NETZWERKE UND SCHALTUNGEN 2

ÜBUNG 09

03.05.2024 - LINA DE WINDT

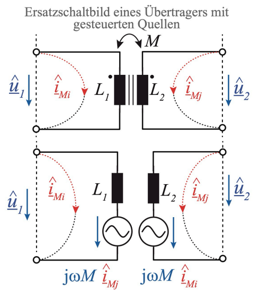
Alle Unterlagen auf n.ethz.ch/~ldewindt

Themen von heute:

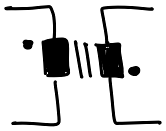
0. Zusatz zur Theorie von letzter Woche
1. Recap der Theorie von dieser Woche → Zusammenfassung S.9 & 10
   - 1.1 Superposition II
   - 1.2 Fourierreihen
   - 1.3 Harmonische Analyse
2. Beispielaufgaben
3. Vorbesprechung der Serie 9

0. Zusatz zur Theorie von letzter Woche

Beim Maschenstrom- / Knotenpotentialverfahren muss man einen Transformator umwandeln, bevor man das Verfahren anwenden kann. Dies geht wie folgt:

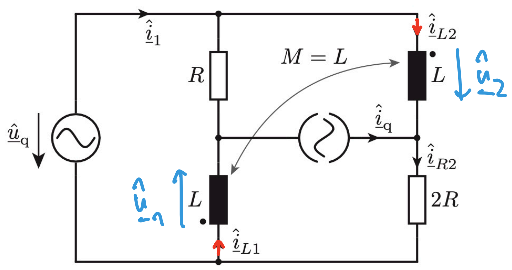


Was, wenn der Transformator aber so angeschlossen ist (beachte Punkte)?

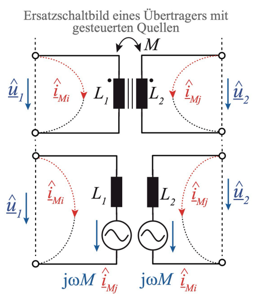


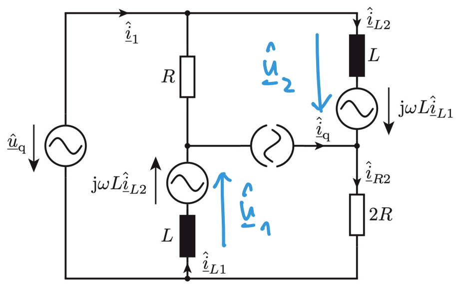
Einfach Strom so definieren, dass es "in den Punkt hineinfliesst"

Rest der ZF. folgen. :)



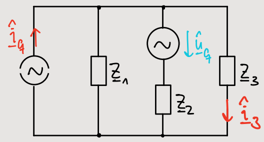
$\Longrightarrow$





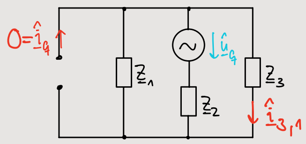
Superpositionsprinzip II

Bisher haben wir das Superpositionsprinzip nur für NWe mit Quellen gleicher Frequenz angewendet:



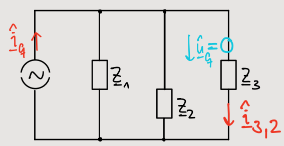
Gesucht: $\hat{\underline{i}}_3$

1.) Einfluss von $\hat{\underline{u}}_q$: $\rightarrow$ $\hat{\underline{i}}_q$ zu Null setzen!



$$\hat{\underline{i}}_{3,1} = \frac{1}{\underline{Z}_2+(\underline{Z}_1 \| \underline{Z}_3)} \cdot \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_3} \, \hat{\underline{u}}_q$$

2.) Einfluss von $\hat{\underline{i}}_q$ $\rightarrow$ $\hat{\underline{u}}_q$ zu Null setzen!



$$\hat{\underline{i}}_{3,2} = \frac{(\underline{Z}_1 \| \underline{Z}_2)}{(\underline{Z}_1 \| \underline{Z}_2)+\underline{Z}_3} \, \hat{\underline{i}}_q$$

$\Rightarrow$ Insgesamt: Lösung: $\hat{\underline{i}}_3 = \hat{\underline{i}}_{3,1} + \hat{\underline{i}}_{3,2} = \underline{\underline{\frac{1}{\underline{Z}_2+(\underline{Z}_1 \| \underline{Z}_3)} \cdot \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_3} \, \hat{\underline{u}}_q + \frac{(\underline{Z}_1 \| \underline{Z}_2)}{(\underline{Z}_1 \| \underline{Z}_2)+\underline{Z}_3} \, \hat{\underline{i}}_q}}$

Bsp. aus Ü6

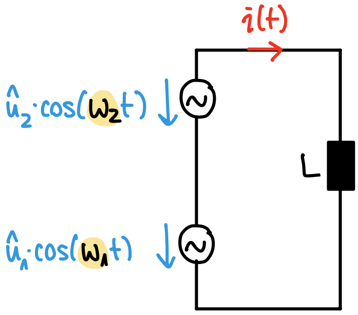
Das Superpositionsprinzip funktioniert auch bei Netzwerken mit Quellen unterschiedlicher Frequenz! ABER AUFPASSEN: Bei Netzwerken mit Quellen unterschiedlicher Frequenz darf die Überlagerung nur im Zeitbereich stattfinden! D.h. Zeiger dürfen i.A. nicht addiert werden (da Zeiger mit unterschiedlichen Frequenzen mit unterschiedlicher Geschwindigkeit rotieren.

