow \hat{u}_{k1} \cdot (Y_1 + Y_3) + (\hat{u}_{k1} - \hat{u}_{k2}) \cdot (Y_4 + Y_5) = \hat{i}_{q1}$$

$$\Leftrightarrow (Y_1 + Y_3 + Y_4 + Y_5) \hat{u}_{k1} - (Y_4 + Y_5) \hat{u}_{k2} = \hat{i}_{q1}$$

/ wollen es in der Form $A \cdot \hat{u}_{k1} + B \cdot \hat{u}_{k2} = C$

$$K2: \hat{i}_{q2} - \hat{i}_2 + \hat{i}_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \hat{i}_2 - \hat{i}_3 = \hat{i}_{q2}$$

$$\Leftrightarrow \hat{u}_{k2} \cdot Y_2 - (\hat{u}_{k1} - \hat{u}_{k2}) \cdot (Y_4 + Y_5) = \hat{i}_{q2}$$

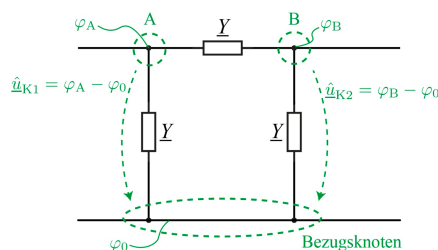
$$\Leftrightarrow -(Y_4 + Y_5) \hat{u}_{k1} + (Y_2 + Y_4 + Y_5) \hat{u}_{k2} = \hat{i}_{q2}$$

In Matrixform $\Rightarrow \underline{Y}_k \cdot \underline{\hat{u}}_k = \underline{\hat{i}}_q$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} (Y_1 + Y_3 + Y_4 + Y_5) & -(Y_4 + Y_5) \\ -(Y_4 + Y_5) & (Y_2 + Y_4 + Y_5) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_{k1} \\ \hat{u}_{k2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{i}_{q1} \\ \hat{i}_{q2} \end{pmatrix}$$

Bemerkung:

- Knotenspannungen = Potenzialdifferenzen zwischen Knotenpotenzial und Bezugsknotenpotenzial $\rightarrow u = \varphi_i - \varphi_j$
- Sinnvollerweise wird Bezugsknotenpotenzial $\varphi_0 = 0$ gewählt

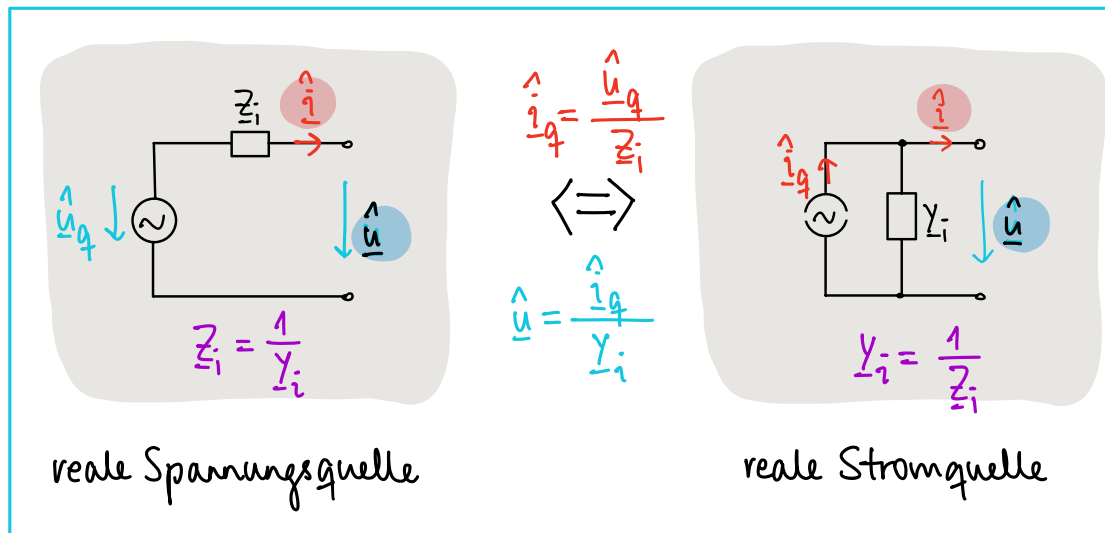


* Seeeeeeeeehr wichtig:

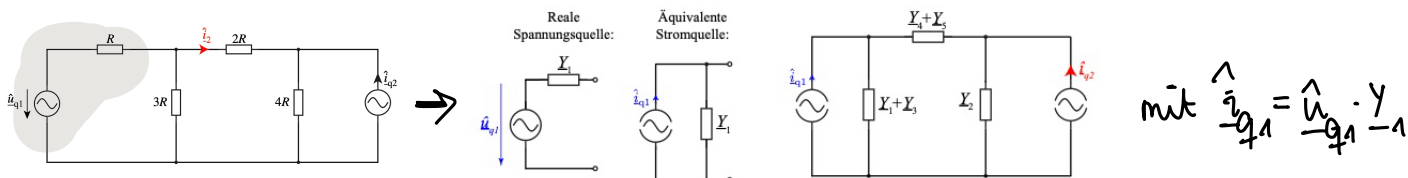
Analog zum Maschenstromverfahren; Wenn Transformatoren, gesteuerte Quellen oder Spannungsquellen im NW enthalten sind, muss man diese zuerst **umwandeln**, bevor man anfängt das Knotenpotentialverfahren anzuwenden:

Reale Spannungsquellen:

In eine äquivalente Ersatzstromquelle umwandeln:



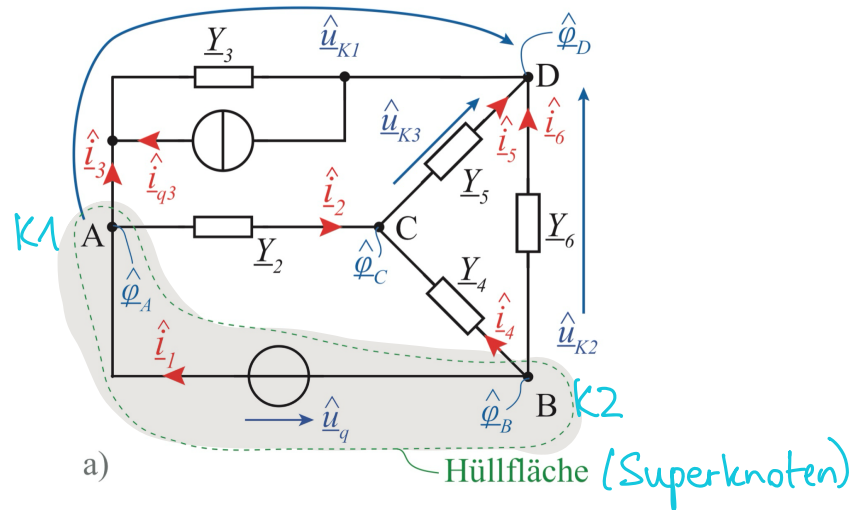
Bsp.:



Ideale Spannungsquellen:

- Spannungsquellenknoten $\rightarrow$ sogenannte "Superknoten"
 - Für Knoten, die direkt über eine Spannungsquelle $\hat{u}_q$ miteinander verbunden sind. ($\hat{u}_q$ ideale Spannungsquellen)
 - Hüllfläche um die beiden Knoten 1 und 2 legen ("Superknoten")
 - Die Knotenspannungen $\hat{u}_{K1}$, $\hat{u}_{K2}$ der beiden Knoten sind fest über $\hat{u}_{K1} = \hat{u}_{K2} + \hat{u}_q$ miteinander verbunden. Damit ist nur noch eine Knotenspannung eine Unbekannte.
 - Knotengleichung für die gesamte Hüllfläche aufstellen.

Visualisierung:



Eine Knotengleichung für die Hüllfläche: $\hat{i}_2 + \hat{i}_3 + \hat{i}_4 + \hat{i}_6 = 0$
(anstatt zwei)

Zusammenhang Knotenspannungen: $\hat{u}_{K1} = \hat{u}_q + \hat{u}_{K2}$

Beispielaufgabe

Aufgabe 1 Knotenpotenzialverfahren

Gegeben sei das folgende Netzwerk. Gegeben sind $\hat{u}_{q1}$, $\hat{i}_{q2}$, sowie die Admittanzen Y_n mit $n \in [1, 2, 3, 4, 5]$. Gesucht sind die Zweigspannungen und Zweigströme, die mittels Knotenpotenzialverfahren zu ermitteln sind.

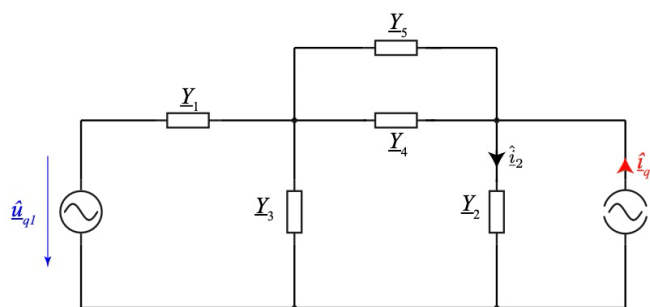
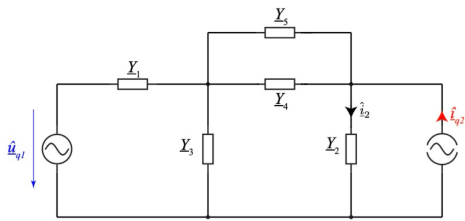