Konkret geht man also bei Netzwerken mit Quellen unterschiedlicher Frequenzen wie folgt vor:

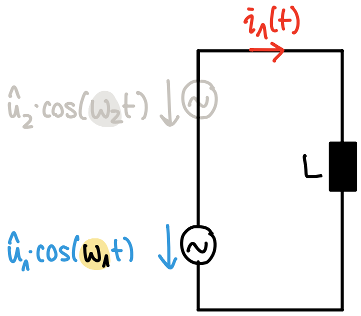
1) **Alle Quellen ausser einer aus Netzwerk entfernen. (Stromquellen -> Leerlauf, Spannungsquellen -> Kurzschluss)**
2) **Wechselgrösse der Quelle in komplexen Zeiger umwandeln.**
   $u(t) = \hat{u}\cos(\omega t + \phi) \Rightarrow \underline{\hat{u}} = \hat{u}e^{j\phi}$
3) **Gesuchte Spannung/Strom als Zeiger berechnen.**
4) **Zurücktransformieren in Zeitbereich!**
5) **Wiederholen für alle anderen Quellen.**
6) **Ganz zum Schluss: Die berechneten Teilspannungen/-ströme addieren. (Achtung: nicht Zeiger addieren!)**

Beispiel:

Berechne $i(t)$:



1) Quelle 1:



2) in Zeiger umwandeln: $\hat{u}_1 \cos(\omega_1 t) \Rightarrow \underline{\hat{u}}_1 = \hat{u}_1 e^{j0°}$

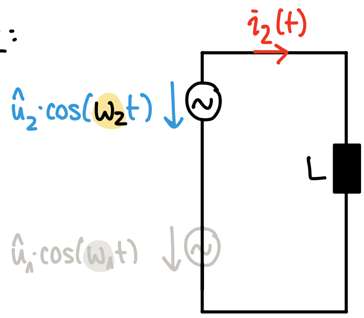
3) Zeiger $\underline{\hat{i}}_1$ berechnen: $\underline{\hat{i}}_1 = \dfrac{\underline{\hat{u}}_1}{\underline{Z}_L} = \dfrac{\hat{u}_1}{j\omega_1 L} = \dfrac{\hat{u}_1}{\omega_1 L} e^{-j90°}$

4) Zurücktransformieren in den Zeitbereich:

$$i_1(t) = \frac{\hat{u}_1}{\omega_1 L} \cos(\omega_1 t - 90°) = \frac{\hat{u}_1}{\omega_1 L} \sin(\omega_1 t)$$

5) Wiederholen für alle anderen Quellen:

Quelle 2:



$\hat{u}_2 \cos(\omega_2 t) \rightarrow \hat{u}_2 e^{j0°}$

$\underline{\hat{i}}_2 = \dfrac{\underline{\hat{u}}_2}{\underline{Z}_L} = \dfrac{\hat{u}_2}{j\omega_2 L} = \dfrac{\hat{u}_2}{\omega_2 L} e^{-j90°}$

$\Rightarrow i_2(t) = \dfrac{\hat{u}_2}{\omega_2 L} \sin(\omega_2 t)$

6) Teilströme addieren (im Zeitbereich!!):

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = \underline{\underline{\frac{\hat{u}_1}{\omega_1 L} \sin(\omega_1 t) + \frac{\hat{u}_2}{\omega_2 L} \sin(\omega_2 t)}}$$

Spezialfall: AC & DC Quellen in einem Netzwerk:

Das selbe Vorgehen funktioniert auch bei Netzwerken mit Gleich- & Wechselgrössen.

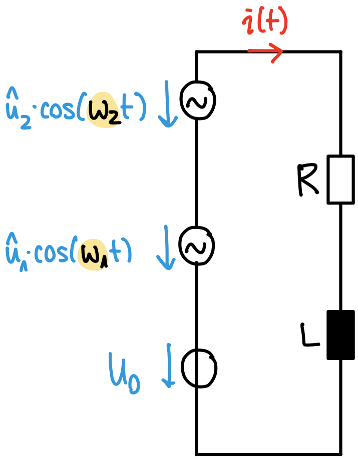
Um die Wechselanteile zu berechnen, verwenden wir wie gewohnt die komplexe Wechselstromrechnung (Zeiger etc.)

Um die Gleichanteile (Erinnerung: Gleichgrössen haben $\omega = 0$) zu berechnen,

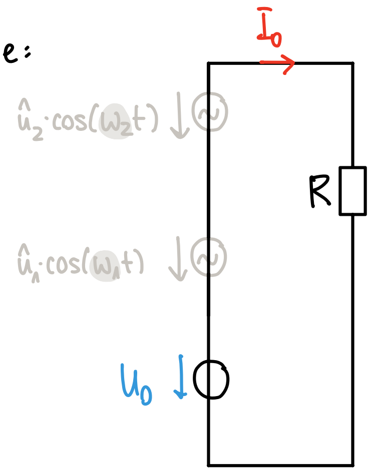
werden
- Spulen zu Kurzschlüssen (da $\underline{Z}_L = j\omega L \xrightarrow{\omega=0} \underline{Z}_L = 0$)
- Kondensatoren zu Leerläufen (da $\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} \xrightarrow{\omega=0} \underline{Z}_C = \infty$)

Beispiel:

Berechne $i(t)$:



1) Gleichspannungsquelle:



$$\Rightarrow \quad I_0 = \frac{U_0}{R}$$

2) Rest gleich wie vorheriges Bsp.

3) Teilströme addieren (im Zeitbereich!!):

$$i(t) = I_0 + i_1(t) + i_2(t) = \underline{\underline{I_0 + \frac{\hat{u}_1}{\omega_1 L}\sin(\omega_1 t) + \frac{\hat{u}_2}{\omega_2 L}\sin(\omega_2 t)}}$$

ist falsch, wird demnächst korrigiert

Beispielaufgabe:

Gegeben ist das einfache Netzwerk in Abbildung 1, das mit Hilfe des Überlagerungsprinzips berechnet werden soll. Berechnen Sie alle Grössen zuerst analytisch und dann mit eingesetzten Zahlenwerten und Einheiten. Folgende Zahlenwerte sind gegeben:
$U_{DC} = 5\,V$, $\hat{u}_{AC} = 10\,V$, $R = 20\,\Omega$, $L = 15\,mH$, $f = 100\,Hz$

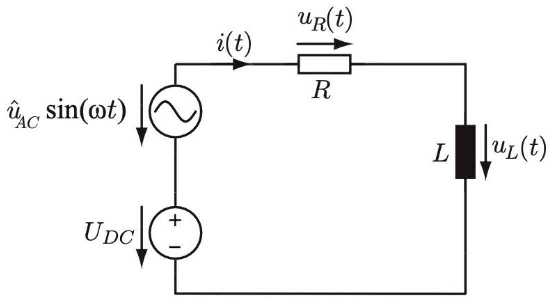


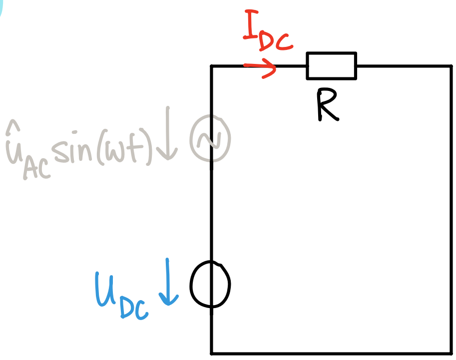
Abbildung 1: Netzwerk mit Gleich- und Wechselspannungsquelle

(a) Berechnen Sie den Strom I_{DC}, der sich zufolge der Gleichspannungsquelle einstellt.

(b) Berechnen Sie den Strom $i_{AC}(t)$, der sich zufolge der Wechselspannungsquelle einstellt.

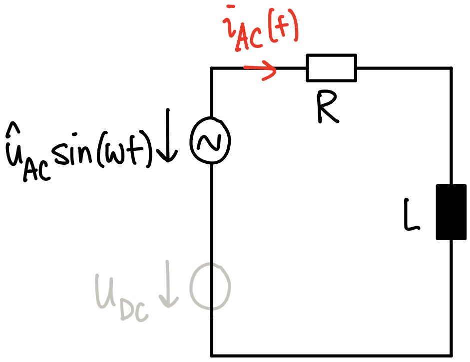
(c) Bestimmen Sie daraus den Gesamtstrom $i(t)$, der in dem Netzwerk fliesst.

a)



$$I_{DC} = \frac{U_{DC}}{R} = \frac{5V}{20\Omega} = \underline{\underline{0.25\,A}}$$

b)



$$\underline{\hat{u}}_{AC} = \hat{u}_{AC}\, e^{-j90°}$$

$$\Rightarrow \underline{\hat{i}}_{AC} = \frac{\underline{\hat{u}}_{AC}}{\underline{Z}_{tot}} = \frac{\underline{\hat{u}}_{AC}}{R + j\omega L} \overset{TR}{=} 0.452\,A\, e^{j(-90° - 25.232°)}$$

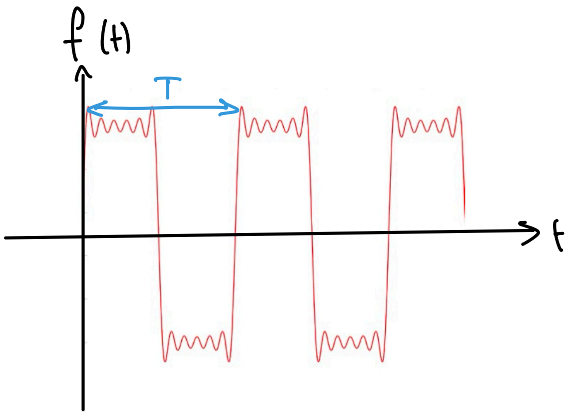
$$\Rightarrow \underline{\underline{i_{AC}(t) = 0.452\,A \sin(\omega t - 25.232°)}}$$

c) $i(t) = I_{DC} + i_{AC}(t) = \underline{\underline{0.25\,A + 0.452\,A \sin(\omega t - 25.232°)}}$

Fourierreihen

→ Mathe-stuff in KomA genauer. Hier nur Crash-course :)

In a nutshell: Alle periodischen Funktionen, welche die Dirichlet'schen Bedingungen erfüllen (endlich & lässt sich in endlich viele Teilintervalle zerlegen, in denen die Fkt. stetig & monoton ist) lassen sich als eine Summe von Cos & Sin- funktionen darstellen.



$$\boxed{f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n \cdot \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{b}_n \cdot \sin(n\omega t)}$$

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, dt}$$ ist der Gleichanteil,

$\hat{a}_n$, $\hat{b}_n$ sind die Koeffizienten der Fourierreihe:

$$\boxed{\hat{a}_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t)\, dt}$$

$$\boxed{\hat{b}_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t)\, dt}$$

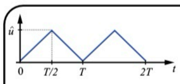
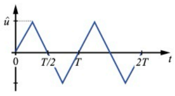
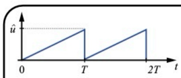
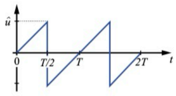
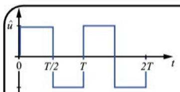
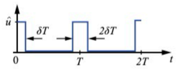
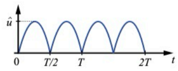
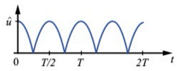
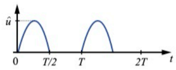
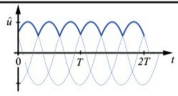
wobei $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$ die Periodendauer der Funktion ist.

Im Bsp. der Spannung u(t) lässt sich das wie folgt interpretieren:

$$u(t) = \underbrace{U_0}_{DC} + \underbrace{\overbrace{\hat{a}_1 \cos(\omega t) + \hat{b}_1 \sin(\omega t)}^{\text{Grundschwingung}} + \overbrace{\hat{a}_2 \cos(2\omega t) + \hat{b}_2 \sin(2\omega t)}^{\text{1. Oberschwingung}} + \hat{a}_3 \cos(3\omega t) + \ldots}_{AC}$$

Seeeeehr wichtig für die Prüfung:

Auf der Zusammenfassung befinden sich Fourierreihen von typischen Signalen:

Zeitfunktion	U_{eff}	Fourier-Koeffizienten	$u(t)$
	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$	$a_0 = \frac{1}{2}\hat{u}, \hat{a}_n = \frac{-4\hat{u}}{\pi^2}\frac{1}{n^2}$, $n = 1, 3, 5, ...$	$u(t) = \frac{\hat{u}}{2} - \frac{4\hat{u}}{\pi^2}[\cos(\omega t) + \frac{1}{3^2}\cos(3\omega t) + \frac{1}{5^2}\cos(5\omega t) + ...]$
	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$	$\hat{b}_n = \frac{8\hat{u}}{\pi^2}\frac{1}{n^2}(-1)^{\frac{n+3}{2}}$, $n = 1, 3, 5, ...$	$u(t) = \frac{8\hat{u}}{\pi^2}[\sin(\omega t) - \frac{1}{3^2}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5^2}\sin(5\omega t) - +...]$
	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$	$a_0 = \frac{1}{2}\hat{u}, \hat{b}_n = \frac{-\hat{u}}{\pi}\frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, ...$	$u(t) = \frac{\hat{u}}{2} - \frac{\hat{u}}{\pi}[\sin(\omega t) + \frac{1}{2}\sin(2\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + ...]$
	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$	$\hat{b}_n = \frac{2\hat{u}}{\pi}\frac{1}{n}(-1)^{n+1}$, $n = 1, 2, 3, ...$	$u(t) = \frac{2\hat{u}}{\pi}[\sin(\omega t) - \frac{1}{2}\sin(2\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) - +...]$
	$\hat{u}$	$\hat{b}_n = \frac{4\hat{u}}{\pi}\frac{1}{n}$, $n = 1, 3, 5, ...$	$u(t) = \frac{4\hat{u}}{\pi}[\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + ...]$
	$\hat{u}\sqrt{2\delta}$	$a_0 = 2\delta\hat{u}$, $\hat{a}_n = \frac{2\hat{u}}{\pi}\frac{1}{n}\sin(n2\pi\delta)$, $n = 1, 2, 3, ...$	$u(t) = 2\delta\hat{u} + \frac{2\hat{u}}{\pi}[\sin(2\pi\delta)\cos(\omega t) + \frac{1}{2}\sin(4\pi\delta)\cos(2\omega t) + \frac{1}{3}\sin(6\pi\delta)\cos(3\omega t) + ...]$
	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$	$a_0 = \frac{2\hat{u}}{\pi}, \hat{a}_n = \frac{-4\hat{u}}{\pi}\frac{1}{(n+1)(n-1)}$, $n = 2, 4, 6, ...$	$u(t) = \hat{u}\lvert\sin(\omega t)\rvert$; $u(t) = \frac{2\hat{u}}{\pi} - \frac{4\hat{u}}{\pi}\left[\frac{\cos(2\omega t)}{1\cdot 3} + \frac{\cos(4\omega t)}{3\cdot 5} + \frac{\cos(6\omega t)}{5\cdot 7} + ...\right]$
	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$	$a_0 = \frac{2\hat{u}}{\pi}, \hat{a}_n = \frac{4\hat{u}}{\pi}\frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}}{(n+1)(n-1)}$, $n = 2, 4, 6, ...$	$u(t) = \hat{u}\lvert\cos(\omega t)\rvert$; $u(t) = \frac{2\hat{u}}{\pi} + \frac{4\hat{u}}{\pi}\left[\frac{\cos(2\omega t)}{1\cdot 3} - \frac{\cos(4\omega t)}{3\cdot 5} + \frac{\cos(6\omega t)}{5\cdot 7} - +...\right]$
	$\frac{\hat{u}}{2}$	$a_0 = \frac{\hat{u}}{\pi}, \hat{a}_n = \frac{-2\hat{u}}{\pi}\frac{1}{(n+1)(n-1)}$, $\hat{b}_1 = \frac{\hat{u}}{2}$, $n = 2, 4, 6, ...$	$u(t) = \hat{u}\sin(\omega t)$ für $0 \leq t \leq T/2$; $u(t) = \frac{\hat{u}}{\pi} + \frac{\hat{u}}{2}\sin(\omega t) - \frac{2\hat{u}}{\pi}\left[\frac{\cos(2\omega t)}{1\cdot 3} + \frac{\cos(4\omega t)}{3\cdot 5} + \frac{\cos(6\omega t)}{5\cdot 7} + ...\right]$
	$\hat{u}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{8\pi}}$	$a_0 = \frac{3\sqrt{3}\hat{u}}{2\pi}$, $\hat{a}_n = \frac{-3\sqrt{3}\hat{u}}{\pi}\frac{1}{(n+1)(n-1)}$, $n = 3, 6, 9, ...$	$u(t) = \frac{3\sqrt{3}\hat{u}}{\pi}\left[\frac{1}{2} - \frac{\cos(3\omega t)}{2\cdot 4} - \frac{\cos(6\omega t)}{5\cdot 7} - \frac{\cos(9\omega t)}{8\cdot 10} - ...\right]$

Und auch einige wichtige Definitionen:

Leistung nichtsinusförmiger Grössen ($\hat{a}_n$ & $\hat{b}_n$ – Spitzenwerte bei der n-ten Harmonischen)

Effektivwert
$$U = \sqrt{a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\hat{a}_n^2 + \hat{b}_n^2\right)}$$

Wirkleistung [W]
$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)\,dt = U_0 I_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\hat{u}_n\hat{i}_n\cos(\varphi_{u_n} - \varphi_{i_n})\right)$$

Orthogonalität ($n, m \in \mathbb{N}^+$)

$\int_0^T \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)dt = 0$ für $m \neq n$

$\int_0^T \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)dt = \frac{T}{2}$ für $m = n$

$\int_0^T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)dt = 0$ für $m \neq n$

$\int_0^T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)dt = \frac{T}{2}$ für $m = n$

$\int_0^T \cos(n\omega t)\sin(m\omega t)dt = 0$

Kenngrössen nichtsinusförmiger Verläufe (U_n – Effektivwert der n-ten Harmonischen)

Effektivwert des Wechselanteils $U_\sim$	$U_\sim = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} U_n^2} = \sqrt{U^2 - U_0^2}$
Grundschwingungsgehalt g $(0 \leq g \leq 1)$	$g = \frac{U_1}{U_\sim}$
Gesamtklirrfaktor k $(0 \leq k \leq 1)$	$k = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} U_n^2}}{U_\sim} = \frac{\sqrt{U_\sim^2 - U_1^2}}{U_\sim} = \sqrt{1 - g^2} = \sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} k_n^2}$
Total Harmonic Distortion (THD)	$THD = (\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} U_n^2})/U_1 = k/\sqrt{1 - k^2}$
Scheitelfaktor ξ	$\xi = \frac{\hat{u}}{U_\sim}$
Formfaktor F	$F = \frac{U_\sim}{\lvert\bar{u}\rvert}$
Welligkeit w	$w = \frac{U_\sim}{\lvert U_0\rvert}$

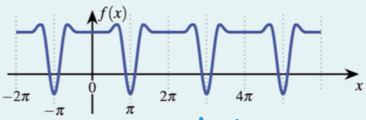
Symmetrien & Vereinfachungen

Herrscht Symmetrie in der Funktion, kann die Fourierreihe einfacher bestimmt werden:

$$FR = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{b}_n \sin(n\omega t)$$

Achsensymmetrie

(gerade Fkt.)



$u(t) = u(-t)$

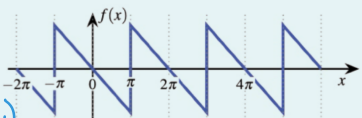
$$\hat{b}_n = 0$$

$$\hat{a}_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} u(t)\, dt \qquad \hat{a}_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} u(t)\cos(n\omega t)\, dt$$

$$\Rightarrow \quad u(t) = \hat{a}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n \cos(n\omega t)$$

Punktsymmetrie

(ungerade Fkt.)