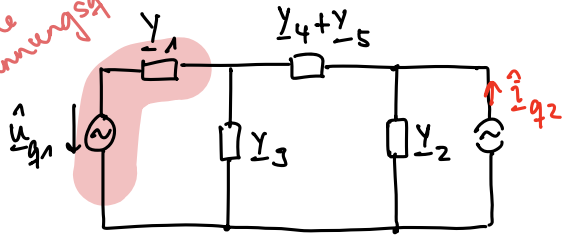
Abbildung 1: Gegebenes Netzwerk

- Bereiten Sie das Netzwerk vor, um es mit dem Knotenpotenzialverfahren berechnen zu können.
- Identifizieren Sie die Knoten des Netzwerks und bestimmen Sie einen geeigneten Referenzknoten. Weisen Sie den entsprechenden Knoten Knotenspannungen zu.
- Berechnen Sie die Knotenspannungen.
- Berechnen Sie den Strom $\hat{i}_2$ durch die Admittanz Y_2 .

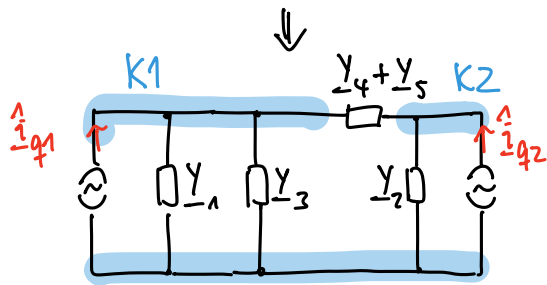
a)



reale Spannungsquelle!

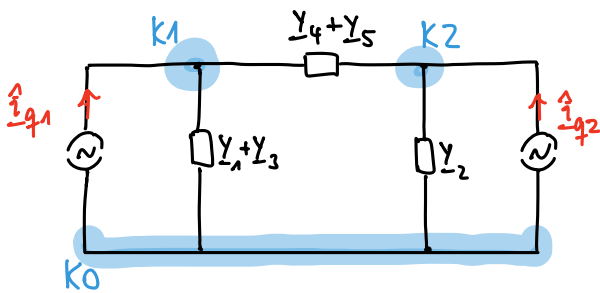


b)

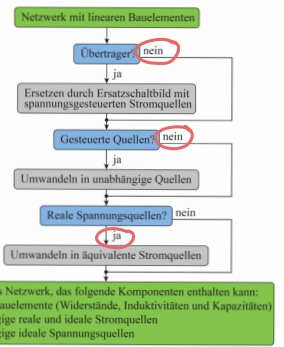


mit $\hat{i}_{q1} = \hat{u}_{q1} \cdot Y_1$

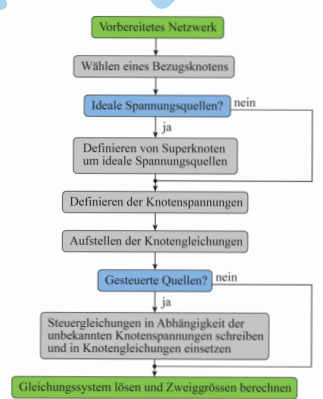
so weit wie möglich vereinfachen, ohne die Knoten ausversehen zu eliminieren!