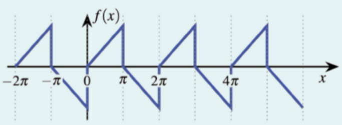
$u(t) = -u(-t)$

$$\hat{a}_0 = \hat{a}_n = 0$$

$$\hat{b}_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} u(t)\sin(n\omega t)\, dt$$

$$\Rightarrow \quad u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{b}_n \sin(n\omega t)$$

Halbwellensymmetrie



$u(t) = -u(t + \frac{T}{2})$

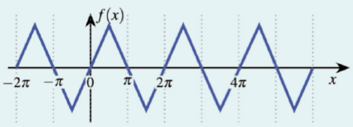
$\hat{a}_0 = \hat{a}_{2n} = \hat{b}_{2n} = 0$ (alle Koeff. mit geradem Index 0)

$$\hat{a}_{2n-1} = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} u(t)\cos((2n-1)\omega t)\, dt$$

$$\hat{b}_{2n-1} = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} u(t)\sin((2n-1)\omega t)\, dt$$

$\Rightarrow \; u(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \hat{a}_m \cos(m\omega t) + \sum_{m=1}^{\infty} \hat{b}_m \sin(m\omega t)$ mit $m = 2n-1$ (alle ungeraden Zahlen)

Ungerade & Halbwellensymmetrie

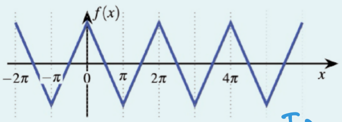


$u(t) = -u(-t) = -u(t + \frac{T}{2})$

$$\hat{a}_0 = \hat{a}_n = \hat{b}_{2n} = 0$$

$$\hat{b}_{2n-1} = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} u(t)\sin((2n-1)\omega t)\, dt$$

$\Rightarrow \; u(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \hat{b}_m \sin(m\omega t)$ mit $m = 2n-1$

Gerade & Halbwellensymmetrie 

$u(t) = u(-t) = -u(t+\frac{T}{2})$

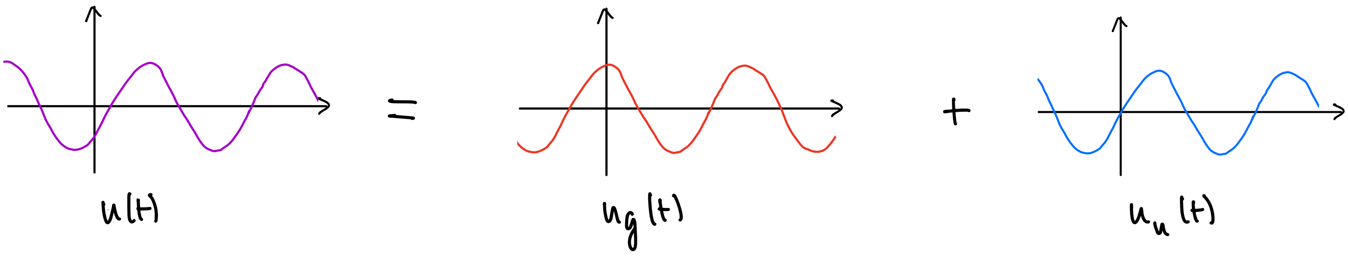
$$\hat{a}_0 = \hat{a}_{2n} = \hat{b}_n = 0$$

$$\hat{a}_{2n-1} = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} u(t)\cos((2n-1)\omega t)\,dt$$

$$\Rightarrow \quad u(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \hat{a}_m \cos(m\omega t) \quad \text{mit} \quad m = 2n-1$$

Weitere Vereinfachungen:

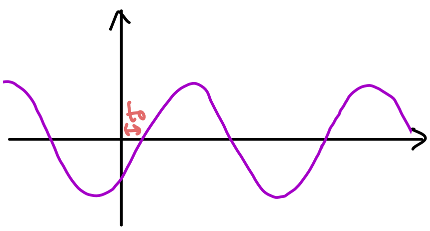
Wenn die vorliegende Funktion weder gerade noch ungerade ist, kann man sie in einem geraden & ungeraden Anteil zerlegen:



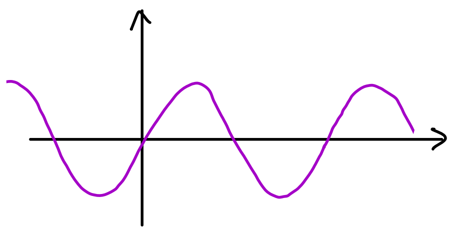
mit $\quad u_g(t) = \frac{1}{2}(u(t) + u(-t)) \qquad u_u(t) = \frac{1}{2}(u(t) - u(-t))$

und dann daraus die Fourierreihe bestimmen.

Eine andere Methode ist es, die Funktion in der Zeit zu verschieben, damit dann eine Symmetrie auftritt:



um t_0 verschieben:



ungerade :)

Dann werden die Koeffizienten der Fourierreihe bestimmt als:

$$\hat{a}_{n,neu} = \hat{a}_n \cdot \cos(n\omega t_0) - \hat{b}_n \sin(n\omega t_0) \qquad \hat{b}_{n,neu} = \hat{a}_n \sin(n\omega t_0) + \hat{b}_n \sin(n\omega t_0)$$

$$\Rightarrow \quad u(t) = \hat{a}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_{n,neu} \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{b}_{n,neu} \sin(n\omega t)$$

Beispielaufgabe: (Aufgabe aus der Beispielklausur 2)

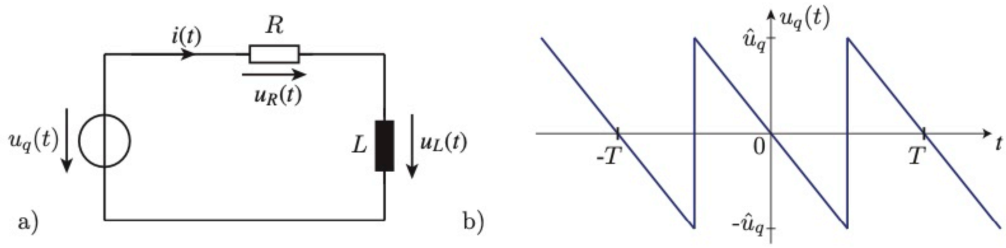


Abbildung 4: a) Gegebene Schaltung, b) Zeitverlauf von $u_q(t)$

Gegeben ist die Schaltung in Abb. 4a) mit dem Spannungsverlauf $u_q(t)$ in Abb. 4b).

a.) Der Zeitverlauf der Sägezahnspannung $u_q(t)$ soll mit einer Fourierreihe angenähert werden. Welche Art von Symmetrie liegt bei dem Signal vor? Welche der Fourierkoeffizienten a_0, $\hat{a}_n$, $\hat{b}_n$ werden bei dieser Symmetrie zu 0?

Symmetrie: ungerade funktion → Punktsymmetrie

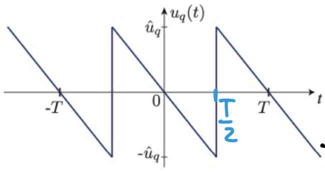
Aus Z.F.:

Ungerade Funktionen	$a_0 = \hat{a}_n = 0$
	$\hat{b}_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} u(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$
$-u(t) = u(-t)$	($\rightarrow$ Punktspiegelung)

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{a_0 = \hat{a}_n = 0}}$

b.) Stellen Sie die Integralausdrücke derjenigen Fourier-Koeffizienten, die nicht durch die Symmetrie zu 0 werden, als Funktion der Variablen t, n, T und $\hat{u}_q$ auf. Lösen Sie die Integrale. Vereinfachen Sie dabei so weit wie möglich. *Hinweis: Partielle Integration:* $\int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$

$$\hat{b}_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} u_q(t)\sin(n\omega t)\,dt$$



$u_q(t) = -\frac{2\hat{u}_q}{T}\,t$ und $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} -\frac{2\hat{u}_q}{T}\,t\sin(n\omega t)\,dt = \frac{-8}{T^2}\hat{u}_q\int_0^{T/2} t\cdot\sin(n\omega t)\,dt =$$

$$t \downarrow 1 \qquad \sin(n\omega t) \uparrow -\frac{1}{n\omega}\cos(n\omega t)$$

$$= -\frac{8\hat{u}_q}{T^2}\left[\left[-\frac{t}{n\omega}\cos(n\omega t)\right]_0^{T/2} + \int_0^{T/2}\frac{1}{n\omega}\cos(n\omega t)\,dt\right]$$

$$= -\frac{8\hat{u}_q}{T^2}\left(-\frac{\frac{T}{2}}{n\omega}\cos\left(n\omega\frac{T}{2}\right) - \left[\frac{1}{n^2\omega^2}\sin(n\omega t)\right]_0^{T/2}\right)$$

$$= -\frac{8\hat{u}_q}{T^2}\left(-\frac{\frac{T}{2}}{n\omega}\cos\left(n\omega\frac{T}{2}\right) - \frac{1}{n^2\omega^2}\sin\left(n\omega\frac{T}{2}\right)\right) \quad / \ \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$= -\frac{8\hat{u}_q}{T^2}\left(-\frac{T^2}{4\pi n}\underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} - \frac{T^2}{4\pi^2 n^2}\sin\left(n\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}\right)\right)$$

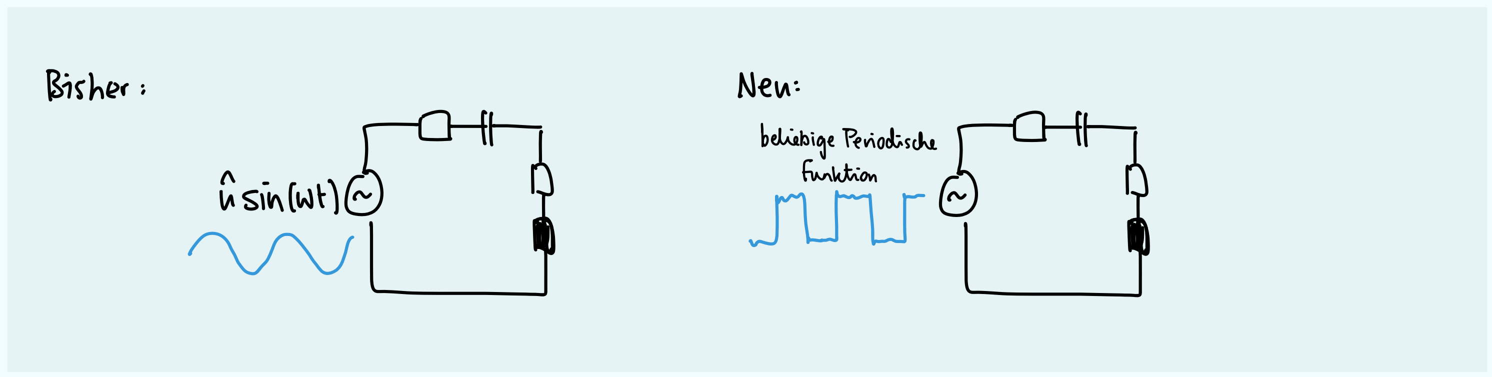
$$= -\frac{8\hat{u}_q}{T^2}\left(-\frac{T^2}{4\pi n}(-1)^n - \frac{T^2}{4\pi^2 n^2}\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0}\right)$$

$$= \frac{2\hat{u}_q}{\pi n}(-1)^n$$

$$\Rightarrow \quad u_q(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\hat{u}_q}{\pi n}(-1)^n \sin(nwt)$$

Harmonische Analyse

Bisher haben wir entweder mit Gleichgrössen (NuS1) oder reine Sinus- oder Cosinus-signale gearbeit. Was aber, wenn an Netzwerk solche Signale anliegen?

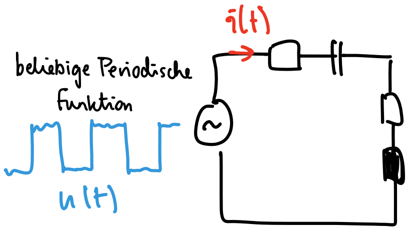


Dann können wir die oben gelernten Prinzipien (Superposition & Fourierreihen) kombinieren um RLC Netzwerke zu berechnen, die mit einem beliebigen periodischen Signal (nicht nur reine Sinus / Kosinus) angeregt werden. Das nennen wir die harmonische Analyse eines Netzwerks.