Netzwerk "vorbereiten" für das Knotenpotentialverfahren

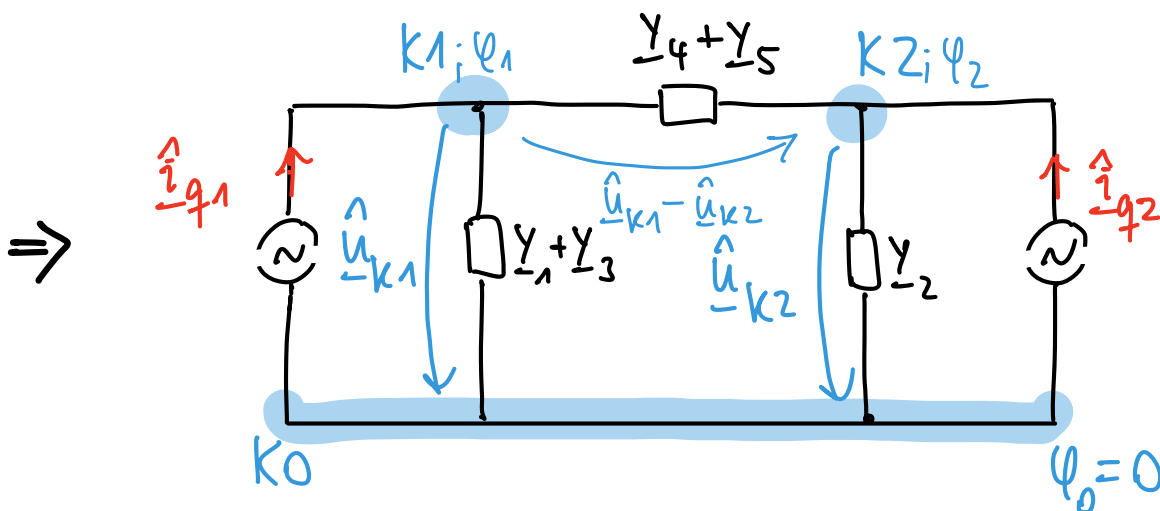


Knotenpotentialverfahren anwenden



$\hat{i}_{KS} = \hat{u}_{q1} \cdot Y_1 \Rightarrow$ dann ist $\hat{u}_{K1} = \frac{\hat{i}_{KS}}{Y_1} = \frac{\hat{u}_{q1} \cdot Y_1}{Y_1} = \hat{u}_{q1}$ ✓

K Knotenpotentiale & (K-1) Knotenspannungen definieren:



c) Knotengleichungen aufstellen:

$$K1: \hat{i}_{q1} - \hat{i}_{-1} - \hat{i}_{-3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \hat{i}_{-1} + \hat{i}_{-3} = \hat{i}_{q1}$$

$$\Leftrightarrow \hat{u}_{k1} \cdot (\underline{y}_{-1} + \underline{y}_{-3}) + (\hat{u}_{k1} - \hat{u}_{k2}) \cdot (\underline{y}_{-4} + \underline{y}_{-5}) = \hat{i}_{q1} \quad / \text{wollen es in der Form } A \cdot \hat{u}_{k1} + B \cdot \hat{u}_{k2} = C$$

$$\Leftrightarrow (\underline{y}_{-1} + \underline{y}_{-3} + \underline{y}_{-4} + \underline{y}_{-5}) \hat{u}_{k1} - (\underline{y}_{-4} + \underline{y}_{-5}) \hat{u}_{k2} = \hat{i}_{q1} \quad \text{mit } \hat{i}_{q1} = \hat{u}_{q1} \cdot \underline{y}_{-1}$$

$$K2: \hat{i}_{q2} - \hat{i}_{-2} + \hat{i}_{-3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \hat{i}_{-2} - \hat{i}_{-3} = \hat{i}_{q2}$$

$$\Leftrightarrow \hat{u}_{k2} \cdot \underline{y}_{-2} - (\hat{u}_{k1} - \hat{u}_{k2}) \cdot (\underline{y}_{-4} + \underline{y}_{-5}) = \hat{i}_{q2}$$

$$\Leftrightarrow -(\underline{y}_{-4} + \underline{y}_{-5}) \hat{u}_{k1} + (\underline{y}_{-2} + \underline{y}_{-4} + \underline{y}_{-5}) \hat{u}_{k2} = \hat{i}_{q2}$$

In Matrixform aufschreiben:

$$\Rightarrow \underline{y}_k \cdot \hat{u}_k = \hat{i}_q$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} (\underline{y}_{-1} + \underline{y}_{-3} + \underline{y}_{-4} + \underline{y}_{-5}) & -(\underline{y}_{-4} + \underline{y}_{-5}) \\ -(\underline{y}_{-4} + \underline{y}_{-5}) & (\underline{y}_{-2} + \underline{y}_{-4} + \underline{y}_{-5}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_{k1} \\ \hat{u}_{k2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u}_{q1} \underline{y}_{-1} \\ \hat{i}_{q2} \end{pmatrix}$$

Knotenadmittanzmatrix

Nach den Knotenspannungen $\hat{u}_{k1}$, $\hat{u}_{k2}$ auflösen:

$$\underline{y}_k \cdot \hat{u}_k = \hat{i}_q$$

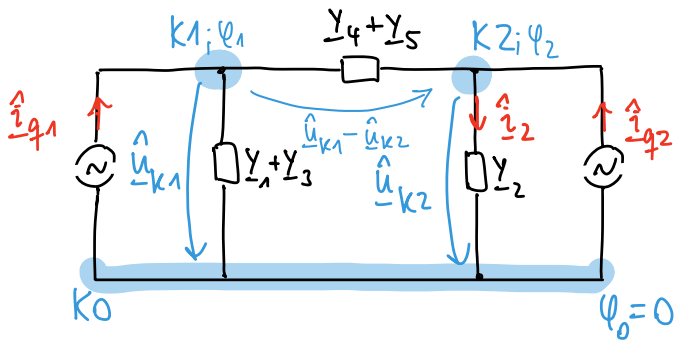
$$\Leftrightarrow \hat{u}_k = \begin{pmatrix} \hat{u}_{k1} \\ \hat{u}_{k2} \end{pmatrix} = \underline{y}_k^{-1} \hat{i}_q$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \hat{u}_{k1} \\ \hat{u}_{k2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(\underline{y}_k)} \begin{pmatrix} (\underline{y}_{-2} + \underline{y}_{-4} + \underline{y}_{-5}) & +(\underline{y}_{-4} + \underline{y}_{-5}) \\ +(\underline{y}_{-4} + \underline{y}_{-5}) & (\underline{y}_{-1} + \underline{y}_{-3} + \underline{y}_{-4} + \underline{y}_{-5}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{u}_{q1} \underline{y}_{-1} \\ \hat{i}_{q2} \end{pmatrix}$$

Definiere: $\begin{pmatrix} (\underline{Y}_2 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5) & + (\underline{Y}_4 + \underline{Y}_5) \\ + (\underline{Y}_4 + \underline{Y}_5) & (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{\underline{u}}_{k1} \\ \hat{\underline{u}}_{k2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\underline{F}_1 \underline{F}_2 - \underline{F}_3^2} \cdot \begin{pmatrix} \underline{F}_2 & -\underline{F}_3 \\ -\underline{F}_3 & \underline{F}_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\underline{u}}_{q1} \cdot \underline{Y}_1 \\ \hat{\underline{i}}_{q2} \end{pmatrix}$

d) $\hat{\underline{i}}_2$



$$\hat{\underline{i}}_2 = \hat{\underline{u}}_{k2} \cdot \underline{Y}_2 = \frac{\underline{Y}_2 \underline{F}_3}{\underline{F}_1 \underline{F}_2 - \underline{F}_3^2} \cdot \hat{\underline{u}}_{q1} \cdot \underline{Y}_1 + \frac{\underline{Y}_2}{\underline{F}_1 \underline{F}_2 - \underline{F}_3^2} \cdot \hat{\underline{i}}_{q2}$$

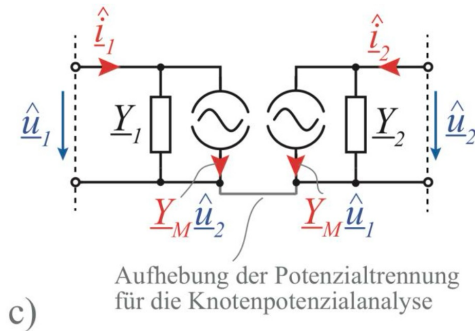
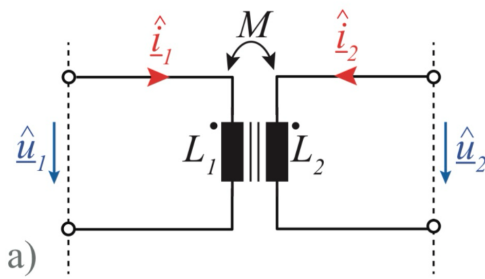
Es wird ersichtlich, dass hierfür lediglich die Knotenspannung $\hat{\underline{u}}_{K2}$ benötigt wird. Falls nur ein dezidiert Strom gefragt ist, kann der Rechenaufwand erheblich reduziert werden, wenn lediglich die benötigte(n) Knotenspannung(en) berechnet wird, ohne das gesamte Gleichungssystem zu lösen, i.e. alle Knotenspannungen zu berechnen!

gesteuerte Quellen:

- Analog zum Maschenstromverfahren
- Gesteuerte Quellen beim Aufstellen des Gleichungssystems wie unabhängige Quellen behandeln.
- Anschliessend Steuergleichungen in Abhängigkeit der Knotenspannungen einsetzen.

Transformatoren:

- Transformator durch untenstehendes Ersatzschaltbild mit spannungsgesteuerten Stromquellen ersetzen.
- Potentialtrennung durch einen Kurzschluss auflösen, um die Anzahl Gleichungen zu reduzieren.