Vorgehen:

1) Wir benutzen die Fourierreihe, um die Input-Funktion als Linearkombination von Sinus/Kosinus Funktionen auszudrücken.
2) Quelle als Superposition dieser gefundenen Funktionen ausdrücken. (Achtung: unendlich viele)
3) Für jede Frequenz einzeln die Ausgangsspannung/strom berechnen. (Benutze komplexe Wechselstromrechnung)
4) Addition aller zuvor gefundenen Teil-ausgangsspannungen/ströme zur Gesamtausgangsspannung/strom im Zeitbereich. (Ergibt eine unendliche Reihe)

Beispiel:

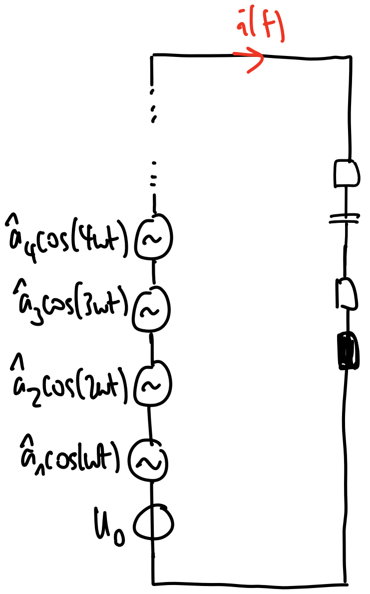


⇓

1) Input-Signal als Fourierreihe:

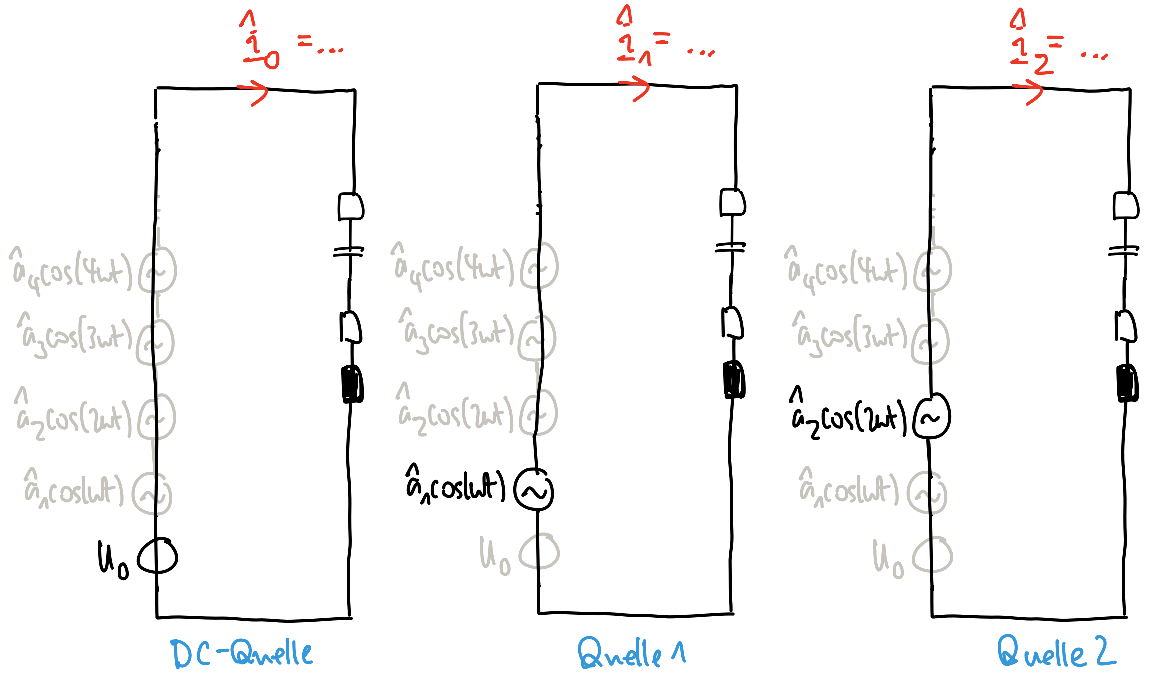
$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{b}_n \sin(n\omega t)$$

2)



Quelle als Superposition von (unendlich) vielen sin & cos Quellen ausdrücken

3) Für jede Quelle einzeln die Ausgangsspannung /-strom berechnen:



(meistens eine Fkt. $\underline{\hat{I}}_n = f(n)$)

• • •

. . .

4) $\underline{\hat{I}}_n \Rightarrow i_n(t)$ zuerst im Zeitbereich zurücktransformieren!

Gesamtstrom: $i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} i_n(t)$ (Addition aller Teilströme im Zeitbereich)

Beispielaufgabe: (Aufgabe aus der Beispielklausur 1)

Teil 3 Harmonische Analyse (26 Punkte=22%)

Gegeben ist die Schaltung in Abb. 4a) mit dem Stromverlauf $i_q(t)$ in Abb. 4b).

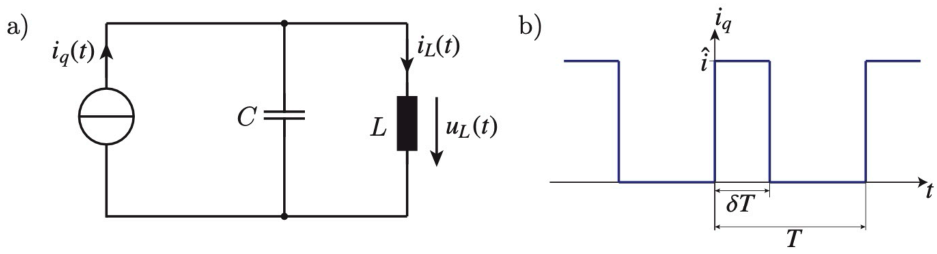


Abbildung 4: a) Gegebene Schaltung, b) Zeitverlauf von $i_q(t)$

a.) Der Zeitverlauf des Rechteckstromes $i_q(t)$ soll mit einer Fourierreihe angenähert werden. Wie muss der Ursprung $t = 0$ gelegt werden, dass sich eine geeignete Symmetrie für $0 < \delta < 1$ ergibt? Welche Art von Symmetrie liegt nach der Verschiebung vor? Was ist die mathematische Bedingung für diese Symmetrie?