$$Y_1 = \frac{L_2}{j\omega(L_1L_2 - M^2)}$$

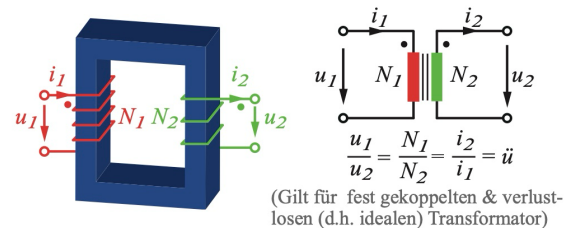
$$Y_2 = \frac{L_1}{j\omega(L_1L_2 - M^2)} \quad Y_M = \frac{-M}{j\omega(L_1L_2 - M^2)}$$

$$\hat{i}_1 = Y_1 \hat{u}_1 + Y_M \hat{u}_2$$

$$\hat{i}_2 = Y_M \hat{u}_1 + Y_2 \hat{u}_2$$

$$\hat{u}_1 = j\omega L_1 \cdot \hat{i}_1 - j\omega M \cdot \hat{i}_2 \quad \text{und} \quad \hat{u}_2 = j\omega M \cdot \hat{i}_1 - j\omega L_2 \cdot \hat{i}_2$$

(Transformatorgleichungen (z.F.S.1))



Beispielaufgabe

Aufgabe 2 Knotenpotenzialverfahren mit Transformator

Eine Impedanz $\underline{Z}$ ist über einen Transformator an eine reale Spannungsquelle $\hat{u}_{q1}$ mit Innenimpedanz $\underline{Z}_i$ angeschlossen. Der Transformator weist eine primärseitige Induktivität L_1 , eine sekundärseitige Induktivität L_2 und eine Kopplungsinduktivität M auf.

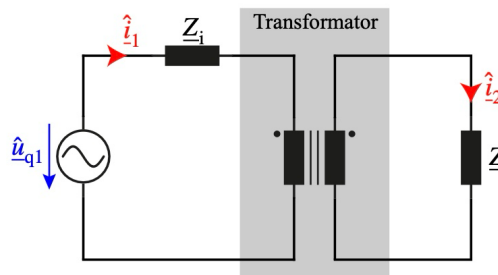
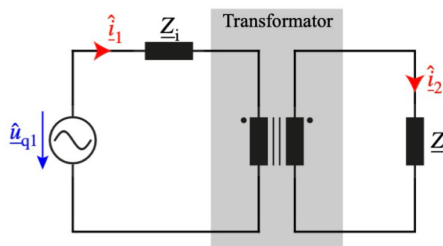
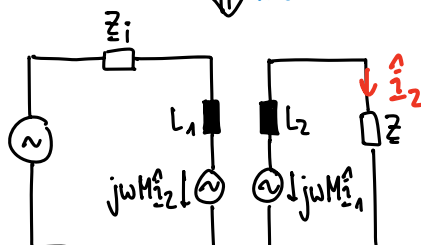


Abbildung 2: Mit dem Knotenpotenzialverfahren zu analysierendes Netzwerk mit realer Spannungsquelle, Transformator und Lastimpedanz.

- Bereiten Sie das Netzwerk auf das Knotenpotenzialverfahren vor.
 - Leiten Sie das Ersatzschaltbild des Transformators her. Ersetzen Sie dazu zunächst den Trafo durch stromgesteuerte Spannungsquellen. Ersetzen Sie danach diese Spannungsquellen durch äquivalente spannungsgesteuerte Stromquellen.
 - Ersetzen Sie die weiteren Spannungsquellen.
- Definieren Sie einen geeigneten Referenzknoten und stellen Sie die Knotengleichungen auf.
- Berechnen Sie den Strom $\hat{i}_2$ durch die Last.

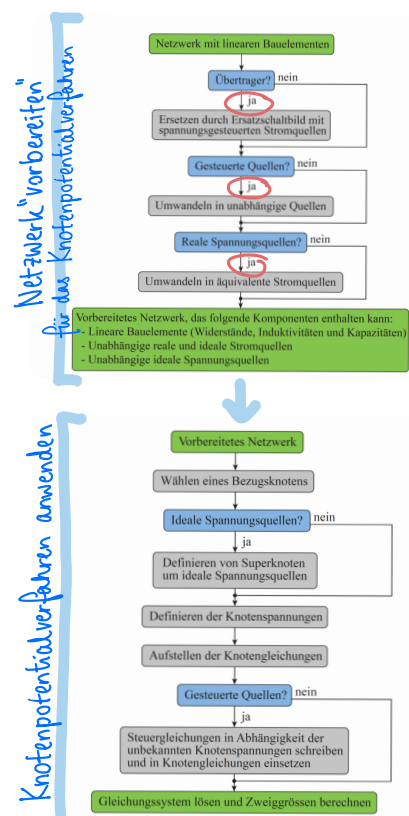
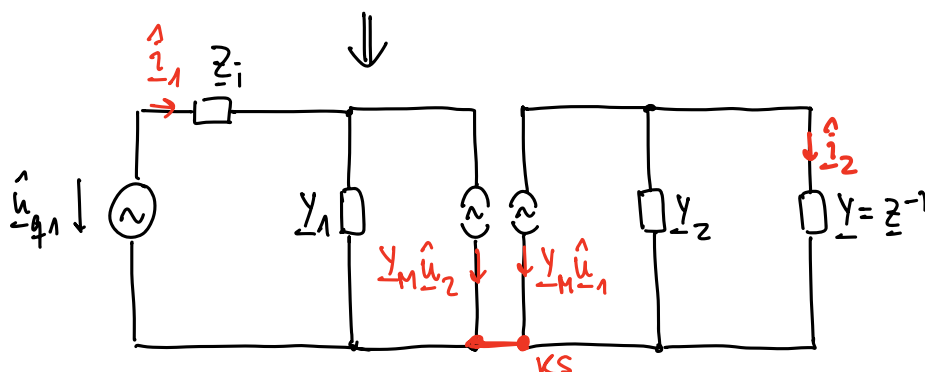