b.) Stellen Sie die Integralausdrücke der Fourier-Koeffizienten a_0, $\hat{a}_n$ und $\hat{b}_n$ als Funktion der Variablen t, n, δ, T und $\hat{i}$ auf. Lösen Sie die Integrale.
Hinweis: Verwenden Sie dafür die gewählte Symmetrie aus Aufgabe a)! → $a_0 = \delta\hat{i}$, $\hat{b}_n = 0$

$\hat{a}_n = \frac{2\hat{i}}{n\pi}\sin(n(\delta-1)\pi)$

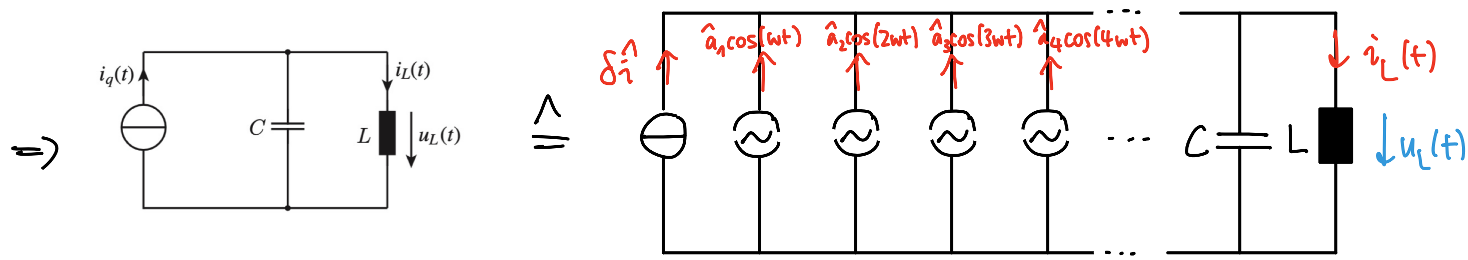
c.) Berechnen Sie die Welligkeit w von $i_q(t)$ analytisch und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

d.) Geben Sie einen analytischen Ausdruck für $u_L(t)$ und $i_L(t)$ an. Gehen Sie davon aus, dass transiente Vorgänge abgeklungen sind und das Netzwerk sich im eingeschwungenen Zustand befindet.
Hinweis: Es gilt $u_L(t), i_L(t) \in \mathbb{R}$

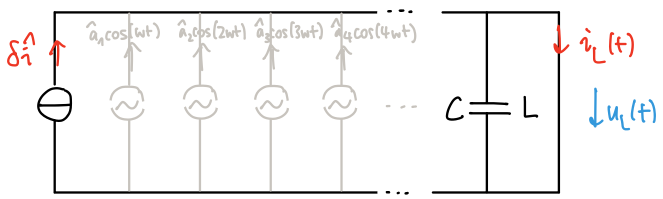
a)~c) wie vorheriges Bsp. Wir kriegen die Fourierreihe für $i_q(t)$:

$$i_q(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{b}_n \sin(n\omega t) =$$

$$= \delta\hat{i} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\hat{i}}{n\pi}\sin(n(\delta-1)\pi)\cos(n\omega t)$$

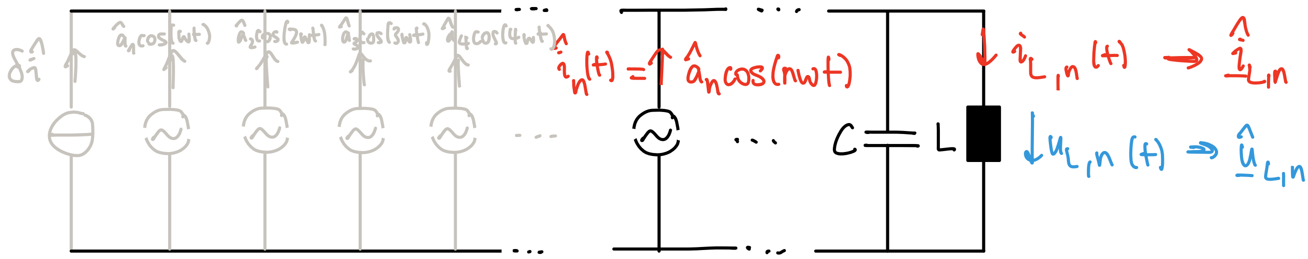


d) Gleichanteil:



$\underline{\underline{I_L = \delta\hat{i}}}$, $\underline{\underline{U_L = 0}}$

Wechselanteil: Nehme irgendeine Quelle & bestimme Strom & Spannung in Abhängigkeit von n



1) $\hat{i}_n(t)$ in Zeigerform: $\underline{\hat{i}}_n = \hat{a}_n e^{j0°} = \hat{a}_n$

2) $\underline{\hat{i}}_{L,n}$ berechnen:

$$\underline{\hat{i}}_{L,n} = \underline{\hat{i}}_n \cdot \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_L} = \underline{\hat{i}}_n \cdot \frac{\frac{1}{jn\omega C}}{\frac{1}{jn\omega C} + jn\omega L} = \underline{\hat{i}}_n \frac{1}{1 - n^2\omega^2 LC} = \frac{\hat{a}_n}{1 - n^2\omega^2 LC}$$

3) Zurücktransformieren in den Zeitbereich:

$$i_{L,n}(t) = Re\{\underline{\hat{i}}_{L,n} e^{jn\omega t}\} = \frac{\hat{a}_n}{1 - n^2\omega^2 LC}\cos(n\omega t)$$

4) Addition der Teilströme: (erst im Zeitbereich!!)

$$i_L(t) = I_L + \sum_{n=1}^{\infty} i_{L,n}(t) = \underline{\underline{\delta\hat{i} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{a}_n}{1 - n^2\omega^2 LC}\cos(n\omega t)}}$$

5) Spannung $u_L(t)$:

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} = L \cdot \frac{d}{dt}\left(\delta\hat{i} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{a}_n}{1 - n^2\omega^2 LC}\cos(n\omega t)\right) =$$

$$= L \cdot \frac{d}{dt}\delta\hat{i} + L \cdot \frac{d}{dt}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{a}_n}{1 - n^2\omega^2 LC}\cos(n\omega t) =$$

$$\Leftrightarrow u_L(t) = L \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \frac{\hat{a}_n}{1-n^2w^2LC} \cos(nwt) = L \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\hat{a}_n nw}{1-n^2w^2LC} \sin(nwt)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{u_L(t) = -wL \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1-n^2w^2LC} \hat{a}_n \sin(nwt)}}$$