Wie im Maschenstromverfahren gelernt



mit

$$\begin{cases} \hat{i}_1 = Y_1 \hat{u}_1 + Y_M \hat{u}_2 \\ \hat{i}_2 = Y_M \hat{u}_1 + Y_2 \hat{u}_2 \end{cases}$$

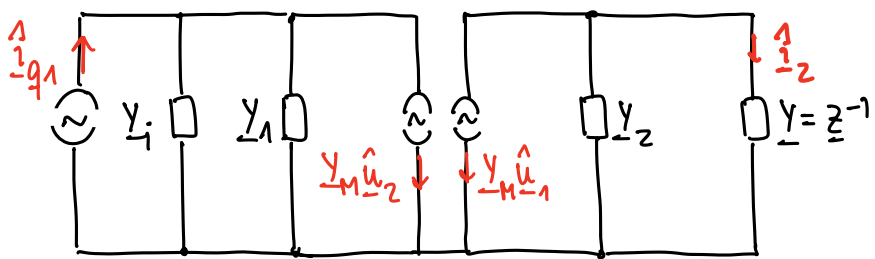
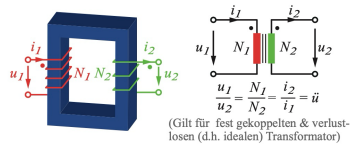


reale
Spannungsquelle

mit
$$\begin{cases} \hat{u}_1 = j\omega L_1 \hat{i}_1 - j\omega M \hat{i}_2 \\ \hat{u}_2 = -j\omega L_2 \hat{i}_2 + j\omega M \hat{i}_1 \end{cases}$$

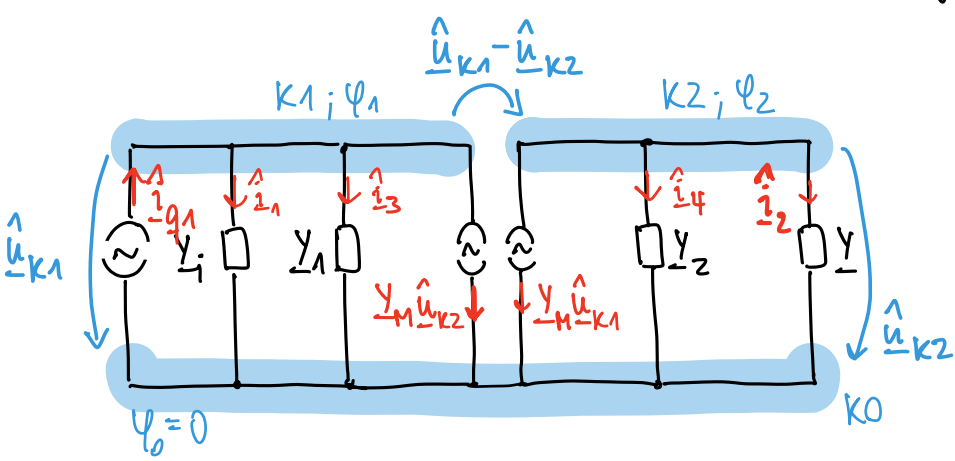
(Transformatorgleichungen (Z.F.S.1))

$\hat{u}_1 = j\omega L_1 \cdot \hat{i}_1 - j\omega M \cdot \hat{i}_2$ und $\hat{u}_2 = j\omega M \cdot \hat{i}_1 - j\omega L_2 \cdot \hat{i}_2$

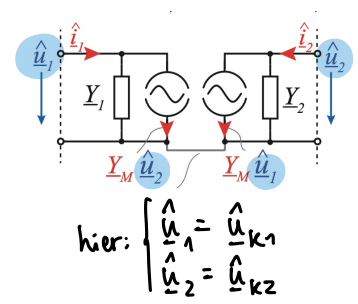


mit $\hat{i}_{q1} = \hat{u}_{q1} \cdot Y_1$

b) K Knotenpotentiale und (K-1) Knotenspannungen definieren:



aus Z.F. S. 3:



Knotengleichungen:

K1: $\hat{i}_{q1} - \hat{i}_1 - \hat{i}_3 - Y_M \hat{u}_{k2} = 0$

$\Leftrightarrow \hat{i}_1 + \hat{i}_3 + Y_M \hat{u}_{k2} = \hat{i}_{q1}$

$\Leftrightarrow \hat{u}_{k1} \cdot Y_1 + \hat{u}_{k1} \cdot Y_2 + Y_M \hat{u}_{k2} = \hat{i}_{q1}$

$\Leftrightarrow \underbrace{(Y_1 + Y_2)}_{F_1} \hat{u}_{k1} + \underbrace{Y_M}_{F_2} \hat{u}_{k2} = \hat{i}_{q1}$

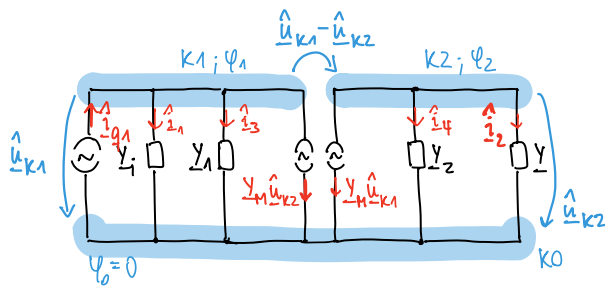
K2: $Y_M \hat{u}_{k1} + \hat{i}_4 + \hat{i}_2 = 0$

$\Leftrightarrow Y_M \hat{u}_{k1} + \hat{u}_{k2} \cdot Y_2 + \hat{u}_{k2} \cdot Y = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{Y_M}_{F_3} \hat{u}_{k1} + \underbrace{(Y_2 + Y)}_{F_4} \hat{u}_{k2} = 0$

In Matrixform: $\underline{Y}_K \cdot \hat{\underline{u}}_K = \hat{\underline{i}}_q \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \underbrace{(Y_1 + Y_2)}_{F_1} & \underbrace{Y_M}_{F_2} \\ \underbrace{Y_M}_{F_3} & \underbrace{(Y_2 + Y)}_{F_4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{u}_{k1} \\ \hat{u}_{k2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{i}_{q1} \\ 0 \end{pmatrix}$

c)



$$\hat{i}_2 = \hat{u}_{K2} \cdot Y$$

$$\Rightarrow \underline{Y}_K \cdot \hat{\underline{u}}_K = \hat{\underline{i}}_q$$

$$\Leftrightarrow \hat{\underline{u}}_K = \begin{pmatrix} \hat{u}_{K1} \\ \hat{u}_{K2} \end{pmatrix} = \underline{Y}_K^{-1} \cdot \hat{\underline{i}}_q = \frac{1}{\det(\underline{Y}_K)} \cdot \begin{pmatrix} (Y_2 + Y_m) & -Y_m \\ (Y_1 + Y_m) & Y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{i}_{q1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

gesucht
 $\Rightarrow$ nur nach $\hat{u}_{K2}$ auflösen.

$$\Rightarrow \hat{u}_{K2} = \frac{-1}{\det(\underline{Y}_K)} Y_m \hat{i}_{q1} = \frac{-Y_m}{(Y_2 + Y_m)(Y_1 + Y_m) - Y_m^2} \cdot \hat{i}_{q1}$$

$$\Leftrightarrow \hat{u}_{K2} = \frac{Y_m}{Y_m^2 - (Y_2 + Y_m)(Y_1 + Y_m)} \cdot \hat{i}_{q1}$$

Bem.:

Bei lediglich zwei unbekannten Knotenspannungen gestaltet sich das Invertieren der Knotenadmittanzmatrix relativ einfach. Bei einer höheren Anzahl an unbekannten Knotenspannungen erhöht sich die Dimension der Matrix und das Invertieren wird aufwendiger. Der komfortablere Lösungsweg hängt letztlich auch von den gefragten Größen ab.

Zusammengefasst: Maschenstromverfahren VS. Knotenpotentialverfahren

Maschenstromverfahren	Knotenpotentialverfahren
Reale Stromquelle – Umwandeln in äquivalente Spannungsquelle	Reale Spannungsquelle – Umwandeln in äquivalente Stromquelle
Übertrager: Ersetzen durch stromgesteuerte Spannungsquelle	Übertrager: Ersetzen durch spannungsgesteuerte Stromquelle
Berechnung von Maschenströmen	Berechnung von Knotenspannungen